



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI  
Dipartimento Interateneo di Fisica "M. Merlin"

Corso di Laurea in Fisica

# Teoria e fenomenologia della Superconduttività.

TESI DI LAUREA TRIENNALE

RELATORE

Chiar.mo Prof. A.Mirizzi

LAUREANDO

Leonardo Mastrototaro

---

ANNO ACCADEMICO 2016-17

*Ai miei genitori e a Teresa*

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>III</b>
<b>1 Superconduttività: aspetti generali</b>	<b>1</b>
1.1 Superconduttività . . . . .	1
1.2 Aspetti generali . . . . .	2
<b>2 Fenomenologia della superconduttività</b>	<b>4</b>
2.1 Equazione di continuità per la probabilità . . . . .	4
2.1.1 Momento cinetico e canonico . . . . .	6
2.1.2 Significato macroscopico della funzione d'onda . . . . .	6
2.2 Superconduttività . . . . .	7
2.3 Resistività nulla e effetto Meissner . . . . .	8
2.4 Quantizzazione del flusso del campo magnetico . . . . .	11
<b>3 La giunzione di Josephson</b>	<b>14</b>
3.1 Aspetti generali e dipendenza dal campo elettrico . . . . .	14
3.2 Dipendenza della corrente di giunzione dal campo magnetico . . . . .	19
3.3 Interferenza tra due giunzioni di Josephson . . . . .	21
<b>4 La teoria BCS</b>	<b>27</b>
4.1 Formulazione dell'Hamiltoniano per descrivere il sistema . . . . .	27
4.2 Stato fondamentale . . . . .	30
4.3 Eccitazioni . . . . .	34
<b>A Interazione ritardata descritta dalla BCS</b>	<b>37</b>
<b>B Spin degli elettroni di una coppia di Cooper</b>	<b>39</b>
<b>C Teorema sullo stato fondamentale</b>	<b>41</b>

## INDICE

---

D Sviluppo perturbativo dell'Hamiltoniano	43
Bibliografia	45

# Introduzione

Il presente lavoro di tesi si pone come obiettivo la trattazione della fenomenologia della *Superconduttività* di *Tipo I* e delle teorie che ne spiegano le caratteristiche.

Nel Capitolo 1 si introdurrà il fenomeno della superconduttività e verranno illustrate le principali proprietà dei superconduttori e alcune loro applicazioni. Si analizzeranno brevemente le differenze tra le due classi esistenti, quella del *Tipo I* e quella del *Tipo II*.

Nel Capitolo 2 verranno studiati e spiegati, dal punto di vista della meccanica quantistica, alcuni effetti osservabili in presenza di superconduttori. Si darà dimostrazione dell'Equazione di London, che fa parte di uno dei modelli elettrodinamici più conosciuti che descrivono il fenomeno, e si fornirà una descrizione dell'effetto Meissner.

Nel Capitolo 3 si tratterà della giunzione di Josephson, realizzata connettendo due superconduttori con una sottile barriera di materiale isolante. Se ne analizzeranno le dipendenze dal campo elettrico e dal campo magnetico per poi illustrare il funzionamento degli SQUID, i magnetometri più sensibili di cui attualmente disponiamo.

Nel Capitolo 4 verrà infine illustrata, utilizzando gli strumenti della Seconda Quantizzazione, la teoria BCS, che spiega il meccanismo della Superconduttività di *Tipo I* a livello microscopico.

# Capitolo 1

## Superconduttività: aspetti generali

### 1.1 Superconduttività

Esiste una classe di metalli che a basse temperature manifesta un insieme di effetti che va sotto il nome di *Superconduttività*. Essa ha luogo al di sotto di una determinata temperatura, detta temperatura critica ( $T_c$ ), specifica del materiale in esame. Al di sopra della  $T_c$ , il comportamento è quello di un qualsiasi altro metallo, descrivibile tramite la fisica classica. La proprietà principale dello stato di superconduttività è che la resistenza elettrica del materiale è esattamente zero. In tale situazione, lanciando un piccolo impulso di corrente, esso continuerà a scorrere nel materiale per tutto il tempo in cui si conduce l'osservazione.

Vi sono altre caratteristiche interessanti di questo stato. Ad esempio:

- a) l' *effetto Meissner*, cioè il fatto che i materiali espellono il campo magnetico presente al loro interno quando, al diminuire della temperatura, divengono superconduttori;
- b) la possibilità di realizzare magneti superconduttori capaci di generare campi magnetici molto intensi, come quelli richiesti per le macchine di risonanza magnetica e quelli utilizzati nell'acceleratore di particelle LHC (Large Hadron Collider);
- c) gli effetti caratteristici che avvengono congiungendo due superconduttori con un sottile dielettrico (tale disposizione è detta giunzione di Josephson).

Il fenomeno della superconduttività fu scoperto nel 1911 dal fisico tedesco Onnes, studiando il comportamento del mercurio al di sotto di 4 K. Raggiungere sperimentalmente tali temperature così basse era tecnicamente molto difficile e quindi il fenomeno rimase a lungo una curiosità accademica. Nei 75 anni trascorsi dal 1911 al 1986, però, sono stati scoperti materiali con una sempre più elevata temperatura critica, il cui massimo fu a 25 K. La superconduttività iniziò a destare interessi, anche pratici, a partire dal 1986, in quanto i fisici

Bednorz e Muller scoprirono che certi materiali (a base di ossidi di rame, lantanidi e metalli alcalino-terrosi) diventavano superconduttori a temperature critiche di gran lunga superiori a quelle note fino ad allora. Questo risultato diede il via a nuove ricerche che portarono alla scoperta di ceramiche, sempre contenenti rame e ossigeno con  $T_C > 90 K$ , temperature più facilmente raggiungibili poiché superiori a quella dell'azoto liquido.

Dal punto di vista teorico, la prima descrizione dell'elettrodinamica di un superconduttore è quella data dall'equazione di London, sviluppata nel 1935 da Fritz e Heinz London. La conduzione elettrica è definita dalla fisica classica e consiste in un flusso di elettroni in un reticolo ionico. Nella deriva, gli elettroni sono soggetti a una continua serie di collisioni con gli ioni del reticolo. Queste frenano lo scorrimento degli elettroni, ed una parte della loro energia cinetica si trasforma in emissione di calore che viene disperso (effetto Joule). La superconduttività, invece, prevede conduzione senza dispersione di calore e, pertanto, non può essere spiegata classicamente. Essa può essere studiata solo con gli strumenti della meccanica quantistica e i primi a darne una descrizione degli effetti, ancora valida tutt'oggi come trattazione matematica dei fenomeni macroscopici osservabili in presenza di superconduttori, furono, come già affermato, i fratelli London. Nel 1950 Ginzburg e Landau hanno sviluppato una teoria fenomenologica della transizione di fase e nel 1957 è stata esposta la prima teoria microscopica da parte di Bardeen, Cooper e Schrieffer.

## 1.2 Aspetti generali

La resistività di un conduttore elettrico convenzionale decresce proporzionalmente al decrescere della temperatura e a temperature prossime allo zero assoluto in ottimi conduttori, come l'oro, l'argento o il rame, permane una sensibile resistenza. Nei superconduttori, invece, si manifesta un'improvvisa e totale caduta della resistività a zero, quando il conduttore è raffreddato a temperature inferiori alla sua temperatura critica.

Si possono definire due classi di superconduttore: quelli di primo tipo comprendono metalli elementari e quelli del secondo tipo includono leghe metalliche e materiali ceramici, per i quali ancora non è stata sviluppata una descrizione teorica completa.

- *Tipo I*: i superconduttori di primo tipo (solitamente metalli e leghe metalliche) presentano una temperatura critica  $T_c$  molto bassa ed un'espulsione completa del campo magnetico esterno, fino ad un valore di campo critico. Questo effetto è dovuto a correnti superficiali indotte di intensità tale da generare fenomeni magnetici uguali e opposti al campo esterno, ottenendo così un campo magnetico interno al superconduttore praticamente trascurabile.

La superconduttività di Tipo I si ritiene si realizzi per la creazione di coppie di elettroni, dette coppie di Cooper che per effetti quantistici scrono senza produrre resistenza. Tale classe di materiali sarà quella a cui si farà riferimento e che verrà trattata in questa tesi;

- *Tipo II*: i superconduttori di secondo tipo presentano  $T_c$  molto più alte e sono caratterizzati dalla presenza di due valori critici per il campo magnetico. Al di sopra di un primo valore di intensità  $B_1$ , il materiale è penetrato da linee di flusso del campo magnetico distribuiti ordinatamente al suo interno. All'aumentare dell'intensità del campo magnetico, il flusso aumenta fino a portare alla distruzione della superconduttività per un'intensità  $B_2$ , normalmente molto più alta rispetto ai valori di campo critico per superconduttori del primo tipo.

Come già espresso, il presente lavoro di tesi tratterà dei superconduttori di Tipo I e delle teorie che ne spiegano le caratteristiche, analizzando dapprima la teoria di London e London, che ne descrive la fenomenologia, e successivamente la teoria microscopica BCS.



## Capitolo 2

# Fenomenologia della superconduttività

In questo Capitolo si procederà a fornire una descrizione fenomenologica della superconduttività. Prima di addentrarci nella trattazione della superconduttività è necessario introdurre gli aspetti della Meccanica Quantistica che verranno adoperati, in particolare si discuterà del flusso di probabilità che caratterizza una funzione d'onda (Sezioni 2.1 e 2.1.2). Successivamente, partendo dall'ipotesi delle coppie di Cooper si giungerà all'equazione di London e alla spiegazione dell'effetto Meissner (Sezioni 2.2 e 2.3), per poi trattare della quantizzazione del flusso del campo magnetico (Sezione 2.4).

La seguente trattazione si basa sulle referenze [1, 2].

### 2.1 Equazione di continuità per la probabilità

Per ogni grandezza, per la quale esiste una legge di conservazione locale, è valida la legge

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) , \quad (2.1)$$

in cui  $\rho(\vec{r}, t)$  e  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  sono, rispettivamente, la densità della grandezza considerata e la densità di corrente. L'Eq. (2.1) è detta *equazione di continuità*. Il suo significato fisico diventa evidente integrando entrambi i membri su un volume  $V$  di superficie  $S$ , ottenendo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho(\vec{r}, t) d^3r = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) d^3r = - \int_S \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} .$$

Il significato dell'equazione di continuità è che qualsiasi variazione in  $V$  della grandezza presa in considerazione è connessa ad un passaggio di corrente attraverso la frontiera  $S$ .

In Meccanica Quantistica ogni stato di un sistema fisico è rappresentato da una funzione

d'onda complessa, la cui norma è una densità di probabilità, nel senso che  $P(\vec{r}, t)d^3r = \psi^*(\vec{r}, t)\psi(\vec{r}, t)d^3r$  è la probabilità di trovare la particella, il cui stato è descritto dalla funzione d'onda  $\psi$ , nel volume  $d^3r$  intorno al punto  $\vec{r}$  all'istante  $t$ .

A  $P(\vec{r}, t)$  sono associate tutte le grandezze caratterizzanti la particella, per tale motivo risulta necessario individuare una legge di continuità; si parlerà, in tal caso, di densità di probabilità e corrente, o flusso, di probabilità.

Si considera l'equazione di Schrödinger per una particella di carica  $q$ , che si muove in un campo elettromagnetico  $(\vec{A}, \phi)$ :

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\vec{A} \right)^2 \psi + q\phi\psi . \quad (2.2)$$

Come precedentemente affermato si ha che:

$$P(\vec{r}, t) = \psi^*(\vec{r}, t)\psi(\vec{r}, t)$$

e, pertanto

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} . \quad (2.3)$$

Usando l'Eq. (2.2), per  $\partial\psi/\partial t$ , e la sua complessa coniugata per  $\partial\psi^*/\partial t$ , si ottiene:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \left[ \psi^* \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\vec{A} \right)^2 \psi + e\psi^*\phi\psi - \psi \frac{1}{2m} \left( -\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\vec{A} \right)^2 \psi^* - e\psi\phi\psi^* \right] .$$

Eseguito qualche semplificazione, il termine di sinistra può essere scritto come una divergenza. Infatti, l'equazione è equivalente a:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{2m} \left[ \psi^* \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\vec{A} \right) \psi + \psi \left( -\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\vec{A} \right) \psi^* \right] . \quad (2.4)$$

L'Eq. (2.4) mostra che la probabilità è conservata localmente. Facendo quindi riferimento all'Eq. (2.1) è possibile affermare che:

$$\begin{aligned} \vec{j}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2m} \left[ \psi^* \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\vec{A} \right) \psi + \psi \left( -\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\vec{A} \right) \psi^* \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\hat{\mathcal{P}} - q\vec{A}}{m} \psi \right)^* \psi + \psi^* \left( \frac{\hat{\mathcal{P}} - q\vec{A}}{m} \psi \right) \right] , \end{aligned} \quad (2.5)$$

con  $\hat{\mathcal{P}}$  operatore di quantità di moto, definito come  $\hat{\mathcal{P}} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$ .

Questo dimostra che vi è una corrente di probabilità  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ , la quale, essendo una somma di un termine e del suo complesso coniugato, è reale.

### 2.1.1 Momento cinetico e canonico

In fisica classica in presenza di campo elettromagnetico si può definire in due modi il momento di una particella:

$$m\vec{x} \quad , \quad (2.6)$$

$$m\vec{x} + \frac{q}{c}\vec{A} = \vec{p} \quad . \quad (2.7)$$

Il primo è chiamato *momento cinematico*, il secondo *momento canonico*. Quest'ultimo è il momento coniugato rispetto a  $\vec{x}$ , che si ottiene dalla lagrangiana del campo magnetico e, pertanto, è tale quantità  $\vec{p}$  che è importante nella dinamica e nell'Hamiltoniano classico

$$H = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A} \right)^2 + q\phi \quad . \quad (2.8)$$

Il *momento canonico* può essere identificato in meccanica quantistica con l'operatore:

$$\hat{\mathcal{P}} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \quad .$$

Si può, inoltre, osservare che è possibile ricavare l'Hamiltoniano da quello in assenza di campo ( $H = \vec{p}^2/2m$ ) con la sostituzione

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A} \quad H \rightarrow H - q\phi \quad .$$

Essa prende il nome di *sostituzione minimale* e l'interazione con il campo elettromagnetico che nasce in generale facendo questa sostituzione viene chiamata *interazione minimale*.

### 2.1.2 Significato macroscopico della funzione d'onda

L'interpretazione usuale della funzione d'onda è quella che si è precedentemente espressa, cioè che il suo modulo quadro è una densità di probabilità. È, però, possibile darne un'altra interpretazione, considerando un sistema fisico in cui ci sia un numero molto elevato di particelle, tutte nello stesso stato e descritte dalla funzione d'onda  $\psi$ . Per la legge dei grandi numeri, è possibile affermare che la probabilità di trovare una particella nel volume infinitesimo  $dx dy dz$  è uguale alla densità di particelle nel medesimo volume.

