

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI BARI  
ALDO MORO

FACOLTA' DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI  
CORSO DI LAUREA IN FISICA

---

TESI DI LAUREA TRIENNALE

**Meccanica quantistica: un approccio  
supersimmetrico**

*Relatore*

Dott. Pietro COLANGELO

*Laureando*

Simone NOTARNICOLA

---

ANNO ACCADEMICO 2009/2010

# Indice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introduzione</b>  | <b>2</b>  |
| <b>1 Supersimmetria in Meccanica Quantistica</b>   | <b>4</b>  |
| 1.1 Fattorizzazione di $H$ . . . . .   | 4         |
| 1.2 Costruzione dei partner supersimmetrici per l'Hamiltoniano e per il potenziale . . . . . | 6         |
| 1.3 Algebra di un sistema supersimmetrico . . . . .  | 9         |
| 1.4 Violazione della supersimmetria e indice di Witten . . . . .                             | 12        |
| 1.5 Fattorizzazioni successive di un Hamiltoniano . . . . .                                  | 17        |
| <b>2 Applicazione della supersimmetria a tre problemi di meccanica quantistica</b>           | <b>20</b> |
| 2.1 Pozzo di potenziale . . . . .  | 20        |
| 2.2 Oscillatore armonico . . . . .   | 23        |
| 2.3 Potenziale $V(x) \sim -\text{sech}^2 x$ . . . . .  | 24        |
| 2.3.1 Integrazione dell'equazione di Schrödinger . . . . .                                   | 24        |
| 2.3.2 Integrazione mediante fattorizzazioni successive dell'Hamiltoniano                     | 26        |
| <b>3 Potenziali invarianti per forma</b>   | <b>31</b> |
| 3.1 Costruzione dei potenziali invarianti per forma . . . . .                                | 31        |
| 3.2 Applicazione: il potenziale coulombiano . . . . .  | 34        |
| <b>4 Metodi di approssimazione e supersimmetria: metodi WKB e SWKB</b>                       | <b>40</b> |
| 4.1 Metodo WKB . . . . .   | 40        |
| 4.2 Metodo SWKB per il calcolo degli autovalori di energia . . . . .                         | 44        |
| <b>Conclusioni</b>   | <b>46</b> |
| <b>Bibliografia</b>  | <b>47</b> |
| <b>Ringraziamenti</b>  | <b>48</b> |

# Introduzione

La teoria della supersimmetria è stata formulata nei primi anni '70 nei lavori di Gelfand, Likhtman e Volkov tra il 1970 ed il 1971, ai quali nel 1973 si aggiunsero quelli di Wess e Zumino [1]. La sua nascita si discosta da quella di altre teorie fondamentali: molte rivoluzioni scientifiche precedenti, come la meccanica quantistica, sono sorte dalla necessità di fornire un'interpretazione a risultati sperimentali in disaccordo con le teorie preesistenti. La supersimmetria, invece, si presenta come un risultato della fisica teorica in grado di fornire delle risposte a questioni lasciate aperte da altri modelli.

L'idea principale alla base della supersimmetria è l'invarianza per scambi tra fermioni e bosoni costituenti un sistema: si suppone debba essere possibile associare ad ogni entità di natura fermionica un corrispondente partner supersimmetrico bosonico, e viceversa. In 40 anni la teoria ha avuto una grande risonanza nella comunità scientifica, come mostra l'imponente mole di lavori pubblicati al riguardo, ma la mancanza, tutt'ora, di verifiche sperimentali ha suscitato reazioni di scetticismo in alcuni, come ad esempio in R. Penrose [2]. Nell'introduzione ad un'opera di G. Kane [3] sull'argomento, E. Witten parla della supersimmetria come di una teoria che potrebbe rivoluzionare il nostro approccio alla realtà, con portata pari a quella della meccanica quantistica, fornendo un'interpretazione completamente nuova della natura.

Al di là dell'esistenza o meno in natura di una simmetria fra particelle di spin diverso, l'idea della supersimmetria ha prodotto alcune conseguenze nella meccanica quantistica ordinaria. In principio, queste teorie sono state originate dalla necessità di descrivere sistemi quantomeccanici che potessero rappresentare modelli semplici di più complesse situazioni fenomenologiche. In seguito, si è visto che la supersimmetria consente di sviluppare un formalismo utile "per sé" in meccanica quantistica: infatti, questo formalismo da un lato permette di mettere in relazione sistemi diversi, dall'altro permette di risolvere i problemi standard della meccanica quantistica in modo nuovo e più efficiente, o di utilizzare metodi di approssimazione con maggior successo. In questo approccio non si ha a che fare con bosoni o fermioni, ma con Hamiltoniani che possono essere messi in relazione. Lo scopo di questo lavoro è di descrivere questo metodo nell'ambito della meccanica quantistica di una particella in un potenziale.