Se, in queste condizioni, ogni particella possiede la stessa carica  $q$ , allora  $q\psi\psi^*$  ha le dimensioni di una densità di carica; inoltre  $\vec{J}_e(\vec{r}, t) = q\vec{j}(\vec{r}, t)$  è direttamente la densità di corrente elettrica.

Di conseguenza, nella situazione in cui si ha un numero elevato di particelle nello stesso stato, è possibile fornire una nuova interpretazione fisica della funzione d'onda che si estende dal mondo microscopico al mondo macroscopico. Questo è ciò che avviene nel fenomeno della superconduttività.

## 2.2 Superconduttività

Come precedentemente affermato, molti metalli divengono superconduttori al di sotto di una temperatura critica, specifica per ogni materiale. In tale stato la resistività del metallo diviene bruscamente nulla e esso conduce senza dissipazione di energia. Questo fenomeno non è stato osservato per tutti i metalli e la teoria microscopica che ne spiega il funzionamento (valida solo per i superconduttori a basse temperature) è stata a lungo dibattuta. Tale teoria afferma che, a causa dell'interazione tra gli elettroni con le vibrazioni del reticolo, esiste una piccola forza attrattiva tra gli elettroni, la quale tende a legarli debolmente in coppie. Queste coppie, dette coppie di Cooper, possono esistere nonostante la repulsione elettrostatica dovuta alla forza di Coulomb; infatti, gli elettroni di una coppia sono separati, in media, da una distanza superiore alla distanza media tra le coppie e, quindi, gli effetti repulsivi tra loro non sono significativi.

La superconduttività si instaura solo a basse temperature poichè gli elettroni possono acquisire, per vibrazioni termiche, energie dell'ordine di  $kT$  che, al di sopra della temperatura critica, sono maggiori dell'energia di legame, provocando la rottura delle coppie.

Le coppie di Cooper hanno spin intero: pertanto, per il fenomeno della *condensazione dei bosoni*, tendono ad occupare lo stesso stato; perciò, come descritto nella Sezione 2.1.2, la funzione d'onda acquista un significato macroscopico.

L'equazione di Schrödinger per una coppia è l'Eq. (2.2), in cui bisogna considerare  $q = 2e$ , cioè il doppio della carica dell'elettrone. Questa sarà l'equazione per ogni coppia di elettroni nel materiale, che porterà a una medesima  $\psi$  per ogni elettrone, se si trascurano gli elettroni non legati in coppie (detti "normali"), sempre presenti a temperature diverse da 0 K, che si muovono nel reticolo in modo ordinario.

Si può scrivere che la funzione d'onda  $\psi$  di ogni bosone è data da:

$$\psi(\vec{r}) = \sqrt{\rho(\vec{r})} e^{i\theta(\vec{r})} , \quad (2.9)$$

dove  $\rho$  e  $\theta$  sono funzioni reali di  $\vec{r}$ . Tale scrittura non è frutto di alcuna particolarità in quanto ogni funzione complessa può essere scritta in questa forma, detta rappresentazione di Eulero. In primo luogo si esamina il significato fisico di  $\rho$ : infatti, si ha che  $|\psi(\vec{r})|^2 = \rho$  e quindi è possibile interpretare tale funzione come una densità di carica divisa per  $q$ .

Successivamente si esamina il ruolo di  $\theta$  sostituendo la  $\psi(\vec{r})$  nell'Eq. (2.5), ottenendo:

$$\vec{j} = \frac{\hbar\rho}{m} \left( \vec{\nabla}\theta - \frac{q}{\hbar c} \vec{A} \right) . \quad (2.10)$$

Per quanto affermato precedentemente,  $\vec{j}$  può essere interpretata come una densità di corrente divisa per la carica  $q$ . In elettromagnetismo, la densità di corrente e di carica sono legate

dalla relazione  $\vec{J}_e = q\vec{j} = q\rho\vec{v}$  e ne segue che:

$$\vec{v} = \frac{\hbar}{m} \left( \vec{\nabla}\theta - \frac{q}{c\hbar} \vec{A} \right). \quad (2.11)$$

Considerando, inoltre, che per una particella in un campo magnetico vale la relazione

$$m\vec{v} = -i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}$$

e confrontandola con l'Eq. (2.11), si può identificare  $\hbar\vec{\nabla}\theta$  con l'impulso canonico della particella. Siccome la densità di corrente e di carica hanno un significato fisico, sia  $\rho$  che  $\theta$  sono reali e osservabili. Bisogna specificare, però, che la fase assoluta non è osservabile, ma, conoscendone il gradiente in ogni punto, essa è nota a meno di una costante.

## 2.3 Resistività nulla e effetto Meissner

Due fenomeni molto importanti per i superconduttori sono la resistività nulla e l'effetto Meissner, di cui si può dare una descrizione qualitativa del primo, più formale del secondo. Tutti gli elettroni, trascurando quelli non legati in coppie, si trovano nello stesso stato, anche durante la conduzione. Solitamente la diminuzione dell'intensità di corrente è dovuta agli urti, i quali tendono ad eliminare gli elettroni dal flusso regolare, ma nel fenomeno della superconduttività le particelle oppongono grande resistenza a tale passaggio di stato, in quanto tutti i bosoni tendono a stare nello medesimo stato; pertanto, una volta che la corrente è iniziata, essa continuerà a scorrere senza diminuzioni (di tale effetto verrà data una dimostrazione fisica nel capitolo 4).

Nel 1933, inoltre, Meissner e Ochsenfeld osservarono che, immergendo un metallo superconduttore, al di sopra della sua temperatura critica, in un campo magnetico  $\vec{B}$  e, successivamente, abbassando la temperatura al di sotto della temperatura critica, all'interno del conduttore  $\vec{B} = 0$ . Questo significa che il campo  $\vec{B}$  viene espulso dal metallo e si trova solo al suo esterno.

Poichè l'espulsione del campo richiede un lavoro, dall'effetto Meissner si possono ottenere conseguenze spettacolari: per esempio, se si fa scendere lentamente una sbarra magnetica all'interno di una tazza di materiale superconduttore, si arriva a un punto in cui il lavoro necessario per espellere il campo del magnete dalla tazza diventa così grande da non poter essere più fornito dall'energia gravitazionale ottenuta abbassando ulteriormente la sbarretta, la quale, pertanto, rimane sospesa in aria come in Figura 2.1; tale fenomeno prende il nome di levitazione magnetica.

Per spiegare questo effetto, si osserva che si può assumere la densità di elettroni  $\rho$  uniforme

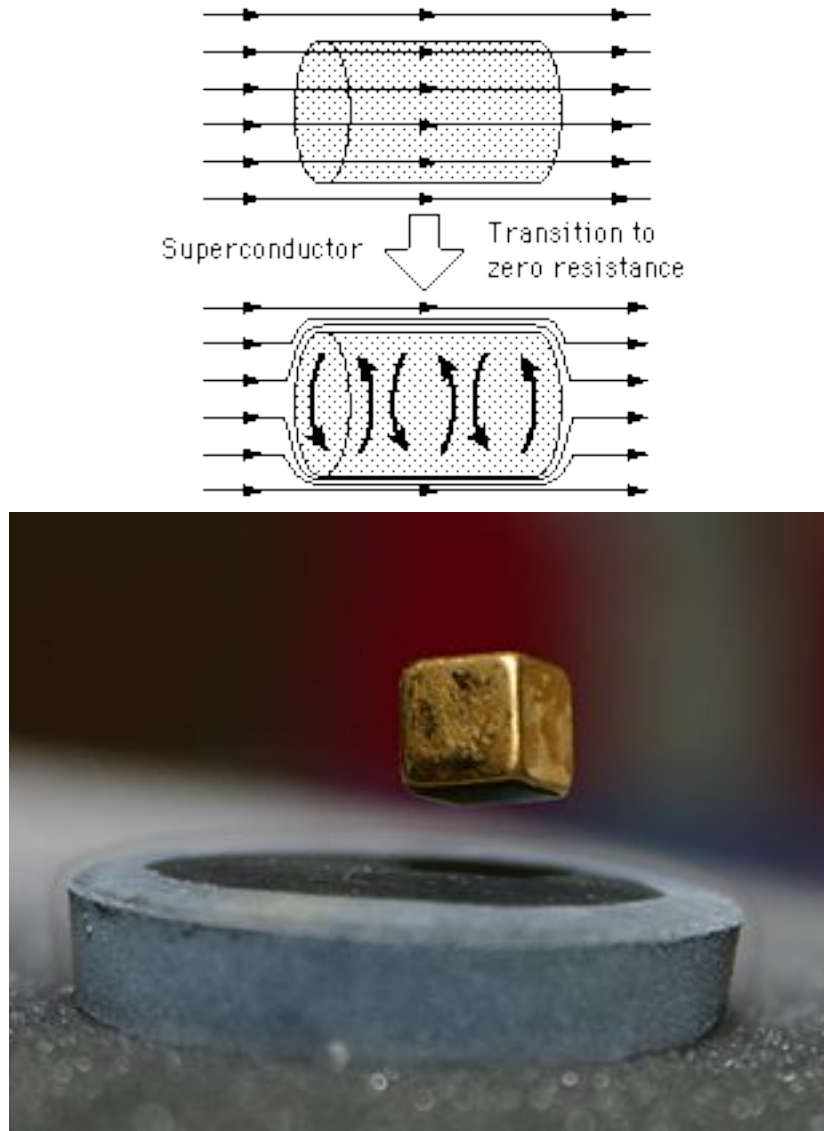


Figura 2.1: Effetto Meissner e levitazione indotta da tale fenomeno.

nel cristallo, dal momento che esso è un reticolo regolare e non ci si aspetta che esistano forti disomogeneità nella distribuzione degli elettroni. Si applica il rotore ad ambo i membri dell'Eq. (2.10):

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{j} = -\frac{q\rho}{mc} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = -\frac{q\rho}{mc} \vec{B}, \quad (2.12)$$

avendo tenuto conto del fatto che  $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}\theta = 0$ . L'Eq. (2.12) è detta equazione di London. Si calcola il rotore di entrambi i membri dell'equazione di Maxwell

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

e, utilizzando l'identità

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} ,$$

si ottiene:

$$\nabla^2 \vec{B} = -\frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} . \quad (2.13)$$

Ricavando  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}$  dall'Eq. (2.13) e sostituendola nell'equazione di London, si ricava:

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{4\pi q \rho}{mc^2} \vec{B} = \frac{1}{d^2} \vec{B} , \quad (2.14)$$

$$\text{con } d^2 = \frac{mc^2}{4\pi q \rho} .$$

Per risolvere tale equazione differenziale si sceglie il piano  $x$ - $y$  tangente alla superficie del metallo superconduttore in un punto e si sceglie l'asse  $z$  di modo tale che sia rivolto verso l'interno del materiale. Trascurando gli effetti di bordo, per ragioni di simmetria, in un intorno del punto considerato  $\vec{B}$  dipende solo da  $z$  e non da  $y$  e  $x$ .

Dall'equazione di Maxwell  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , si ottiene:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 . \quad (2.15)$$

Derivando rispetto a  $z$  si ha

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} = 0$$

e ponendo tale condizione nell'Eq. (2.14) si ricava:

$$B_z = 0 .$$

Di conseguenza, le uniche componenti del campo magnetico sono quelle tangenti alla superficie; tale risultato è in accordo con i dati sperimentali.

Per la trattazione precedente, l'Eq. (2.14) ha la forma

$$\frac{d^2 \vec{B}}{dz^2} = \frac{1}{d^2} \vec{B} .$$

Integrandola, si ottiene:

$$\vec{B}(z) = \vec{B}_0 \exp\left(-\frac{z}{d}\right) , \quad (2.16)$$

non avendo preso in considerazione la primitiva proporzionale a  $\exp(z/d)$ , in quanto produrrebbe un incremento del campo magnetico con il crescere di  $z$ , contrariamente a quanto è stato osservato sperimentalmente.

Pertanto, a una distanza di poche unità di  $d$ , il campo  $\vec{B}$  all'interno del metallo risulta praticamente trascurabile. Questo spiega l'effetto Meissner. Una stima numerica di  $d$  si può

effettuare considerando come caso specifico il piombo. Esso ha una densità di circa  $11 \text{ g/cm}^3$ , da cui, assumendo che ogni atomo contribuisce con 1 elettrone, si può porre  $\rho = N$ , numero di atomi per  $\text{cm}^3$ , ottenendo  $\rho = 3 \cdot 10^{22} \text{ atomi/cm}^3$ ; da tale valore e dalla massa e carica dell'elettrone si ricava

$$d = 10^{-6} - 10^{-5} \text{ cm} .$$

Tale numero è una stima dell'ordine di grandezza dello spessore entro cui può trovarsi un piccolo campo magnetico all'interno del materiale.

## 2.4 Quantizzazione del flusso del campo magnetico

Si vuole ora descrivere un effetto peculiare che si presenta nei superconduttori: la quantizzazione del flusso. Si suppone di avere un cilindro cavo composto da un materiale superconduttore e di immergerlo in un campo magnetico, le cui linee di forza siano parallele all'asse del cilindro. Raffreddando il materiale fino a portarlo a una temperatura inferiore a quella critica, il campo viene espulso dall'interno del materiale, ma permangono delle linee di campo all'interno della cavità. Eliminando il campo magnetico esterno, le linee di campo che si trovano nella cavità non scompaiono, restano intrappolate e si richiudono su se stesse, per garantire che il campo magnetico sia solenoidale, avvolgendo completamente il cilindro cavo. Tale campo magnetico può essere dovuto solo a una "super corrente", cioè una corrente che non risente di effetti dissipativi, la quale scorre sulla superficie del superconduttore. Ci si pone ora l'obiettivo di dare una trattazione rigorosa dei risultati appena esposti.

L'Eq. (2.16) dà come risultato un campo magnetico nullo all'interno del materiale e, di conseguenza, dall'equazione

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} ,$$

si ricava che, all'interno del materiale,

$$\vec{j} = 0 . \tag{2.17}$$

Si considera una curva chiusa  $\Gamma$  all'interno del superconduttore, che contenga al suo interno la cavità, e si applica la legge di Faraday

$$\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = - \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} .$$

Dall'Eq. (2.17) si può affermare che, lungo  $\Gamma$ ,  $\vec{E} = 0$ . Segue che il flusso magnetico attraverso una superficie che si appoggi alla curva deve rimanere costante e, per questo, le linee di campo devono restare nella cavità.



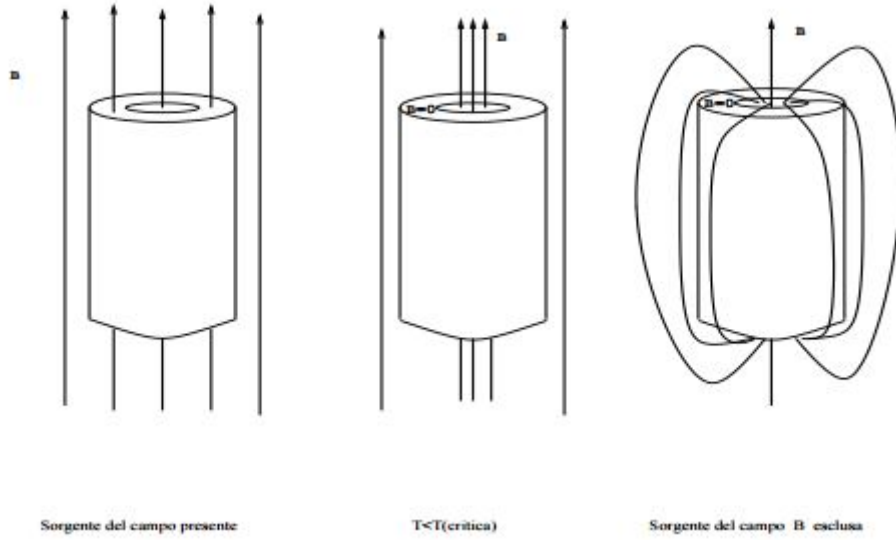


Figura 2.2: Quantizzazione del flusso del campo magnetico

In assenza di ogni causa esterna, la sorgente di questo nuovo campo  $\vec{B}$  va ricercata in una corrente che circola nel superconduttore. Essa scorrerà sulla superficie a causa dell'Eq. (2.17) e senza dissipazione energetica, dovuta all'effetto Joule, dal momento che il flusso deve rimanere costante. Dall'Eq. (2.17) si ottiene:

$$\frac{\hbar}{m} \left( \vec{\nabla}\theta - \frac{q}{\hbar c} \vec{A} \right) = 0 , \quad (2.18)$$

da cui

$$\hbar \vec{\nabla}\theta = \frac{q}{c} \vec{A} . \quad (2.19)$$

Integrando l'Eq. (2.19) lungo la curva chiusa  $\Gamma$  definita in precedenza:

$$\oint_{\Gamma} \vec{\nabla}\theta \cdot d\vec{l} = \frac{q}{\hbar c} \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} .$$

Il secondo membro di tale equazione è pari a:

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \cdot d\vec{S} = \Phi_B ,$$

in cui  $S$  è una superficie che si appoggia su  $\Gamma$ .

Considerando il primo membro, invece, l'integrale del gradiente di una funzione tra due punti è pari a:

$$\int_1^2 \vec{\nabla}\theta \cdot d\vec{l} = \theta_2 - \theta_1 .$$

Si potrebbe pensare che, siccome l'integrale viene effettuato su una curva chiusa, il risultato sia zero, ma l'unica condizione fisica è che vi sia un unico valore della funzione d'onda per ogni punto. Pertanto, facendo riferimento alla funzione d'onda Eq. (2.9), questo avviene se  $\theta$  varia di  $2n\pi$ , dove  $n$  è un intero.

Dall'analisi effettuata sui membri dell'Eq. (2.19) si deduce, quindi, che:

$$\Phi_B = \frac{2\hbar c\pi n}{q} . \quad (2.20)$$

Questa è l'equazione di quantizzazione del flusso: esso non può assumere un qualsiasi valore all'interno della cavità, ma deve essere un multiplo intero di

$$\frac{2\hbar c\pi}{q} .$$

Si tratta di un effetto puramente quantistico, come è reso evidente dal fatto che nel limite classico ( $\hbar \rightarrow 0$ ) svanisce. Esso fu misurato nel 1961 da due esperimenti separati, uno di Deaver e Fairbank, l'altro di Doll e Nabauer. I risultati sono in accordo con le previsioni teoriche purché si ponga  $q = 2e$ , con  $e$  carica dell'elettrone. Questa è una conferma della teorica di Bardeen, Cooper e Schrieffer, in base alla quale i responsabili del fenomeno sono le coppie di Cooper.

## Capitolo 3

# La giunzione di Josephson

Nel presente capitolo si tratteranno alcuni aspetti della fenomenologia dei superconduttori. In particolare, si discuterà dei peculiari effetti che si verificano con una giunzione di Josephson, cioè una giunzione tra due superconduttori. Questo dispositivo elettronico è di particolare importanza per le sue applicazioni, in particolare la possibilità di costruire SQUID (Superconducting QUantum Interference Devices), i magnetometri a più alta sensibilità di cui oggi si dispone.

In tale capitolo si procederà inizialmente ad analizzare la dipendenza dal campo elettrico (Sezione 3.1) e magnetico (Sezione 3.2) di una singola giunzione e successivamente si descriverà il comportamento di interferenza tra due giunzioni collegate in parallelo (Sezione 3.3), collegamento elettrico per cui ai capi delle due giunzioni vi è la stessa differenza di potenziale. La seguente trattazione si basa sulla referenza [2].

### 3.1 Aspetti generali e dipendenza dal campo elettrico

Una giunzione è l'interfaccia che separa due zone di proprietà elettriche diverse. Nel caso in esame la giunzione tra le superfici di due superconduttori è realizzata da una sottile barriera di materiale isolante. Un tale dispositivo, schematizzato in Figura 3.1, è chiamato giunzione di Josephson.

La giunzione ed è un esempio di un fenomeno quantistico che si rivela a livello macroscopico: essa consente il passaggio di coppie di Cooper solo per effetto tunnel, in quanto il mezzo isolante blocca la deriva degli elettroni. L'effetto tunnel si può verificare anche in giunzioni tra due materiali non superconduttori, ma non è apprezzabile macroscopicamente in quanto, a causa della sua bassa probabilità di realizzarsi, produce il passaggio di pochi elettroni attraverso la barriera. Ciò che contraddistingue i superconduttori è che tutte le coppie di

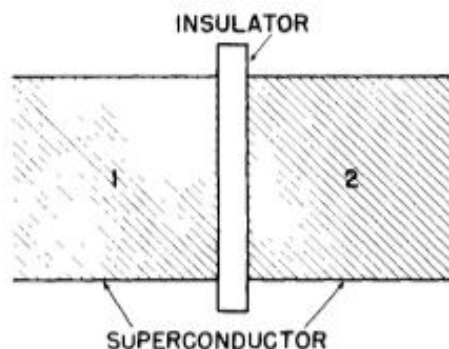


Figura 3.1: Giunzione di Josephson

elettroni sono descritte dalla medesima funzione d'onda  $e$ , quindi, essa assume un significato macroscopico (come già analizzato nella Sezione 2.1.2). Per tale motivo, se la barriera è sufficientemente sottile, vi è una quantità apprezzabile di elettroni che l'attraverseranno per effetto tunnel.

Si prende in considerazione la situazione più semplice, cioè quella in cui le due parti sono composte dallo stesso materiale e collegate a una batteria che fornisce una differenza di potenziale (d.d.p.)  $V$ . Si indica con  $\psi_1$  la funzione d'onda delle coppie di Cooper che si trovano nel primo superconduttore, con  $\psi_2$  quella dello stesso tipo di coppie nel secondo superconduttore.

Se la barriera è sufficientemente larga, i due superconduttori non si influenzano l'un l'altro e l'equazione di Schrödinger per i due sistemi è:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_{1/2} = E_{1/2} \psi_{1/2} ,$$

dove  $E_1$  può essere diverso da  $E_2$  se vi è una differenza di potenziale attraverso la barriera isolante. Questo caso non è rilevante per la nostra trattazione in quanto non si verifica effetto tunnel.

Se la barriera, però, è sufficientemente sottile, il fenomeno dell'effetto tunnel consente ad alcune coppie del secondo superconduttore di attraversare la barriera e spostarsi nel primo superconduttore e viceversa; siccome l'equazione di Schrödinger è lineare ed omogenea, la frequenza di passaggio nel primo materiale è proporzionale a  $\psi_2$  e viceversa.

Si scrive la funzione d'onda delle coppie di Cooper del sistema formato dai due superconduttori come

$$|\psi\rangle = \psi_1 |1\rangle + \psi_2 |2\rangle ,$$

dove con  $|1\rangle$  si indica lo stato di una coppia che si trova nel primo superconduttore e  $|2\rangle$  quello di una coppia che si trova nel secondo. L'Hamiltoniano che descrive il sistema a due livelli è:

$$H_{\text{osc}} = \sum_{i,j=1}^2 H_{i,j} |i\rangle \langle j| \quad , \quad (3.1)$$

con

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & K \\ K^* & E_2 \end{pmatrix} \quad , \quad (3.2)$$

dove  $E_i$  sono le energie a cui i due stati  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  si trovano e  $K$  è una costante legata all'oscillazione delle coppie di Cooper da un materiale all'altro;  $K$  è reale se non vi è alcun potenziale vettore nella giunzione, mentre, se ci fosse, avrebbe la forma:  $K_{\vec{A}} = K_0 e^{(iq\vec{A}/\hbar c) \cdot \Delta\vec{x}}$ . Si considera inizialmente la sola presenza di una d.d.p. tra le superfici dei superconduttori e, quindi,  $K$  è reale. Se i due materiali sono identici, risulterà che  $E_1 - E_2 = qV$ , con  $V$  differenza di potenziale erogata dal generatore. Prendendo per convenienza lo zero dell'energia a metà tra di essi si può scrivere:  $E_{1/2} = \pm qV/2$ , con  $q = 2e$  carica elettrica della coppia di Cooper. L'equazione di Schrödinger per l'Hamiltoniano (3.1) è:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = -\frac{i}{\hbar} \begin{pmatrix} eV & K \\ K & -eV \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad . \quad (3.3)$$

Queste equazioni, valide nel caso della giunzione, sono, in realtà, le equazioni standard per due sistemi quantistici associati.

Si utilizza come forma per le funzioni  $\psi$ , quelle relative alle coppie di Cooper [Eq. (2.9)]:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \sqrt{\rho_1} e^{i\theta_1} \quad , \\ \psi_2 &= \sqrt{\rho_2} e^{i\theta_2} \quad . \end{aligned}$$

In questo modo l'Eq. (3.3) dà come risultato:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar}{i} \frac{1}{2\sqrt{\rho_1}} \dot{\rho}_1 + \hbar \dot{\theta}_1 \sqrt{\rho_1} &= +eV \sqrt{\rho_1} + K \sqrt{\rho_2} e^{i(\theta_2 - \theta_1)} \quad , \\ -\frac{\hbar}{i} \frac{1}{2\sqrt{\rho_2}} \dot{\rho}_2 + \hbar \dot{\theta}_2 \sqrt{\rho_2} &= -eV \sqrt{\rho_2} + K \sqrt{\rho_1} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad . \end{aligned}$$

Uguagliando la parte reale e quella immaginaria si ottiene:

$$\dot{\rho}_1 = +\frac{2}{\hbar}K\sqrt{\rho_1\rho_2}\sin\delta, \quad (3.4)$$

$$\dot{\rho}_2 = -\frac{2}{\hbar}K\sqrt{\rho_1\rho_2}\sin\delta, \quad (3.5)$$

$$\dot{\theta}_1 = +\frac{K}{\hbar}\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}\cos\delta - \frac{eV}{\hbar}, \quad (3.6)$$

$$\dot{\theta}_2 = +\frac{K}{\hbar}\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\cos\delta - \frac{eV}{\hbar}, \quad (3.7)$$

$$\text{con } \delta = \theta_2 - \theta_1. \quad (3.8)$$

Si può affermare che  $\rho_1$  e  $\rho_2$  sono sostanzialmente uguali a  $\rho_0$ , la normale densità di elettroni nel materiale superconduttore, in quanto la variazione del numero di coppie di Cooper nei due materiali è piccola confrontata con il numero delle coppie stesse. Questo è giustificato dalla bassa probabilità di effetto tunnel e dal collegamento dei superconduttori attraverso il generatore, che tende a mantenere un equilibrio di cariche.

Le prime due equazioni mostrano come sarebbero  $\dot{\rho}_1$  e  $\dot{\rho}_2$  se non ci fosse una forza elettrica aggiuntiva dovuta allo sbilanciamento tra gli elettroni e gli ioni positivi fissi. Per tale motivo, esse descrivono i primi istanti, in cui ioni e elettroni sono ancora bilanciati. Iniziata la conduzione, grazie alla connessione dei due superconduttori attraverso il generatore, la corrente non produrrà nessun eccesso di carica (quindi non ci sarà nessuna variazione di  $\rho_1$  e  $\rho_2$ ) e scorrerà mantenendo il potenziale costante.

Utilizzando l'equazione di conservazione della carica, si determina la corrente:

$$I = \int_{\mathcal{V}} \dot{\rho}_1 d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{2}{\hbar}K\rho_0\sin\delta d\mathcal{V}, \quad (3.9)$$

con  $\mathcal{V}$  volume nel quale avviene la variazione di carica.

La corrente che scorre nella giunzione è pertanto dipendente da  $\sin\delta$ . Ponendoci nel caso di giunzione rettangolare di lunghezza  $L$  e ipotizzando inizialmente che  $\delta$  non dipenda dal punto di attraversamento della barriera, si può integrare l'Eq. (3.9), ottenendo:

$$I = I_C \sin\delta, \quad (3.10)$$

con la costante

$$I_C = \int_{\mathcal{V}} \frac{2}{\hbar}K\rho_0 d\mathcal{V},$$

detta corrente critica.

Le Eq. (3.6), (3.7) e (3.8) possono essere combinate nel modo seguente

$$\dot{\delta} = \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 = \frac{2eV}{\hbar}$$

e, integrando, si ottiene:

$$\delta(t) = \delta_0 + \frac{q}{\hbar} \int V(t) dt , \quad (3.11)$$

dove  $\delta_0$  è il valore di  $\delta$  all'istante  $t = 0$  e  $q = 2e$ .

Dalle equazioni ottenute possiamo trarre le seguenti conclusioni: utilizzando un generatore in *corrente continua*, l'argomento del seno diviene  $\delta_0 + \frac{q}{\hbar} V t$  e, siccome  $\hbar$  è piccolo rispetto alla usuale scala dei tempi e alle usuali d.d.p., il seno in Eq. (3.10) oscilla tanto rapidamente da produrre una corrente effettiva nulla (trascurando quella prodotta dagli elettroni non accoppiati). Se, invece, non si ha alcuna differenza di potenziale si può registrare una corrente che attraversa la giunzione, la cui intensità dipende da  $\delta_0$ .