Il formalismo e la sua applicazione verranno descritti nei capitoli di questa tesi.

Nel primo capitolo si introduce la supersimmetria in meccanica quantistica, partendo dalla fattorizzazione dell'Hamiltoniano di un sistema, e si definisce l'algebra di un sistema supersimmetrico. Si studia la violazione della supersimmetria e si introduce uno strumento, l'indice di Witten, che permette di verificare la supersimmetria del sistema. È descritto, infine, il procedimento di fattorizzazioni successive di un Hamiltoniano.

Nel secondo capitolo si studiano tre problemi di meccanica quantistica con questo metodo: il pozzo di potenziale, l'oscillatore armonico ed il potenziale  $V(x) \sim -\text{sech}^2 x$ .

Nel terzo capitolo si definiscono i potenziali invariati per forma e se ne ricava un criterio di integrazione per l'equazione di Schrödinger. Il criterio è applicato allo studio del potenziale efficace radiale dell'atomo di idrogeno.

Nel quarto capitolo la supersimmetria è applicata al metodo WKB: sono calcolate le funzioni d'onda in approssimazione WKB con correzione al prim'ordine, ricavando la condizione di quantizzazione degli autovalori di energia; si introduce, quindi, il nuovo metodo SWKB, in particolare la condizione di quantizzazione per i livelli energetici di un sistema supersimmetrico, con vantaggi nella determinazione anche dei primi livelli energetici.

Infine, nell'ultimo capitolo ci sono le conclusioni, insieme con l'elenco di alcuni altri problemi che si potrebbero trattare in meccanica quantistica supersimmetrica.

# Capitolo 1

## Supersimmetria in Meccanica Quantistica

In questo capitolo vengono richiamate alcune nozioni di meccanica quantistica utili per la trattazione. È studiata la fattorizzazione dell'Hamiltoniano per una particella in un sistema unidimensionale. Sono definiti i partner supersimmetrici per l'Hamiltoniano e per l'energia potenziale, con particolare attenzione al comportamento degli spettri energetici e delle relative autofunzioni nel passaggio da un sistema al suo partner supersimmetrico. Vengono presentate le regole che definiscono un'algebra supersimmetrica. È studiata la possibilità di applicare il formalismo della supersimmetria ad un generico sistema: si presenta il fenomeno della violazione della supersimmetria, e concetti generali per verificare l'eventuale sussistenza. Viene infine trattato il procedimento delle fattorizzazioni successive per un Hamiltoniano, descrivendone la costruzione e le finalità.

### 1.1 Fattorizzazione di $H$

Si consideri una particella di massa  $m$  in un sistema unidimensionale; la sua evoluzione temporale è descritta dall'operatore Hamiltoniano  $H$  tramite l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H |\psi(t)\rangle. \quad (1.1)$$

Sia  $V(x)$  l'energia potenziale della particella, funzione della posizione; l'operatore Hamiltoniano è

$$H = \frac{p^2}{2m} + V \quad (1.2)$$

in cui  $p$  è l'operatore impulso e  $V$  l'operatore energia potenziale. Esprimendo l'Hamiltoniano nella rappresentazione della posizione si ottiene:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x). \quad (1.3)$$

Si considererà d'ora in poi  $\hbar = 2m = 1$ .

Il problema che in genere ci si pone nello studio di un sistema quantistico è l'integrazione dell'equazione agli autovalori dell'Hamiltoniano, ovvero la ricerca degli autostati

e dei corrispondenti autovalori di energia. Gli autostati, nella rappresentazione della posizione, sono descritti da autofunzioni aventi per variabile la posizione stessa; queste ultime soddisfano l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo

$$H\psi(x) = E\psi(x), \quad (1.4)$$

in cui  $E$  rappresenta l'autovalore di energia relativo all'autofunzione  $\psi(x)$ .

Consideriamo sistemi descritti da Hamiltoniani contenenti funzioni per l'energia potenziale non singolari; inoltre richiediamo che lo spettro energetico contenga una parte discreta, corrispondente a stati legati del sistema, e che questa sia limitata inferiormente da un valore  $E_{min}$  di energia. Sia  $H$  un Hamiltoniano con queste caratteristiche, e sia  $V(x)$  la funzione per l'energia potenziale. Si supponga, inoltre, che il valore minimo di energia per lo spettro discreto sia 0; questa è una condizione non stringente, in quanto si può ottenere con una traslazione di tutti i livelli energetici di una quantità pari all'energia del livello fondamentale, ridefinendo il potenziale  $V(x)$  con una costante addittiva.

L'autofunzione  $\psi_0(x)$  relativa allo stato fondamentale del sistema, con autovalore di energia corrispondente a 0, soddisfa l'equazione

$$-\psi_0''(x) + V(x)\psi_0(x) = 0 \quad (1.5)$$

in cui un apice indica una derivata rispetto ad  $x$ . Trattandosi dell'autofunzione dello stato fondamentale,  $\psi_0(x)$  dev'essere priva di nodi ed annullarsi all'infinito in entrambi i versi per soddisfare la condizione di normalizzabilità. È possibile stabilire una relazione tra la funzione di energia potenziale e l'autofunzione  $\psi_0(x)$ , utilizzando la (1.5):

$$V(x) = \frac{\psi_0''(x)}{\psi_0(x)}. \quad (1.6)$$

Quindi, dalla conoscenza del potenziale è possibile ricavare l'autofunzione relativa allo stato fondamentale per il sistema e, viceversa, la conoscenza della prima autofunzione consente di determinare  $V(x)$ .

Il primo passo per lo studio di un sistema tramite la nozione di supersimmetria è definire due operatori,  $A$  e  $A^\dagger$ , che fattorizzino l'Hamiltoniano di partenza [4][5]:

$$H = A^\dagger A. \quad (1.7)$$

I due operatori sono definiti in termini di  $W(x)$ , chiamato superpotenziale, nel seguente modo:

$$A = \frac{d}{dx} + W(x) \quad A^\dagger = -\frac{d}{dx} + W(x) \quad (1.8)$$

Definendo l'operatore impulso  $p = -i\frac{d}{dx}$ , si possono riscrivere i due operatori  $A$  e  $A^\dagger$  nella forma

$$A = ip + W(x) \quad A^\dagger = -ip + W(x). \quad (1.9)$$

Se  $W(x)$  è una funzione reale,  $A$  e  $A^\dagger$  sono uno l'aggiunto dell'altro. Indicando con  $E_n$  l'autovalore relativo allo stato descritto dall'autofunzione  $\psi_n(x)$ , l'equazione di Schrödinger può essere scritta nella forma:

$$A^\dagger A\psi_n(x) = E_n\psi_n(x), \quad (1.10)$$

e la condizione per  $\psi_0(x)$

$$A\psi_0(x) = 0 \quad (1.11)$$

è sufficiente affinché l'autovalore di energia relativo allo stato fondamentale sia nullo.

Esiste una relazione tra il potenziale  $V(x)$  ed il superpotenziale  $W(x)$ : infatti, dal prodotto

$$\begin{aligned} A^\dagger A &= \left( -\frac{d}{dx} + W(x) \right) \left( \frac{d}{dx} + W(x) \right) \\ &= -\frac{d^2}{dx^2} - W'(x) - W(x)\frac{d}{dx} + W(x)\frac{d}{dx} + W^2(x) \\ &= H \end{aligned} \quad (1.12)$$

si ottiene la relazione

$$V(x) = W^2(x) - W'(x) \quad (1.13)$$

che collega il superpotenziale  $W(x)$  al potenziale  $V(x)$ . Nel caso in cui sia nota la funzione d'onda dello stato fondamentale è possibile ricavare direttamente il superpotenziale: infatti, dall'equazione (1.11) si ottiene

$$W(x) = -\frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)}. \quad (1.14)$$

Come verrà illustrato nel paragrafo seguente, il superpotenziale  $W(x)$  è importante perché permette di definire il partner supersimmetrico del potenziale  $V(x)$  di partenza.