Si può inoltre ottenere una corrente applicando una differenza di potenziale ad *alta frequenza* che cavalca un segnale in continua:

$$V = V_0 + v \cos \omega t ,$$

con  $v \ll V_0$ . In questo caso, allora, si avrà:

$$\delta(t) = \delta_0 + \frac{q}{\hbar} V_0 t + \frac{q v}{\hbar \omega} \sin \omega t .$$

Usando l'approssimazione  $\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \Delta x \cos x$  per il  $\sin \delta$ , si ottiene:

$$\sin \delta = \sin \left( \delta_0 + \frac{q}{\hbar} V_0 t \right) + \frac{q v}{\hbar \omega} \cos \left( \delta_0 + \frac{q}{\hbar} V_0 t \right) .$$

Sostituendo tale espressione nell'Eq. (3.10), si ha:

$$I = I_C \left[ \sin \left( \delta_0 + \frac{q}{\hbar} V_0 t \right) + \frac{q v}{\hbar \omega} \sin \omega t \cos \left( \delta_0 + \frac{q}{\hbar} V_0 t \right) \right] . \quad (3.12)$$

Il primo termine è zero in media, ma il secondo non lo è se si verifica la condizione che:

$$\omega = \frac{q}{\hbar} V_0 ; \quad (3.13)$$

infatti, sviluppando il secondo termine si ottiene:

$$\sin \omega t \cos \left( \delta_0 + \frac{q}{\hbar} V_0 t \right) = \frac{1}{2} \left[ \sin \left( \omega t + \delta_0 + \frac{q}{\hbar} V_0 t \right) + \sin \left( \omega t - \delta_0 - \frac{q}{\hbar} V_0 t \right) \right] ; \quad (3.14)$$

affinchè il seno non sia zero in media, bisogna eliminare la dipendenza temporale e ciò è possibile se e solo se si verifica l'Eq. (3.13). Con tale valore di frequenza si ottiene dall'Eq. (3.14)  $\sin(\delta_0)$ , di valore non nullo in media. Pertanto possibile osservare attraverso la giunzione una corrente:

$$I = I_C \frac{v}{V_0} \sin(\delta_0) .$$

### 3.2 Dipendenza della corrente di giunzione dal campo magnetico

Spesso si preferisce considerare il campo magnetico e il potenziale vettore,  $\vec{A}$ , presente nella giunzione. Ci si pone nell'ipotesi di campo magnetico uniforme diretto lungo l'asse  $z$  e si prende in esame l'Eq. (2.11), dalla quale è possibile ricavare che:

$$\frac{1}{\hbar} \int_1^2 \left( m\vec{v} + \frac{q}{c}\vec{A} \right) \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{\nabla}\theta \cdot d\vec{l} - \delta_g = \delta - \delta_g ,$$

con  $\delta_g$  costante di integrazione.

Trascurando  $\vec{v}$  in quanto siamo in presenza di elettroni che attraversano una barriera di potenziale per effetto tunnel:

$$\delta = \frac{q}{c\hbar} \int_1^2 \vec{A} \cdot d\vec{l} + \delta_g ; \quad (3.15)$$

sostituendo l'Eq. (3.15) nell'Eq. (3.10), si ottiene:

$$I = I_C \sin \left( \frac{q}{c\hbar} \int_1^2 \vec{A} \cdot d\vec{l} + \delta_g \right) . \quad (3.16)$$

Nell'Eq. (3.16) si è però trascurato il fatto che, in presenza di un potenziale vettore nella giunzione,  $\delta$  dipende dalla posizione in cui si attraversa la barriera. Nel prosieguo della sezione, pertanto, si procederà ad analizzare la dipendenza di  $\delta$  dal punto di attraversamento lungo l'asse  $x$ .

Considerando il percorso in Figura 3.2, si può scrivere che:

$$\frac{q}{\hbar c} \oint_{\text{ABCD}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{\hbar c} \Phi(\vec{B}) , \quad (3.17)$$

con  $\Phi(\vec{B})$  flusso del campo magnetico attraverso una superficie che abbia come contorno il percorso ABCD.

Sviluppando l'integrale sul percorso si ha:

$$\frac{q}{\hbar c} \oint_{\text{ABCD}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{\hbar c} \left[ \int_{\text{AB}} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_{\text{CD}} \vec{A} \cdot d\vec{l} \right] ,$$

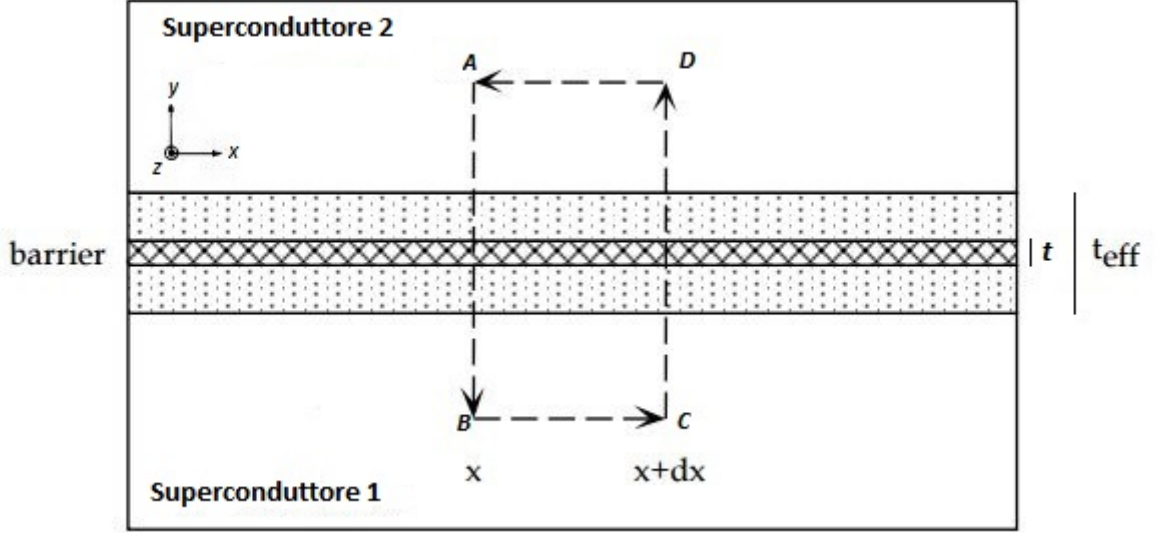
dove si sono trascurati i percorsi BC e AD poichè infinitesimali. Utilizzando l'Eq. (3.15) per i due integrali, si ottiene:

$$\frac{q}{\hbar c} \left[ \int_{\text{AB}} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_{\text{CD}} \vec{A} \cdot d\vec{l} \right] = \delta(x+dx) - \delta(x) .$$

Allora, sostituendo il valore trovato per l'integrale di  $\vec{A}$  lungo il percorso ABCD, risulta che:

$$\delta(x+dx) - \delta(x) = \frac{q}{\hbar c} \Phi(\vec{B}) = \frac{q}{\hbar c} B t_{\text{eff}} dx , \quad (3.18)$$



Figura 3.2: Percorso utilizzato per calcolare  $\partial\delta/\partial x$ 

con  $t_{\text{eff}} = t + 2\lambda_L$  lo spessore effettivo lungo l'asse  $y$ , entro cui è possibile trovare campo magnetico non nullo;  $t$  è lo spessore della barriera,  $\lambda_L$  è la profondità di penetrazione di London (spessore entro il quale il campo magnetico riesce a penetrare nel materiale superconduttore) e  $B$  il campo magnetico presente nella giunzione (si è sotto l'ipotesi di campo magnetico uniforme nella giunzione, giustificata dal fatto che essa è di piccole dimensioni).

Dall'Eq. (3.18), si può affermare che:

$$\frac{\partial\delta}{\partial x} = \frac{q}{\hbar c} B t_{\text{eff}} . \quad (3.19)$$

Integrando l'Eq. (3.19) si ottiene:

$$\delta(x) = \frac{q}{\hbar c} B t_{\text{eff}} x + \delta(0) , \quad (3.20)$$

con  $\delta(0)$  costante di integrazione.

Sostituendo l'Eq. (3.20) nell'Eq. (3.9) si ottiene per la corrente:

$$I = \int_V \frac{2}{\hbar} K \rho_0 \sin\left(\frac{q}{\hbar c} B t_{\text{eff}} x + \delta(0)\right) dV . \quad (3.21)$$

Integrando quest'ultima, sempre considerando il caso semplificato di giunzione rettangolare di lunghezza  $L$  lungo l'asse  $x$ , si ha come risultato:

$$\begin{aligned} I &= \frac{I_C}{L} \frac{\hbar c}{q B t_{\text{eff}}} \left[ \cos \left( -\frac{q}{\hbar c} B t_{\text{eff}} \frac{L}{2} + \delta(0) \right) - \cos \left( \frac{q}{\hbar c} B t_{\text{eff}} \frac{L}{2} + \delta(0) \right) \right] \\ &= I_C \sin(\delta(0)) \frac{\sin \left( \frac{q}{\hbar c} B t_{\text{eff}} \frac{L}{2} \right)}{\frac{q}{\hbar c} B t_{\text{eff}} \frac{L}{2}} \\ &= I_C \frac{\sin \left( \frac{\pi \Phi}{\Phi_0} \right)}{\frac{\pi \Phi}{\Phi_0}} \sin(\delta(0)) \quad , \end{aligned}$$

dove lungo  $x$  è stato eseguito un integrale da  $-L/2$  a  $L/2$ , avendo preso l'origine dell'asse coincidente con il punto medio della giunzione e con

$$\Phi = B t_{\text{eff}} L \quad \text{e} \quad \Phi_0 = \hbar \pi c / e \quad ,$$

quanto del campo magnetico, con  $e$  carica elementare.

Si vuole ora considerare il massimo della corrente raggiungibile in dipendenza di  $\Phi$ , flusso del campo magnetico attraverso la giunzione. Si otterrà  $I_{\text{max}}$  in corrispondenza di  $\delta(0) = \pm \frac{\pi}{2}$ , pertanto facendo tale assunzione:

$$I_{\text{max}} = I_C \left| \frac{\sin \left( \frac{q}{\hbar c} B t_{\text{eff}} \frac{L}{2} \right)}{\frac{q}{\hbar c} B t_{\text{eff}} \frac{L}{2}} \right| = I_C \left| \frac{\sin \left( \frac{\pi \Phi}{\Phi_0} \right)}{\frac{\pi \Phi}{\Phi_0}} \right| . \quad (3.22)$$

La Figura 3.3 è la rappresentazione grafica dell'Eq. (3.22). Essa è simile alla distribuzione dell'intensità luminosa in presenza di diffrazione da singola fenditura: vi è, allora, una sorta di correlazione tra la corrente in una giunzione di Josephson e la diffrazione. Tale correlazione continua a sussistere anche nel caso si considerino due giunzioni poste in parallelo.

### 3.3 Interferenza tra due giunzioni di Josephson

Si può ora trattare, come si era anticipato in precedenza, il caso di interferenza tra due giunzioni poste in parallelo, meccanismo su cui si basano gli SQUID. Consideriamo pertanto un dispositivo come in Figura 3.4. È possibile utilizzarlo per analizzare l'interferenza tra due giunzioni causata dalla differenza di fase di arrivo delle correnti attraverso i due differenti cammini.

In figura sono mostrate due giunzioni connesse in parallelo. Le terminazioni, P e Q, sono collegate a degli strumenti che misurano un qualsiasi passaggio di corrente. La corrente totale  $I_T$  sarà la somma delle correnti attraverso le due giunzioni; si definiscono  $I_a$  e  $I_b$  le correnti attraverso le due giunzioni e  $\delta_a$  e  $\delta_b$  le corrispettive fasi.

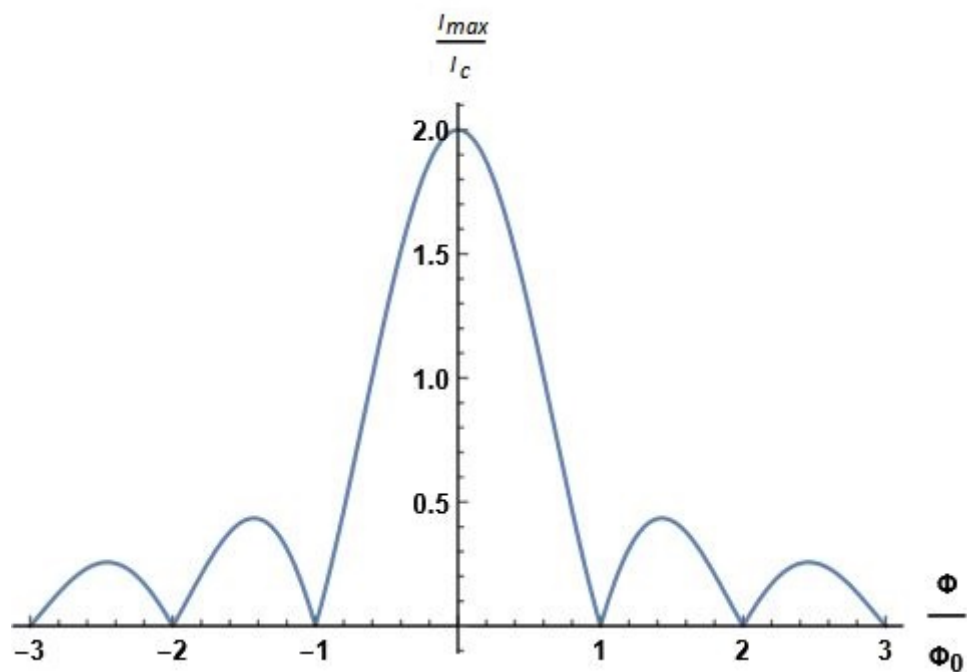
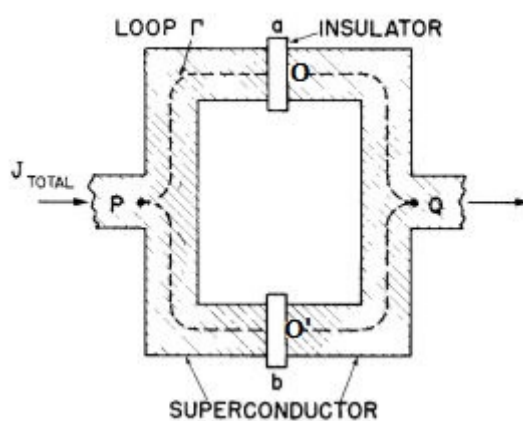
Figura 3.3: Variazione reale della corrente massima  $I_{Max}$ 

Figura 3.4: Due giunzioni di Josephson in parallelo

La differenza di fase tra P e Q, indicata con  $\Delta\phi_{P\rightarrow Q}$ , deve essere la stessa indipendentemente dalla giunzione che si decide di percorrere. Considerando un percorso  $\Gamma'$ , della stessa forma del percorso  $\Gamma$ , che attraversa i punti medi  $O$  e  $O'$  delle giunzioni, rispettivamente,  $a$  e  $b$ , in Figura 3.4, si può scrivere, utilizzando l'Eq. (3.15) precedentemente ricavata nel caso di singola giunzione, che:

$$\Delta\phi_{P\rightarrow Q} = \frac{q}{c\hbar} \int_{\text{sup}} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \delta_a ; \quad (3.23)$$

$$\Delta\phi_{P\rightarrow Q} = \frac{q}{c\hbar} \int_{\text{inf}} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \delta_b , \quad (3.24)$$

con  $\delta_a$  e  $\delta_b$  costanti.

Da tali equazioni è evidente che le quantità al secondo membro devono essere uguali. Pertanto, sottraendo membro a membro le due equazioni si ottiene:

$$\delta_b - \delta_a = \frac{q}{c\hbar} \oint_{\Gamma'} \vec{A} \cdot d\vec{l} .$$

L'integrale lungo  $\Gamma'$  di  $\vec{A}$  è il flusso  $\Phi$  del campo magnetico attraverso una superficie che abbia come contorno il percorso considerato.

Il flusso, come anche il potenziale vettore, variano a seconda dei punti in cui si attraversano le barriere  $a$  e  $b$ . Indicato con  $x$  la distanza del punto di attraversamento della barriera  $a$  da  $O$  e con  $x'$  quella della barriera  $b$  da  $O'$ , si ha che:

$$\delta_b - \delta_a = \frac{q}{\hbar c} \Phi(x, x') . \quad (3.25)$$

Si può controllare questa differenza di fase variando il campo magnetico che attraversa il circuito.

Per semplificare i calcoli si sceglie di prendere in considerazione i contributi dalle giunzioni  $a$  e  $b$  con  $x' = -x$ , di modo tale che  $\Phi$  dipenderà solo da una variabile.

Per convenienza si pone:

$$\delta_a = \delta_0 - \frac{q}{2c\hbar} \Phi(x) , \quad \delta_b = \delta_0 + \frac{q}{2c\hbar} \Phi(x) ,$$

con  $\delta_0$  costante.

Sostituendo tali valori nell'Eq. (3.9) si ottiene:

$$I_a = \int_{V'} \frac{2}{\hbar} K \rho_0 \sin \left( \delta_0 - \frac{q}{2c\hbar} \Phi(x) \right) dV ;$$

$$I_b = \int_V \frac{2}{\hbar} K \rho_0 \sin \left( \delta_0 + \frac{q}{2c\hbar} \Phi(x) \right) dV .$$

Svolgendo gli integrali in  $dydz$ , ponendoci sempre nella condizione di giunzione rettangolare di lunghezza  $L$  lungo l'asse  $x$ , si ha:

$$I_a = \frac{I_C}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \sin\left(\delta_0 - \frac{q}{2c\hbar}\Phi(x)\right) dx ; \quad (3.26)$$

$$I_b = \frac{I_C}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \sin\left(\delta_0 + \frac{q}{2c\hbar}\Phi(x)\right) dx , \quad (3.27)$$

dove lungo  $x$  è stato eseguito un integrale da  $-L/2$  a  $L/2$ , avendo preso l'origine dell'asse coincidente con il punto medio della giunzione. La corrente totale che scorre nel circuito è la somma di  $I_a$  e  $I_b$ :

$$\begin{aligned} I_T &= \frac{I_C}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \left[ \sin\left(\delta_0 - \frac{q}{2c\hbar}\Phi(x)\right) + \sin\left(\delta_0 + \frac{q}{2c\hbar}\Phi(x)\right) \right] dx \\ &= 2\frac{I_C}{L} \sin(\delta_0) \int_{-L/2}^{L/2} \cos\left(\frac{q}{2c\hbar}\Phi(x)\right) dx \\ &= 2\frac{I_C}{L} \sin(\delta_0) \int_{-L/2}^{L/2} \cos\left[\frac{q}{2c\hbar}(\Phi_I + 2Bt_{\text{eff}}x)\right] dx \\ &= 2\frac{I_C}{L} \sin(\delta_0) \frac{2c\hbar}{qBt_{\text{eff}}} \left\{ \sin\left[\frac{q}{2c\hbar}(\Phi_I + \Phi_G)\right] - \sin\left[\frac{q}{2c\hbar}(\Phi_I - \Phi_G)\right] \right\} , \end{aligned}$$

con  $\Phi_I$  flusso del campo magnetico interno al circuito elettrico formato dai due superconduttori di Figura 3.4,  $\Phi_G = Bt_{\text{eff}}L$  flusso del campo magnetico attraverso una giunzione (assumendo che le giunzioni siano identiche e che il campo magnetico sia costante nella giunzione, come già avvenuto nella precedente sezione).

Applicando le formule di addizione e sottrazione del seno, risulta che:

$$I_T = 4\frac{I_C}{L} \sin(\delta_0) \frac{2c\hbar}{qBt_{\text{eff}}} \sin\left(\frac{q}{2c\hbar}\Phi_G\right) \cos\left(\frac{q}{2c\hbar}\Phi_I\right) = 4I_C \sin(\delta_0) \cos\left(\frac{\pi\Phi_I}{\Phi_0}\right) \frac{\sin\left(\frac{\pi\Phi_G}{\Phi_0}\right)}{\frac{\pi\Phi_G}{\Phi_0}} . \quad (3.28)$$

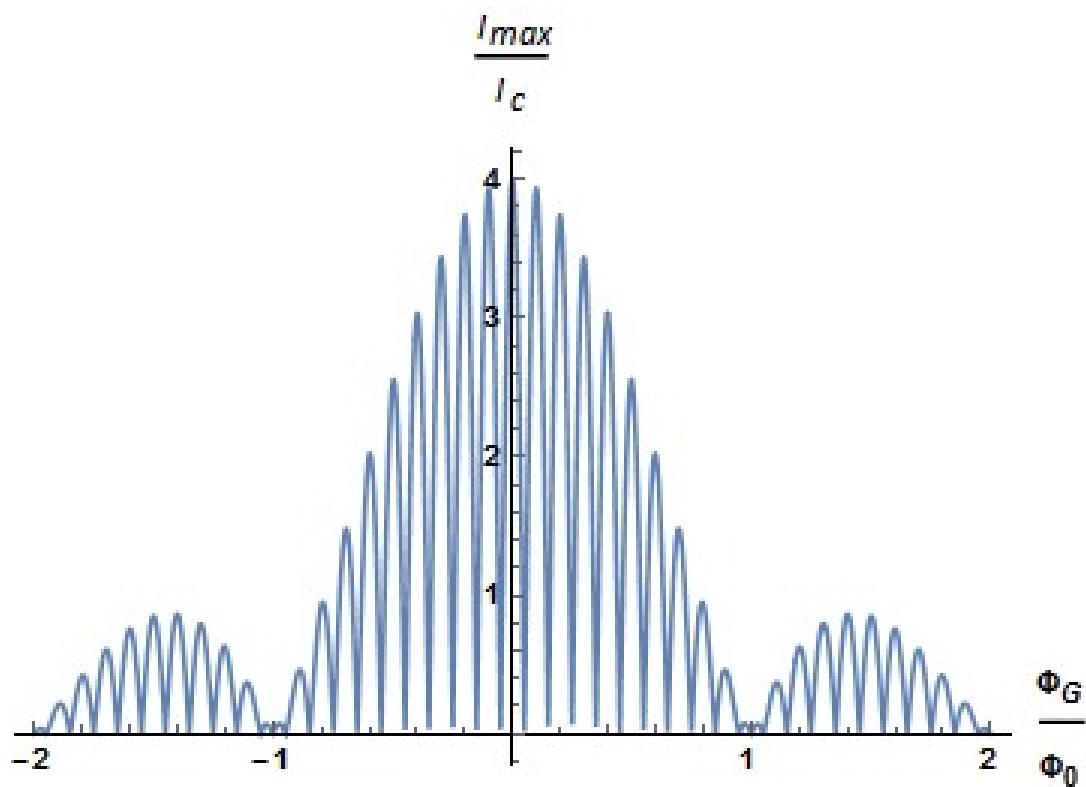
Non conosciamo nulla riguardo il valore di  $\delta_0$ . Supponendo che esso non dipenda dal flusso del campo magnetico, la massima corrente osservabile per ogni dato  $\Phi$  sarà:

$$I_{\text{max}} = 4I_C \left| \cos\left(\frac{\pi\Phi_I}{\Phi_0}\right) \frac{\sin\left(\frac{\pi\Phi_G}{\Phi_0}\right)}{\frac{\pi\Phi_G}{\Phi_0}} \right| . \quad (3.29)$$

essa, a sua volta, varia con  $\Phi_I$  e avrà un massimo in corrispondenza di:

$$\Phi_I = n\Phi_0 = n \frac{c\pi\hbar}{e} ,$$

con  $n$  numero intero. La corrente, quindi, assume valori massimi in corrispondenza di quei valori che erano stati trovati come valori della quantizzazione del flusso nell'effetto Meissner.

Figura 3.5:  $I_{max}$  nel caso di due giunzioni in parallelo

Ipotizzando che  $\Phi_I$  e  $\Phi_G$  siano in un rapporto di 1:10, si ottiene il grafico in Figura 3.5.

Come si può notare, tale apparato è estremamente sensibile alla variazione del flusso del campo magnetico. Un dispositivo di questo genere prende il nome di SQUID (Superconducting QUantum Interference Device) ed è il più sensibile magnetometro di cui si dispone attualmente, in quanto, come è possibile evincere dalla Figura 3.5, piccole variazioni nel flusso creano grandi variazioni nella corrente massima.

Sono stati trascurati altri fattori nell'analisi delle giunzioni, come ad esempio l'induttanza, ma l'andamento della  $I_{\max}$  in funzione del campo magnetico resta pur sempre legato al termine  $\cos(\pi\Phi_I/\Phi_0)$  ed è possibile, con una giunzione che racchiude un'area di  $1 \text{ mm}^2$ , misurare un campo magnetico con una precisione dell'ordine di  $10^{-7} \text{ G}$ , grazie all'andamento dei massimi della curva di  $I_{\max}$ .

# Capitolo 4

## La teoria BCS

In questo ultimo capitolo si tratterà la teoria BCS (dalle iniziali dei suoi ideatori: Bardeen, Cooper e Schrieffer) che fornisce un modello microscopico della formazione delle coppie di Cooper nella superconduttività del *Tipo I*. Se ne darà una trattazione semplificata considerando solo il caso a temperatura pari a 0 K.

Si inizierà definendo l'Hamiltoniano del sistema, che descrive la formazione delle coppie di Cooper (Sezione 4.1), per poi calcolare lo stato fondamentale (Sezione 4.2) e il primo stato eccitato (Sezione 4.3), grazie ai quali sarà possibile spiegare la superconduttività.

La seguente trattazione si basa sulle referenze [3–6].

### 4.1 Formulazione dell'Hamiltoniano per descrivere il sistema

In questa sezione si definirà l'Hamiltoniano di interazione tra elettroni, che porta alla formazione delle coppie di Cooper. Per arrivare ad una formulazione matematica del modello, è necessario fare alcune considerazioni preliminari:

- le energie in gioco nella superconduttività sono dell'ordine di  $10^{-3}$  eV, minori delle energie tipiche di interazione Coulombiana per gli elettroni. Tale interazione pertanto può essere trascurata se si vuole solo spiegare il fenomeno della superconduttività. A causa della sua alta energia, infatti, non può essere causa dell'effetto in questione;
- se si cambia l'isotopo di cui il materiale è composto, la temperatura critica  $T_c$ , sotto la quale avviene la superconduttività, varia, mentre le interazioni spin-spin e spin-orbita non cambiano. Per tale motivo anche queste interazioni possono essere trascurate nella spiegazione del fenomeno;
- la velocità del suono dipende dalla massa degli atomi.



Il processo descritto nella teoria BCS è il seguente: un elettrone interagisce con le vibrazioni del reticolo polarizzandolo e con quest'ultimo interagisce un secondo elettrone. Tale processo, tuttavia, non è istantaneo, per cui i due elettroni coinvolti si accoppiano solo quando sono molto lontani: in questo modo la repulsione coulombiana tra di loro è piccola (si veda l'Appendice A). Sul modello dell'elettrodinamica quantistica, in cui l'interazione elettromagnetica è mediata da un fotone, si può definire il fonone come il quanto di vibrazione del reticolo, che si propaga alla velocità del suono nel mezzo.

L'interazione indiretta tra gli elettroni descritta precedentemente può essere schematizzata, pertanto, come un'interazione fra elettroni liberi (in quanto gli interessati sono gli elettroni vicini al livello di Fermi) mediata da fononi virtuali. Tale interazione risulterà attrattiva, a corto raggio, e di debole intensità (in quanto l'energia attrattiva è dell'ordine di  $10^{-3}$  eV). Gli elettroni che subiscono questa attrazione, come già affermato, sono solo quelli le cui energie sono vicine all'energia di Fermi ( $\epsilon_F$ ). Dal momento che il sistema è debolmente interagente e allo zero assoluto, esso sarà caratterizzato dal quasi completo riempimento dei livelli energetici fino alla superficie di Fermi. Siccome l'interazione non può fornire alle particelle grandi quantità di impulso (si è già affermato che è un'interazione debole), le particelle che si trovano lontane dalla superficie di Fermi non interagiscono, in quanto tutti gli stati energetici finali risultano occupati e ciò preclude un loro salto energetico a causa del Principio di Esclusione di Pauli. Da questo segue che le energie degli elettroni interagenti sono vicine all'energia di Fermi entro un intervallo di energia  $\Delta\epsilon \approx \hbar\omega_D$ , con  $\omega_D$  frequenza di Debye, cioè la frequenza massima che può essere assunta da un fonone nel modello di Debye per la capacità termica dei solidi.