## 1.2 Costruzione dei partner supersimmetrici per l'Hamiltoniano e per il potenziale

Si indichi con  $H_1$  l'Hamiltoniano fattorizzato tramite i due operatori  $A$  e  $A^\dagger$  nella (1.7). Si può definire il suo partner supersimmetrico,  $H_2$ , nel seguente modo:

$$H_2 = AA^\dagger, \quad (1.15)$$

ovvero

$$H_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + W'(x) + W^2(x). \quad (1.16)$$

La differenza rispetto all'espressione ottenuta per  $H_1$  è nel segno della derivata di  $W(x)$ . Si può definire quindi un potenziale  $V_2(x)$ , partner supersimmetrico di  $V_1(x)$ , come il potenziale che compare in  $H_2$ :

$$V_2(x) = W^2(x) + W'(x). \quad (1.17)$$

Studiamo le relazioni tra gli spettri energetici, e le relative autofunzioni, di  $H_1$  e  $H_2$ . Si indicheranno con  $E_n^{(1)}$  e  $E_n^{(2)}$  gli autovalori di energia per l' $n$ -esimo stato eccitato rispettivamente per gli Hamiltoniani  $H_1$  e  $H_2$ , mentre le autofunzioni saranno denotate con  $\psi_n^{(1)}(x)$  e  $\psi_n^{(2)}(x)$ .

L'autofunzione  $\psi_n^{(1)}(x)$  di  $H_1$  relativa all'autovalore  $E_n^{(1)}$  soddisfa l'equazione

$$H_1\psi_n^{(1)}(x) = E_n^{(1)}\psi_n^{(1)}(x). \quad (1.18)$$

Se applichiamo l'operatore  $A$  ad entrambi i membri dell'equazione, ricordando la fattorizzazione di  $H_1$  definita nella (1.7), otteniamo:

$$AA^\dagger A\psi_n^{(1)}(x) = E_n^{(1)}A\psi_n^{(1)}(x), \quad (1.19)$$

ovvero, tramite la definizione di  $H_2$  (1.15):

$$H_2A\psi_n^{(1)}(x) = E_n^{(1)}A\psi_n^{(1)}(x). \quad (1.20)$$

Quindi  $A\psi_n^{(1)}(x)$  è autofunzione di  $H_2$  con autovalore  $E_n^{(1)}$ , e questa conclusione è valida per ogni  $n \neq 0$ . Nel caso  $n = 0$  la corrispondente autofunzione dovrebbe essere  $\psi_0^{(2)}(x) = A\psi_0^{(1)}(x)$ , ma per la (1.11)  $\psi_0^{(2)}(x)$  è identicamente nulla: non vi è quindi uno stato di  $H_2$  con autovalore di energia nullo.

Analogamente, si consideri la generica autofunzione  $\psi_n^{(2)}(x)$  per un autostato dell'Hamiltoniano  $H_2$ , ed il relativo autovalore  $E_n^{(2)}$ ; dall'equazione

$$H_2\psi_n^{(2)}(x) = E_n^{(2)}\psi_n^{(2)}(x), \quad (1.21)$$

applicando ad entrambi i membri l'operatore  $A^\dagger$ , si ottiene:

$$H_1A^\dagger\psi_n^{(2)}(x) = E_n^{(2)}A^\dagger\psi_n^{(2)}(x). \quad (1.22)$$

Questo significa che applicando l'operatore  $A^\dagger$  ad un'autostato di  $H_2$  se ne ottiene uno di  $H_1$  con lo stesso autovalore. Si noti la corrispondenza che si instaura tra gli autostati di  $H_1$  e quelli di  $H_2$ : l'operatore  $A$  trasforma autostati di  $H_1$  in autostati di  $H_2$ , mentre l'operatore  $A^\dagger$  opera la trasformazione inversa. Inoltre, per entrambe le trasformazioni i livelli energetici degli stati di partenza e di arrivo coincidono. L'unica eccezione a questa corrispondenza è costituita dallo stato fondamentale di  $H_1$ , cui non corrisponde un autostato in  $H_2$ ; questa mancanza ha importanti conseguenze e, come vedremo, racchiude in sé il carattere supersimmetrico dell'Hamiltoniano  $H_1$ .