Per descrivere il sistema elettroni-fononi nel reticolo si può, pertanto, ipotizzare il seguente Hamiltoniano:

$$H = \sum_{\vec{k}} \epsilon_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} C_{\vec{k}}^{\dagger} C_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} M_{\vec{k}, \vec{k}'} C_{\vec{k}' - \vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} M_{\vec{k}, \vec{k}'}^* C_{\vec{k}' - \vec{k}} a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}'} , \quad (4.1)$$

dove  $a_{\vec{k}}^{\dagger}$  è l'operatore di creazione di un elettrone,  $C_{\vec{k}}^{\dagger}$  quello relativo al fonone,  $\epsilon_{\vec{k}}$  è l'energia di un elettrone libero di momento  $\vec{k}$ ,  $\omega_{\vec{k}}$  l'energia di un fonone libero (adoperando la convenzione per cui  $\hbar = c = 1$ ) e  $M_{\vec{k}, \vec{k}'}$  è l'elemento della matrice di interazione tra elettrone e fonone. Gli operatori  $a_{\vec{k}}$  e  $C_{\vec{k}}$  seguono le leggi di commutazione canoniche.

Gli ultimi due termini pertanto rappresentano l'interazione tra fononi e elettroni, mentre i primi due rappresentano le energie degli elettroni e dei fononi non interagenti.

Per discutere dell'interazione indiretta elettrone-elettrone si considera il diagramma in Figura 4.1 (a) in cui due elettroni di momento  $\vec{k}_1$  e  $\vec{k}_2$  interagiscono scambiando un fonone virtuale. Questo processo causa la variazione dei momenti di entrambi in  $\vec{k}_1'$  e  $\vec{k}_2'$ . L'interazione

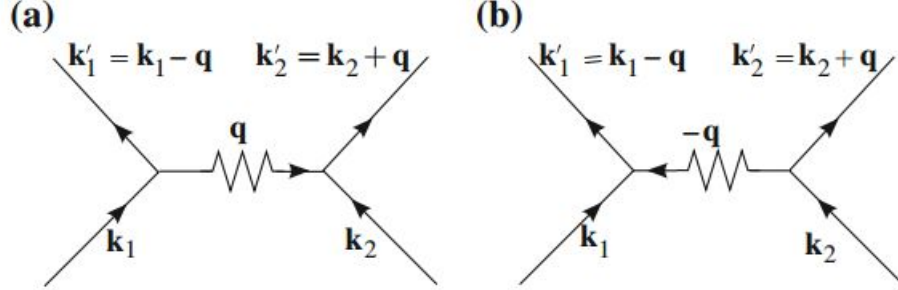


Figura 4.1: Schemi di interazione elettrone-elettrone. Nel processo (a) l'elettrone di momento  $\vec{k}_1$  emette un fonone di impulso  $\vec{q}$ , che è assorbito dall'elettrone  $\vec{k}_2$ . Nel processo (b) l'elettrone di momento  $\vec{k}_2$  emette un fonone di impulso  $\vec{q}$ , che è assorbito dall'elettrone  $\vec{k}_1$ .

elettrone-elettrone è un'interazione indiretta del secondo ordine in  $M_{\vec{k},\vec{k}'}$ , mediata da uno scambio di fotoni virtuali; pertanto può essere descritta utilizzando la teoria perturbativa con l'Hamiltoniano dell'Eq. (4.1). Dalla Figura 4.1 (a) si ottiene

$$\begin{aligned} \vec{k}'_1 - \vec{k}_1 &= \vec{q} , \\ \vec{k}_2 - \vec{k}'_2 &= \vec{q} , \end{aligned}$$

dove  $\vec{q}$  è l'impulso del fonone. Utilizzando la teoria perturbativa considerando come Hamiltoniano imperturbato  $H_0 = \sum_{\vec{k}} \epsilon_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} C_{\vec{k}}^+ C_{\vec{k}}$ , la variazione al second'ordine dei livelli energetici è data dall'Eq. (D.4) in Appendice D:

$$\langle f | H_{\text{indiretta}} | i \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \langle f | H_1 | \alpha \rangle \langle \alpha | H_1 | i \rangle \left[ \frac{1}{\epsilon_i - \epsilon_{\alpha}} + \frac{1}{\epsilon_f - \epsilon_{\alpha}} \right] , \quad (4.2)$$

Si considera, per il processo in Figura 4.1 (a), i seguenti autostati di  $H_0$  e i rispettivi autovalori:

$$\begin{aligned} |i\rangle &= \left| \vec{k}_1, \vec{k}_2, 0 \right\rangle & \epsilon_i &= \epsilon_{\vec{k}_1} + \epsilon_{\vec{k}_2} , \\ |\alpha\rangle &= \left| \vec{k}'_1, \vec{k}_2, 1 \right\rangle & \epsilon_{\alpha} &= \epsilon_{\vec{k}'_1} + \epsilon_{\vec{k}_2} + \hbar\omega_{\vec{q}} , \\ |f\rangle &= \left| \vec{k}'_1, \vec{k}'_2, 0 \right\rangle & \epsilon_f &= \epsilon_{\vec{k}'_1} + \epsilon_{\vec{k}'_2} , \end{aligned} \quad (4.3)$$

in cui la presenza o l'assenza di un fonone è espressa dalla terza componente, come rispettivamente 1 o 0. Utilizzando come  $H_1$  il terzo e quarto termine dell'Hamiltoniano in Eq. (4.1) per il processo in Figura 4.1 (a), e indicando con  $M_{\vec{k}',\vec{k}}$  e  $M_{\vec{k}',\vec{k}}^*$  gli elementi di matrice per rispettivamente l'emissione e l'assorbimento di un fonone, si ottiene che la perturbazione è

pari a:

$$\langle f | H_{\text{indiretta}} | i \rangle = \frac{1}{2} M_{\vec{k}_2, \vec{k}_2}^{\vec{j}} M_{\vec{k}_1, \vec{k}_1}^{*\vec{j}} \left[ \frac{1}{\epsilon_{\vec{k}_1}^{\vec{j}} - \epsilon_{\vec{k}_1}^{\vec{j}} - \hbar\omega_{\vec{q}}} + \frac{1}{\epsilon_{\vec{k}_2}^{\vec{j}} - \epsilon_{\vec{k}_2}^{\vec{j}} - \hbar\omega_{\vec{q}}} \right]. \quad (4.4)$$

La Figura 4.1 (b) mostra un meccanismo simile a quello in Figura 4.1 (a), la cui perturbazione al livello energetico ottenuta seguendo un procedimento simile al precedente va sommata a quella precedentemente ottenuta. Si ottiene che la perturbazione totale è pari a:

$$V_{\vec{k}_1, \vec{k}_2; \vec{k}_1, \vec{k}_2}^{\vec{j}} = \langle f | H_{\text{indiretta}} | i \rangle = \frac{1}{2} \left[ M_{\vec{k}_2, \vec{k}_2}^{\vec{j}} M_{\vec{k}_1, \vec{k}_1}^{*\vec{j}} \left( \frac{1}{\epsilon_{\vec{k}_1}^{\vec{j}} - \epsilon_{\vec{k}_1}^{\vec{j}} - \hbar\omega_{\vec{q}}} + \frac{1}{\epsilon_{\vec{k}_2}^{\vec{j}} - \epsilon_{\vec{k}_2}^{\vec{j}} - \hbar\omega_{\vec{q}}} \right) + M_{\vec{k}_2, \vec{k}_2}^{*\vec{j}} M_{\vec{k}_1, \vec{k}_1}^{\vec{j}} \left( \frac{1}{\epsilon_{\vec{k}_2}^{\vec{j}} - \epsilon_{\vec{k}_2}^{\vec{j}} - \hbar\omega_{\vec{q}}} + \frac{1}{\epsilon_{\vec{k}_1}^{\vec{j}} - \epsilon_{\vec{k}_1}^{\vec{j}} - \hbar\omega_{\vec{q}}} \right) \right].$$

Tenendo conto che il fenomeno riguarda gli elettroni vicino al livello di Fermi e che, quindi, essi hanno la stessa energia  $\epsilon$ , è pari a:

$$V_{\vec{k}_1, \vec{k}_2; \vec{k}_1, \vec{k}_2}^{\vec{j}} \approx -\frac{1}{\hbar\omega_{\vec{q}}} \left( M_{\vec{k}_2, \vec{k}_2}^{\vec{j}} M_{\vec{k}_1, \vec{k}_1}^{*\vec{j}} + M_{\vec{k}_1, \vec{k}_1}^{\vec{j}} M_{\vec{k}_2, \vec{k}_2}^{*\vec{j}} \right). \quad (4.5)$$

Se gli elementi di matrice  $M$  sono approssimativamente uguali, il termine perturbativo è negativo e questo indica che gli elettroni vicini al livello di Fermi risentono di una forza attrattiva.

Tutti i risultati esposti possono essere sintetizzati scrivendo un nuovo Hamiltoniano per i soli elettroni eliminando i gradi di libertà fononici; i fononi hanno l'effetto di modificare le energie  $\epsilon_{\vec{k}}$  e l'interazione tra gli elettroni, rendendola sotto certe circostanze attrattiva. D'ora in avanti si considererà un Hamiltoniano del tipo:

$$H = \sum_{\vec{k}} \epsilon_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2; \vec{k}_1, \vec{k}_2} V_{\vec{k}_1, \vec{k}_2; \vec{k}_1, \vec{k}_2} a_{\vec{k}_1}^{\dagger} a_{\vec{k}_2}^{\dagger} a_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}_2}. \quad (4.6)$$

Tale Hamiltoniano modella il processo di interazione al secondo ordine tra elettroni.

## 4.2 Stato fondamentale

In questa sezione si procederà a trovare lo stato fondamentale di minima energia per il sistema descritto dall'Hamiltoniano dell'Eq. (4.6). Il teorema dimostrato in Appendice C afferma che avendo un Hamiltoniano del tipo  $H = H_0 + U$  e con un set di stati  $\psi_i$ , per cui gli  $U_{ij} = \langle \psi_i | U | \psi_j \rangle$  siano tutti uguali e negativi e le  $E_i = \langle \psi_i | H_0 | \psi_i \rangle$  tutte uguali, allora è sicuramente possibile trovare uno stato  $\psi$  che minimizzi l'energia.

Applicando questo teorema, si considera per gli elementi di matrice  $U_{ij}$ :

$$\langle \vec{k}_{\alpha}, \vec{k}_{\beta}, \dots, \vec{k}_1^{\dagger}, \vec{k}_2^{\dagger} | V | \vec{k}_{\alpha}, \vec{k}_{\beta}, \dots, \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle,$$

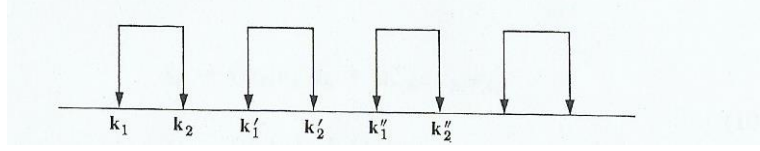


Figura 4.2: disposizione delle coppie di Cooper nello spazio degli stati  $\vec{k}$ .

dove

$$V = \sum_{\vec{k}'_1, \vec{k}'_2; \vec{k}_1, \vec{k}_2} V_{\vec{k}'_1, \vec{k}'_2; \vec{k}_1, \vec{k}_2} a_{\vec{k}'_1}^+ a_{\vec{k}'_2}^+ a_{\vec{k}_1}^- a_{\vec{k}_2}^- .$$

Si può affermare che questa somma può essere ristretta con  $\vec{k}'_1 > \vec{k}'_2$  e  $\vec{k}_1 > \vec{k}_2$ , ricordando che per le regole di commutazione  $a_{\vec{k}_1}^- a_{\vec{k}_2}^- = -a_{\vec{k}_2}^- a_{\vec{k}_1}^-$  e  $a_{\vec{k}'_1}^+ a_{\vec{k}'_2}^+ = -a_{\vec{k}'_2}^+ a_{\vec{k}'_1}^+$ . I due stati considerati differiscono soltanto in  $(\vec{k}'_1, \vec{k}'_2)$  e  $(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$ . Questo elemento di matrice è:

$$\langle \vec{k}_\alpha, \vec{k}_\beta, \dots, \vec{k}'_1, \vec{k}'_2 \mid V \mid \vec{k}_\alpha, \vec{k}_\beta, \dots, \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle = \pm V_{\vec{k}'_1, \vec{k}'_2; \vec{k}_1, \vec{k}_2} ;$$

dove il segno  $\pm$  deriva dall'ordinamento dei momenti  $k$  ed è ottenibili dalla statistica di Fermi. Il segno è  $(-1)^{N+N'}$  con  $N$  numero di stati tra  $\vec{k}_1$  e  $\vec{k}_2$  e  $N'$  numero di stati tra  $\vec{k}'_1$  e  $\vec{k}'_2$  e deriva dall'ordinamento degli stati e dalla statistica di Fermi.

Bardeen, Cooper e Schrieffer mostrarono che è possibile avere tutti gli elementi di matrice  $V_{\vec{k}'_1, \vec{k}'_2; \vec{k}_1, \vec{k}_2}$  reali e negativi prendendo le coppie di stati entrambe occupate o vuote come in Figura 4.2. In questo modo si ha  $N = N' = 0$  e il segno davanti a  $V_{\vec{k}'_1, \vec{k}'_2; \vec{k}_1, \vec{k}_2}$  è sempre positivo.

Si richiede che per ogni coppia si abbia:

$$\vec{k}'_1 + \vec{k}'_2 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{p} = \text{const} .$$

Si sceglie per lo stato fondamentale  $\vec{p} = 0$  e pertanto le coppie considerate sono caratterizzate da:

$$\vec{k}_2 = -\vec{k}_1 .$$

Per quanto riguarda lo spin, per rendere il potenziale più negativo possibile, si considerano elettroni con spin opposto, cioè con spin totale uguale a zero (per una giustificazione di tale scelta si veda l'Appendice B). Per semplificare la notazione, la coppia  $(\vec{k} \uparrow, -\vec{k} \downarrow)$  verrà denotata con  $\vec{k}$ . Con tale notazione e tali ipotesi si ha che:  $V_{\vec{k}', \vec{k}} = V_{\vec{k}', -\vec{k}', \vec{k}, -\vec{k}}$ .

Si suppone che le coppie siano organizzate in un certo ordine e che una coppia sia interamente occupata o vuota. Si definisce:

- $|\psi_{\vec{k}}(0)\rangle =$  la funzione d'onda per  $\vec{k} \uparrow$  e  $-\vec{k} \downarrow$  entrambe non occupate;

- $|\psi_{\vec{k}}(1)\rangle$  = la funzione d'onda per  $\vec{k} \uparrow$  e  $-\vec{k} \downarrow$  entrambe occupate.

Pertanto, una possibile funzione per lo stato fondamentale è:

$$|\Psi\rangle = \prod_i |\Psi_{\vec{k}_i}\rangle, \quad (4.7)$$

dove

$$|\Psi_{\vec{k}}\rangle = U_{\vec{k}}|\psi_{\vec{k}}(1)\rangle + V_{\vec{k}}|\psi_{\vec{k}}(0)\rangle \quad (4.8)$$

e, per la normalizzazione,

$$|U_{\vec{k}}|^2 + |V_{\vec{k}}|^2 = 1.$$

Nella situazione non perturbata, si ha il riempimento completo dei livelli energetici fino al livello di Fermi, pertanto si avrà  $|U_{\vec{k}}|^2 = 1$  se  $k \leq k_F$  e  $|U_{\vec{k}}|^2 = 0$  se  $k \geq k_F$ , con  $\vec{k}_F$  impulso di Fermi.

Scegliendo la fase in modo adeguato si può considerare che i coefficienti  $U_{\vec{k}}$  e  $V_{\vec{k}}$  siano reali. L'energia della funzione d'onda in Eq. (4.7), considerando che tutte le somme sono fatte su metà delle  $\vec{k}$  e  $V_{\vec{k}',\vec{k}} = V_{\vec{k}',-\vec{k}}, \vec{k}, -\vec{k}$ , è data da:

$$\begin{aligned} E &= \langle \Psi | H | \Psi \rangle = \sum_{\vec{k}} \langle \Psi | \epsilon_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}} + \epsilon_{-\vec{k}} a_{-\vec{k}}^{\dagger} a_{-\vec{k}} | \Psi \rangle + \sum_{\vec{k}',\vec{k}} V_{\vec{k}',\vec{k}} \langle \Psi | a_{\vec{k}'}^{\dagger} a_{-\vec{k}'}^{\dagger} a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}} | \Psi \rangle = \\ &= \sum_{\vec{k}} \epsilon_{\vec{k}} \langle \Psi_{\vec{k}} | a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}} + a_{-\vec{k}}^{\dagger} a_{-\vec{k}} | \Psi_{\vec{k}} \rangle + \sum_{\vec{k}',\vec{k}} V_{\vec{k}',\vec{k}} \langle \Psi_{\vec{k}'} | \langle \Psi_{\vec{k}} | a_{\vec{k}'}^{\dagger} a_{-\vec{k}'}^{\dagger} a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}} | \Psi_{\vec{k}} \rangle | \Psi_{\vec{k}'} \rangle = \\ &= \sum_{\vec{k}} \epsilon_{\vec{k}} s_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k}',\vec{k}} V_{\vec{k}',\vec{k}} t_{\vec{k}'} t_{\vec{k}}^*. \end{aligned} \quad (4.9)$$

dove

$$\begin{aligned} s_{\vec{k}} &= \langle \Psi_{\vec{k}} | a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}} + a_{-\vec{k}}^{\dagger} a_{-\vec{k}} | \Psi_{\vec{k}} \rangle; \\ t_{\vec{k}} &= \langle \Psi_{\vec{k}} | a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{-\vec{k}}^{\dagger} | \Psi_{\vec{k}} \rangle. \end{aligned}$$

Con la funzione d'onda definita nell'Eq. (4.8) si ottiene:  $s_{\vec{k}} = 2U_{\vec{k}}^2$  e  $t_{\vec{k}} = U_{\vec{k}}V_{\vec{k}} = t_{\vec{k}}^*$ .

Pertanto:

$$E = \sum_{\vec{k}} 2\epsilon_{\vec{k}} U_{\vec{k}}^2 + \sum_{\vec{k},\vec{k}'} V_{\vec{k},\vec{k}'} U_{\vec{k}'} V_{\vec{k}} U_{\vec{k}} V_{\vec{k}}. \quad (4.10)$$

Lo stato fondamentale si ottiene minimizzando l'Eq. (4.10). Si considera come variabile  $U_{\vec{k}}$  e si esprime  $V_{\vec{k}}$  in funzione di quest'ultimo, cioè  $V_{\vec{k}} = \sqrt{1 - U_{\vec{k}}^2}$ . Si fissa lo zero dell'energia al livello di Fermi.

Differenziando rispetto a  $U_{\vec{k}}$  l'Eq. (4.10) si ottiene:

$$4\epsilon_{\vec{k}} U_{\vec{k}} + 2 \sum_{\vec{k}'} V_{\vec{k},\vec{k}'} U_{\vec{k}'} V_{\vec{k}'} \left( V_{\vec{k}} - \frac{U_{\vec{k}}^2}{V_{\vec{k}}} \right) = 0. \quad (4.11)$$

Siccome  $V_{\vec{k},\vec{k}'}$  è reale e negativo, si può definire:

$$\Delta_{\vec{k}} = - \sum_{\vec{k}'} V_{\vec{k},\vec{k}'} U_{\vec{k}'} V_{\vec{k}'} > 0 . \quad (4.12)$$

Con tale assunzione si può riscrivere l'Eq. (4.11) come:

$$2\epsilon_{\vec{k}} U_{\vec{k}} = \Delta_{\vec{k}} \frac{1 - 2U_{\vec{k}}^2}{\sqrt{1 - 2U_{\vec{k}}^2}} . \quad (4.13)$$

Si introduce la variabile  $x$  come:

$$U_{\vec{k}}^2 = \frac{1}{2}(1 + x) \Rightarrow 1 - 2U_{\vec{k}}^2 = -x . \quad (4.14)$$

Elevando al quadrato l'Eq. (4.13) e usando l'Eq. (4.14) si ottiene:

$$x^2 = \frac{\epsilon_{\vec{k}}^2}{E_{\vec{k}}^2} . \quad (4.15)$$

$$\text{con } E_{\vec{k}} = \sqrt{\epsilon_{\vec{k}}^2 + \Delta_{\vec{k}}^2} . \quad (4.16)$$

Effettuando la radice quadrata di ambo i membri dell'Eq. (4.15), si ha che:

$$- \left(1 - 2U_{\vec{k}}^2\right) = x = - \frac{\epsilon_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}} , \quad (4.17)$$

avendo scelto il segno  $-$  per la radice quadrata, in quanto in tal modo si ha  $\epsilon_{\vec{k}} < 0$  al di sotto del livello di Fermi,  $x > 0$  e  $U_{\vec{k}} > V_{\vec{k}}$ . Inserendo quest'ultimo risultato nell'Eq. (4.14) si ottiene:

$$\begin{cases} U_{\vec{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}}\right) , \\ V_{\vec{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\epsilon_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}}\right) . \end{cases} \quad (4.18)$$

L'andamento di  $U_{\vec{k}}^2$  in funzione dell'energia è riportato in Figura 4.3. È possibile vedere nella figura l'andamento di  $U_{\vec{k}}^2$  nella situazione non perturbata, cioè non considerando l'interazione elettrone-elettrone (linea tratteggiata), e l'andamento nella situazione in cui tale interazione è considerata.

Per completare il calcolo per lo stato fondamentale, è necessario trovare un'espressione matematica per il parametro  $\Delta_{\vec{k}}$ . Dalle Eq. (4.18) è possibile calcolare che:

$$U_{\vec{k}} V_{\vec{k}} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{\epsilon_{\vec{k}}^2}{E_{\vec{k}}^2}} = \frac{\Delta_{\vec{k}}}{2E_{\vec{k}}} . \quad (4.19)$$

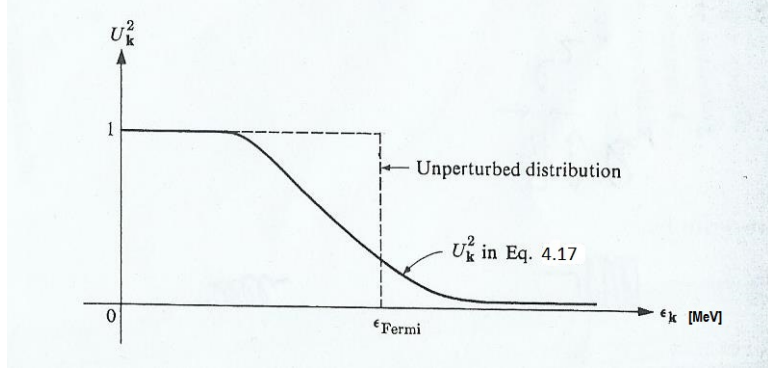


Figura 4.3: Andamento di  $U_{\vec{k}}$  in funzione dell'energia.

Pertanto, si può scrivere l'Eq. (4.12) come:

$$\Delta_{\vec{k}} = -V \sum_{\vec{k}'} \frac{\Delta_{\vec{k}'}}{2\sqrt{\epsilon_{\vec{k}'}^2 + \Delta_{\vec{k}'}^2}} . \quad (4.20)$$

Bardeen, Cooper e Schrieffer fecero l'assunzione che  $V_{\vec{k},\vec{k}'}$  sia una costante per  $\vec{k}$  e  $\vec{k}'$  in un range di  $\hbar\omega_D$ , al di sopra e al di sotto della superficie di Fermi e nulla per qualunque altra energia. Con questa assunzione, dunque,  $\Delta_{\vec{k}}$  diviene indipendente da  $\vec{k}$  e l'Eq. (4.20) diviene:

$$1 = - \sum_{\vec{k}} V_{\vec{k},\vec{k}'} \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_{\vec{k}'}^2 + \Delta_{\vec{k}'}^2}} .$$

Trascurando la natura discreta di  $\epsilon$ , si può trasformare la somma in un integrale:

$$1 = \left| \frac{V}{2} \right| \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{M(\epsilon)}{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}} d\epsilon \approx |V|M(0) \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}} ,$$

con  $M(\epsilon)$  densità degli stati per energia; essa è approssimabile in un intorno della superficie di Fermi alla costante  $M(0)$ , densità degli stati al livello di Fermi. Risolvendo l'integrale si ottiene:

$$\Delta = \frac{\hbar\omega_D}{\sinh\left(\frac{1}{|V|M(0)}\right)} . \quad (4.21)$$

### 4.3 Eccitazioni

In questa ultima sezione si procederà a definire e studiare le prime eccitazioni dello stato fondamentale, per dare, in conclusione, una spiegazione formale della superconduttività. Per descrivere gli stati eccitati si deve considerare la possibilità di una coppia occupata a metà. In letteratura la coppia formata da un singolo elettrone e dalla lacuna ad esso corrispondente

prende il nome di *quasiparticella*.

Si definisce:

$$\psi_{\vec{k}}^-(2) = a_{\vec{k}\uparrow}^+ \psi_{\vec{k}}^-(0) \quad \text{e} \quad \psi_{\vec{k}}^-(3) = a_{-\vec{k}\downarrow}^+ \psi_{\vec{k}}^-(0) . \quad (4.22)$$

Per come sono stati definiti,  $\psi_{\vec{k}}^-(2)$  è la funzione d'onda di uno stato in cui l'operatore  $a_{\vec{k}\uparrow}^+$  crea nella coppia non occupata  $\psi_{\vec{k}}^-(0)$  un elettrone di momento  $\vec{k} \uparrow$ . Analogamente,  $\psi_{\vec{k}}^-(3)$  è la funzione d'onda in cui l'operatore  $a_{-\vec{k}\downarrow}^+$  crea nella coppia non occupata un elettrone di momento  $\vec{k} \downarrow$ . Allora si hanno quattro possibili stati ortogonali per una coppia di Cooper:

- $|\Psi_{\vec{k}}^-(0)\rangle = U_{\vec{k}} \psi_{\vec{k}}^-(1) + V_{\vec{k}} \psi_{\vec{k}}^-(0)$ , stato fondamentale;
- $|\Psi_{\vec{k}}^-(1)\rangle = V_{\vec{k}} \psi_{\vec{k}}^-(1) - U_{\vec{k}} \psi_{\vec{k}}^-(0)$ , stato per una coppia eccitata;
- $|\Psi_{\vec{k}}^-(2)\rangle = \psi_{\vec{k}}^-(2)$ , stato per una singola eccitazione con  $-\vec{k} \downarrow$  non occupato;
- $|\Psi_{\vec{k}}^-(3)\rangle = \psi_{\vec{k}}^-(3)$ , stato per una singola eccitazione con  $\vec{k} \uparrow$  non occupato.

Si considera la situazione in cui dallo stato fondamentale sia stato eccitato un solo elettrone di momento  $\vec{k}_1 \uparrow$ . Le funzioni d'onda che descriveranno le coppie di Cooper del superconduttore saranno quindi  $\Psi_{\vec{k}_1}^- = \psi_{\vec{k}_1}^-(2)$  e  $\Psi_{\vec{k}}^- = |\psi_{\vec{k}}^-(0)\rangle$  per  $\vec{k} \neq \vec{k}_1$ . Allora l'energia  $E'$  di questo stato con singola eccitazione è data dall'Eq. (4.9).

Chiamando  $E_0$  l'energia dello stato fondamentale e considerando che

$$s_{\vec{k}_1}^- = \left\langle \Psi_{\vec{k}_1}^- \left| a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} + a_{-\vec{k}}^+ a_{-\vec{k}} \right| \Psi_{\vec{k}_1}^- \right\rangle = 1 ,$$

poichè la coppia è occupata solo dall'elettrone di momento  $\vec{k} \uparrow$ , e che

$$t_{\vec{k}_1}^- = \left\langle \Psi_{\vec{k}_1}^- \left| a_{\vec{k}}^+ a_{-\vec{k}}^+ \right| \Psi_{\vec{k}_1}^- \right\rangle = 0 ,$$

si ha:

$$E' = \sum_{\vec{k} \neq \vec{k}_1} 2\epsilon_{\vec{k}} U_{\vec{k}}^2 + \sum_{\vec{k}, \vec{k}' \neq \vec{k}_1} V_{\vec{k}, \vec{k}'} U_{\vec{k}'} V_{\vec{k}'} U_{\vec{k}} V_{\vec{k}} + \epsilon_{\vec{k}_1}^- .$$

Si può, allora, trovare la differenza di energia tra i due stati:

$$\begin{aligned} E' - E_0 &= \epsilon_{\vec{k}_1}^- - 2\epsilon_{\vec{k}_1}^- U_{\vec{k}_1}^2 - \sum_{\vec{k}} V_{\vec{k}, \vec{k}_1} U_{\vec{k}} V_{\vec{k}} U_{\vec{k}_1} V_{\vec{k}_1} - \sum_{\vec{k}} V_{\vec{k}_1, \vec{k}} U_{\vec{k}_1} V_{\vec{k}_1} U_{\vec{k}} V_{\vec{k}} \\ &= \epsilon_{\vec{k}_1}^- \left( 1 - 2U_{\vec{k}_1}^2 \right) - 2 \left( \sum_{\vec{k}} V_{\vec{k}_1, \vec{k}} U_{\vec{k}} V_{\vec{k}} \right) U_{\vec{k}_1} V_{\vec{k}_1} , \end{aligned}$$



avendo usato il fatto che  $V_{\vec{k},\vec{k}_1} = V_{\vec{k}_1,\vec{k}}$ .