Come si può notare, dalla relazione (1.22) segue che ad ogni autostato di  $H_2$  corrisponde un autostato di  $H_1$ , ottenuto tramite l'operatore  $A^\dagger$ , mentre ad ogni autostato di  $H_1$  ne corrisponde uno di  $H_2$ , fatta eccezione per lo stato fondamentale. Si intende dimostrare che gli autostati di  $H_2$  sono tutti e soli quelli ottenibili dagli autostati di  $H_1$  tramite l'operatore  $A$ . A tal fine si supponga di aver integrato l'Hamiltoniano  $H_1$ , per conoscerne lo spettro energetico; per assurdo esista uno stato legato di  $H_2$ , relativo all'autovalore di energia  $\bar{E}_n^{(2)}$ , e questo non sia presente nello spettro di  $H_1$ . Tale stato sia descritto dall'autofunzione  $\bar{\psi}_n^{(2)}(x)$ . Per quanto detto prima, applicando a  $\bar{\psi}_n^{(2)}(x)$  l'operatore  $A^\dagger$  si ottiene l'autofunzione di un autostato di  $H_1$  relativo all'autovalore  $\bar{E}_n^{(2)}$ . Ma poiché  $H_1$  è stato integrato e  $\bar{E}_n^{(2)}$  non figura nel suo spettro energetico, si giunge ad un assurdo, generato dall'aver supposto l'esistenza di uno stato di  $H_2$  corrispondente ad un autovalore non presente tra quelli di  $H_1$ . Si può concludere che gli autovalori di  $H_2$  sono unicamente quelli di  $H_1$ , senza l'autovalore di energia nulla: le autofunzioni di  $H_2$  sono tutte e sole quelle che si possono ottenere da quelle di  $H_1$  tramite l'azione dell'operatore  $A$ .



Questo risultato permette di affermare che il livello fondamentale dell'Hamiltoniano  $H_2$  è caratterizzato dall'autovalore di energia relativo al primo livello eccitato di  $H_1$ , in quanto non sono ammessi ulteriori autovalori di energia, in particolare negativi. Il primo stato legato per  $H_2$  è quello cui corrisponde l'autovalore di energia  $E_1^{(1)}$  e l'autofunzione relativa a questo stato è  $\psi_0^{(2)}(x) = A\psi_1^{(1)}(x)$ . Generalizzando questa conclusione per l' $n$ -esimo stato eccitato si può ottenere la relazione tra gli spettri energetici dei due Hamiltoniani partner:

$$E_0^{(1)} = 0 \quad (1.23)$$

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}. \quad (1.24)$$

Si considerino ora le autofunzioni dei due sistemi: gli operatori  $A$  e  $A^\dagger$  trasformano autostati di un Hamiltoniano in autostati dell'Hamiltoniano partner, caratterizzati dallo stesso autovalore di energia ma con parità diversa, come sarà spiegato a breve. Si può equivalentemente dire che trasformano le autofunzioni, rispettivamente creando o distruggendone un nodo: per questa proprietà sono chiamati operatori di creazione e distruzione. Analogamente a quanto fatto per gli autovalori di energia, si può scrivere la relazione tra le autofunzioni dei due Hamiltoniani partner,  $H_1$  e  $H_2$ :

$$A\psi_0^{(1)} = 0 \quad (1.25)$$

$$\psi_n^{(2)} = A\psi_{n+1}^{(1)} \quad (1.26)$$

$$\psi_{n+1}^{(1)} = A^\dagger\psi_n^{(2)}. \quad (1.27)$$

Queste relazioni valgono a meno di una costante di normalizzazione per le autofunzioni.

Occorre richiamare una nozione circa le funzioni d'onda per gli stati legati di un sistema: il numero quantico che indica il livello di eccitazione dello stato corrisponde al numero di nodi della funzione, per cui passando da un certo livello a quello eccitato adiacente la funzione d'onda corrispondente sarà caratterizzata da un nodo in più. Inoltre, aumentando in numero, i nodi si collocano in posizioni intermedie tra quelli preesistenti. Per potenziali simmetrici rispetto all'origine, le funzioni d'onda avranno parità definita rispetto all'inversione della coordinata. Il numero di nodi di una funzione permette di determinarne la parità: un numero dispari di nodi caratterizza una funzione antisimmetrica, mentre un numero pari di nodi una simmetrica. Lo stato di un sistema può essere caratterizzato come bosonico o fermionico (in termini molto generali) a seconda che la funzione d'onda sia rispettivamente pari o dispari.<sup>1</sup>

Riassumendo, si è partiti da un Hamiltoniano  $H_1$ , ne è stato costruito un altro,  $H_2$ , avente lo stesso spettro di energia privato del livello fondamentale; le autofunzioni di uno dei due possono essere ottenute dalle autofunzioni dell'altro tramite l'azione degli operatori  $A$  e  $A^\dagger$ . Emerge un primo vantaggio che si può ricavare da questo formalismo: considerando due Hamiltoniani partner, è possibile integrare il più semplice dei due ed ottenere le informazioni anche per il secondo. Nel prossimo capitolo ne verranno presentati esempi.