Usando le Eq. (4.12), (4.17), (4.19), si ottiene che:

$$E' - E_0 = \epsilon_{\vec{k}_1} \left( \frac{\epsilon_{\vec{k}_1}}{E_{\vec{k}_1}} \right) - 2(-\Delta_{\vec{k}_1}) \left( \frac{\Delta_{\vec{k}_1}}{2E_{\vec{k}_1}} \right) = \frac{\epsilon_{\vec{k}_1}^2 + \Delta_{\vec{k}_1}^2}{E_{\vec{k}_1}} = E_{\vec{k}_1} . \quad (4.23)$$

Considerando l'eccitazione complementare e quindi la sola creazione dallo stato fondamentale di un elettrone di momento  $-\vec{k} \downarrow$ , si ha che  $\Psi_{\vec{k}_1} = \psi_{\vec{k}_1}(3)$ ,  $s_{\vec{k}_1} = 1$  e  $t_{\vec{k}_1} = 0$ , così che l'Eq. (4.23) è ancora valida.

Considerando infine la situazione per cui dallo stato fondamentale viene eccitata una coppia di elettroni di momento  $\vec{k} \uparrow$  e  $-\vec{k} \downarrow$ , si ha che  $\Psi_{\vec{k}_1} = V_{\vec{k}_1} \psi_{\vec{k}_1}(1) - U_{\vec{k}_1} \psi_{\vec{k}_1}(0)$ . L'energia dello stato che comprende questa doppia eccitazione, detta  $E''$ , è pari a:

$$E'' = \sum_{\vec{k} \neq \vec{k}_1} 2\epsilon_{\vec{k}} U_{\vec{k}}^2 + \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} V_{\vec{k}, \vec{k}'} U_{\vec{k}'} V_{\vec{k}'} U_{\vec{k}} V_{\vec{k}} + 2\epsilon_{\vec{k}_1} V_{\vec{k}_1}^2 ,$$

in quanto  $s_{\vec{k}_1} = 2V_{\vec{k}_1}^2$  e  $t_{\vec{k}_1} = -U_{\vec{k}_1} V_{\vec{k}_1}$ , da calcoli simili a quelli effettuati per la prima eccitazione. Quindi, è possibile ricavare che:

$$E'' - E_0 = 2E_{\vec{k}_1} . \quad (4.24)$$

In questo modo è possibile comprendere il significato fisico dei parametri  $E_{\vec{k}}$  e  $\Delta_{\vec{k}}$ , detto parametro di gap. Essi determinano il comportamento superconduttivo. Dall'Eq. (4.23) si evince che  $E_{\vec{k}}$  è l'energia da fornire a una coppia per creare una quasiparticella. Considerando l'Eq. (4.16), si nota che la più piccola energia  $E_{\vec{k}}$  si ha con  $\epsilon_{\vec{k}} = 0$ , cioè con energia cinetica dell'elettrone nulla; tale valore minimo per creare la quasiparticella è pari a  $\Delta_{\vec{k}}$ .

Affinchè il sistema si modifichi, però, occorre cedere almeno  $2\Delta$  (occorre creare una coppia per avere spin 0). L'esistenza di un gap implica il fenomeno della superconduttività: perchè vi sia una perdita di corrente per effetto Joule, una certa quantità di energia  $\delta$  deve essere ceduta alle quasiparticelle, ma se  $\delta < 2\Delta$  questa energia non è sufficiente a creare la coppia. Pertanto, la corrente non può dissipare energia e diviene superconduttrice.

## Appendice A

# Interazione ritardata descritta dalla BCS

Il moto degli elettroni di conduzione in un metallo può indurre deformazioni nella struttura cristallina degli ioni; a temperature sufficientemente basse, queste deformazioni possono originare un'interazione efficace attrattiva tra gli elettroni. A causa dell'attrazione elettrostatica tra elettroni e ioni, ogni elettrone tende a modificare localmente la struttura simmetrica del cristallo: la carica di un elettrone, infatti, tende ad essere parzialmente schermata dagli ioni circostanti, attraverso una deformazione locale del reticolo cristallino.

Siccome l'elettrone può essere considerato puntiforme rispetto al passo reticolare, questa deformazione, coinvolge essenzialmente i modi normali di oscillazione del reticolo. Questo avviene perchè quando la velocità dell'elettrone è piccola rispetto alla velocità di propagazione del suono nel materiale, la deformazione è simultanea alla propagazione stessa dell'elettrone; quando, invece, l'elettrone si muove con velocità superiore a quella del suono, la deformazione della struttura cristallina è ritardata rispetto alla propagazione dell'elettrone stesso.

Alla deformazione del reticolo è associato un eccesso di carica positiva, che può interagire con un altro elettrone: si genera così un'interazione tra i due elettroni.

L'ordine di grandezza della separazione spaziale  $d$  tra l'elettrone che ha perturbato il reticolo e la deformazione cristallina si ottiene moltiplicando la velocità dell'elettrone per il tempo che impiega il modo normale di vibrazione del reticolo a frequenza  $\omega_D$  a raggiungere la minima distanza tra gli ioni, ovvero dell'ordine di  $\pi/\omega_D \simeq 10^{-13}$  s. Per elettroni che si muovono con velocità di Fermi ( $v_F = p_F/m \simeq 10^8$  cm/s), si ottiene:

$$d \simeq 10^3 \text{ \AA} .$$

A tali distanze, la repulsione coulombiana tra due elettroni è totalmente schermata e trascurabile. Gli elettroni dinamicamente collegati attraverso la vibrazione del reticolo, costituiscono le coppie di Cooper, la cui dimensione è pari, appunto, a  $10^3 - 10^4$  Å.

## Appendice B

# Spin degli elettroni di una coppia di Cooper

Si è fatta l'assunzione, durante la trattazione della teoria BCS, che gli elettroni di una coppia di Cooper avessero spin opposti e stessero, quindi, in uno stato di singoletto. In questa appendice si fornirà una giustificazione dell'ipotesi fatta.

Abbiamo precedentemente illustrato come gli elettroni che partecipano ad una coppia di Cooper fossero quelli con energia prossima all'energia di Fermi. Tali elettroni possono essere descritti con buona approssimazione da una funzione d'onda di particella libera (si trascura l'interazione con gli elettroni e con il reticolo).

Essendo una coppia di due fermioni, la funzione d'onda totale deve essere antisimmetrica; detta  $\psi$  la funzione d'onda del sistema si ha:

$$\psi = \left( e^{\frac{i}{\hbar}\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2} \pm e^{\frac{i}{\hbar}\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_2} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_1} \right) \cdot \psi_{\text{Spin}} , \quad (\text{B.1})$$

con  $\vec{k}_1$  e  $\vec{k}_2$  quantità di moto dei due elettroni e  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  vettori posizione.

Si era assunto per lo stato fondamentale:  $\vec{k}_1 = -\vec{k}_2$ .

È possibile, inoltre, scrivere che:  $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}$ .

Con tali assunzioni l'Eq. (B.1) diviene:

$$\psi = \left( e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{k}_1 \cdot \Delta\vec{r}} \pm e^{\frac{i}{\hbar}\vec{k}_1 \cdot \Delta\vec{r}} \right) \cdot \psi_{\text{Spin}} . \quad (\text{B.2})$$

La funzione d'onda deve essere, come già affermato, globalmente antisimmetrica, pertanto si hanno solo due opzioni:

$$\psi = \begin{cases} +2 \cos \left( \frac{i}{\hbar}\vec{k}_1 \cdot \Delta\vec{r} \right) & , \text{ se } \uparrow\downarrow \\ -2i \sin \left( \frac{i}{\hbar}\vec{k}_1 \cdot \Delta\vec{r} \right) & , \text{ se } \uparrow\uparrow \end{cases}$$

in cui si è indicato con  $\uparrow\downarrow$  lo stato di singoletto e con  $\uparrow\uparrow$  lo stato di tripletto.

Si può, allora, giustificare l'assunzione dello stato di singoletto della coppia di Cooper: tale stato è preferito in quanto la funzione d'onda è diversa da zero per  $\Delta\vec{r}$  piccoli e, quindi, favorisce l'attrazione.

## Appendice C

# Teorema sullo stato fondamentale

Nella trattazione della teoria BCS si giustifica la ricerca di stati  $\psi_i$ , tali che gli  $U_{ij}$  siano tutti uguali e negativi, con il teorema che di seguito si va ad illustrare.

Esso afferma che avendo un Hamiltoniano del tipo  $H = H_0 + U$  e con un set di stati  $\psi_i$ , per cui gli  $U_{ij} = \langle \psi_i | U | \psi_j \rangle$  siano tutti uguali e negativi e le  $E_i = \langle \psi_i | H_0 | \psi_i \rangle$  tutte uguali, allora è sicuramente possibile trovare uno stato  $\psi$  che minimizzi l'energia.

Si consideri il seguente Hamiltoniano:

$$H = H_0 + U \quad ,$$

con  $E_i$  e  $\psi_i$  autovalori e autofunzioni di  $H_0$ .

Si definisce

$$U_{ij} = \langle \psi_i | U | \psi_j \rangle \quad .$$

Si ipotizza, inoltre che tutte le  $E_i$  e le  $U_{ij}$  siano uguali fra loro ( $E_i \approx E_0$  e  $U_{ij} \approx -V$ ) e si considera la seguente funzione d'onda normalizzata:

$$\Psi = \sum_i a_i \psi_i \quad .$$

Allora:

$$\langle E \rangle = \sum_i E_i |a_i|^2 + \sum_{ij} U_{ij} a_i^* a_j \quad ;$$

Per la normalizzazione e le ipotesi fatte si ha:

$$\sum_i |a_i|^2 = 1 \quad ,$$

$$\langle E \rangle = E_0 - V \sum_{ij} a_i^* a_j \quad .$$

Si suppone che ci siano  $m$  stati di natura richiesta e si cerca di minimizzare il valore atteso dell'energia:

$$\sum_{ij} a_i^* a_j = \left| \sum_i 1 \cdot a_i \right|^2 \leq \sum_i |1|^2 \sum_i |a_i|^2 = m^2 ,$$

in cui si è usata la disuguaglianza di Schwarz; per minimizzare l'energia, quindi, si può porre che:

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{m}} ;$$

da cui

$$\langle E \rangle = E_0 - mV . \tag{C.1}$$

Quando  $V$  è positivo, quindi, la stabilizzazione è  $m$  volte intensa.

## Appendice D

# Sviluppo perturbativo dell'Hamiltoniano

Nella trattazione della teoria BCS è stato eseguito uno sviluppo perturbativo dell'Hamiltoniano di interazione. Tale sviluppo perturbativo sarà di seguito illustrato nel dettaglio. Si considera un Hamiltoniano  $H$ . È sempre possibile eseguire una trasformazione canonica del tipo:

$$\tilde{H} = e^{-S} H e^S = \left( 1 - S + \frac{1}{2!} S^2 - \dots \right) H \left( 1 + S + \frac{1}{2!} S^2 + \dots \right) = H + [H, S] + \frac{1}{2!} [[H, S], S] + \dots, \quad (\text{D.1})$$

con  $S$  un arbitrario operatore antihermitiano. Tale condizione garantisce che la trasformazione  $U = e^S$  sia unitaria e, pertanto, preservi la norma degli stati. È evidente che gli autovalori di  $\tilde{H}$  e  $H$  coincidano.

Si suppone che l'operatore  $H$  sia nella forma

$$H = H_0 + H_1 .$$

Allora, l'Eq. (D.1) diviene:

$$\tilde{H} = H_0 + H_1 + [H_0, S] + [H_1, S] + \frac{1}{2!} [[H_0, S], S] + \dots .$$

Siccome  $S$  è arbitraria, la si può scegliere di modo tale che soddisfi la relazione

$$H_1 + [H_0, S] = 0 . \quad (\text{D.2})$$

Con tale scelta,  $\tilde{H}$  diviene

$$\tilde{H} = H_0 + \frac{1}{2} [H_1, S] + \dots . \quad (\text{D.3})$$



Se si immagina di sostituire  $H_1$  con  $\lambda H_1$  (con  $\lambda$  eventualmente posto uguale a 1), è possibile vedere che i termini trascurati in  $\tilde{H}$  sono per lo meno di ordine  $\lambda^3$ . Si sta, pertanto, conducendo uno sviluppo perturbativo al secondo ordine, con

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= H_0 + H_{\text{indiretta}} \ , \\ H_{\text{indiretta}} &= \frac{1}{2}[H_1, S] \ .\end{aligned}$$

Dall'Eq. (D.2), si vede che nella rappresentazione in cui  $H_0$  è diagonale

$$\langle n | S | m \rangle = \frac{\langle n | H_1 | m \rangle}{E_m - E_n} \ ,$$

con  $\langle n |$  e  $\langle m |$  autostati di  $H_0$  e  $E_n$  e  $E_m$  i rispettivi autovalori. Per evitare singolarità, si è assunto che gli elementi diagonali della matrice di  $H_1$  siano nulli, nella rappresentazione scelta. L'espressione degli elementi di matrice di  $H_{\text{indiretta}}$  sugli autostati di  $H_0$  è

$$\begin{aligned}\langle f | H_{\text{indiretta}} | i \rangle &= \frac{1}{2} \langle f | H_1 S - S H_1 | i \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} [\langle f | H_1 | \alpha \rangle \langle \alpha | S | i \rangle - \langle f | S | \alpha \rangle \langle \alpha | H_1 | i \rangle] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} [\langle f | H_1 | \alpha \rangle \langle \alpha | H_1 | i \rangle \left[ \frac{1}{E_i - E_{\alpha}} + \frac{1}{E_f - E_{\alpha}} \right]] \ ,\end{aligned}\tag{D.4}$$

dove  $\langle i |$ ,  $\langle f |$  e  $\langle \alpha |$  sono autostati di  $H_0$  e  $E_i$ ,  $E_f$  e  $E_{\alpha}$  i rispettivi autovalori. Il significato di  $H_{\text{indiretta}}$  può essere chiarito notando che  $\langle i | H_{\text{indiretta}} | i \rangle$  è la correzione standard dei livelli di energia al second ordine dato dalla teoria perturbativa.

# Bibliografia

- [1] G. Nardulli, *Meccanica Quantistica II-Applicazioni*, Franco Angeli (2009).
- [2] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures of Physics*, Addison-Wesley Publishing Company Inc. (1961).
- [3] R. P. Feynman, *Statistical Mechanics- A set of lectures*, The Benjamin/Cummings Publishing Company (1972).
- [4] V. Augelli, *Fisica degli Stati Condensati*, dispense.
- [5] L. Monacelli, *Superconduttori e Teoria BCS* (2017).
- [6] G. Grosso, G. P. Parravicini, *Solid State Physics*, Elsevier Ltd. (2014).