---

<sup>1</sup>Stati bosonici e fermionici sono caratterizzati da spin intero o semintero, rispettivamente. Nella nostra trattazione della supersimmetria in meccanica quantistica non ci riferiamo allo spin degli stati, ma al fatto di essere autostati di  $H_1$  o  $H_2$  e più genericamente alla loro parità.

### 1.3 Algebra di un sistema supersimmetrico

È possibile determinare le regole che definiscono l'algebra di un sistema supersimmetrico e che permettono una generalizzazione della definizione stessa di sistema supersimmetrico.

Considerando l'Hamiltoniano di partenza  $H_1$  ed il suo partner supersimmetrico  $H_2$  ottenuto tramite la (1.15), possiamo definire un Hamiltoniano  $H$ :

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & A A^\dagger \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

in uno spazio di Hilbert in cui il generico vettore di stato  $|\psi_n\rangle$  è definito nel seguente modo:

$$|\psi_n\rangle = \begin{pmatrix} \psi_n^{(1)} \\ \psi_n^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Il livello energetico corrispondente allo stato fondamentale è autovalore solo per  $H_1$ , per cui non è degenere per l'Hamiltoniano  $H$ ; tutti gli altri autovalori sono due volte degeneri, in quanto ad essi corrisponde un autostato per  $H_1$  ed uno per  $H_2$ . Definiamo altri due operatori, indicati con  $Q$  e  $Q^\dagger$ , che prendono il nome di supercariche:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix} \quad Q^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

Determiniamo le regole che definiscono l'algebra di un sistema supersimmetrico. I due operatori  $Q$  e  $Q^\dagger$  commutano con l'Hamiltoniano  $H$ :

$$[Q, H] = [Q^\dagger, H] = 0. \quad (1.31)$$

Questa proprietà, poiché  $Q$  e  $Q^\dagger$  non dipendono esplicitamente dal tempo, esprime la conservazione nel tempo delle supercariche. Si ricordi, infatti, l'equazione del moto di Heisenberg per un generico operatore  $O$ :

$$\frac{dO}{dt} = \frac{\partial O}{\partial t} + \frac{1}{i}[O, H]. \quad (1.32)$$

I due operatori  $Q$  e  $Q^\dagger$  sono inoltre nilpotenti e valgono le uguaglianze

$$\{Q, Q\} = \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0. \quad (1.33)$$

Infine, considerando l'anticommutatore tra i due operatori, vale la relazione:

$$\{Q, Q^\dagger\} = \{Q^\dagger, Q\} = H. \quad (1.34)$$

Una coppia di operatori che, insieme all'Hamiltoniano  $H$ , soddisfi le regole (1.31) (1.33) e (1.34) definisce un sistema supersimmetrico.

È interessante dare un'interpretazione di questo formalismo. Si consideri lo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  su cui agisce l'Hamiltoniano  $H$  come il prodotto diretto di due spazi. Il primo è quello generato dagli autostati dell'Hamiltoniano, in questo caso  $H_1$ ; il secondo è uno spazio la cui base è formata dagli autostati di un operatore detto numero fermionico. Uno spazio in cui ad ogni stato corrisponde un ben definito numero di entità caratterizzanti

il sistema si chiama spazio di Fock. In questo caso si sta trattando uno spazio di Fock generato dagli autostati dell'operatore numero fermionico  $N_f$ , che è definito nel seguente modo:

$$N_f = \frac{1 - \sigma_3}{2} = \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

con  $\sigma_3$  per indicare la terza matrice di Pauli. Gli autovalori di  $N_f$  sono 0 e 1: gli autostati dell'operatore sono quelli per cui nel sistema è presente un fermione, oppure nessuno. Nella rappresentazione tramite i ket essi sono espressi come

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

Si possono definire due operatori che incrementano o decrementano il numero di fermioni in un sistema, agendo su questi autostati. Essi sono rispettivamente

$$\psi^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.37)$$

Si osservi che

$$\{\psi, \psi\} = \{\psi^\dagger, \psi^\dagger\} = 0. \quad (1.38)$$

I due operatori sono nilpotenti, quindi applicati più di una volta su di un autostato generano il ket nullo indipendentemente dallo stato di partenza. Questa è una formalizzazione del principio di esclusione di Pauli: il numero fermionico non può essere incrementato se è già pari ad uno, né essere decrementato se è zero.

Gli autostati dell'Hamiltoniano  $H$  si ottengono come prodotto diretto tra gli autostati di  $H_1$  e quelli dello spazio fermionico, per cui il generico ket  $|\psi\rangle$  può essere scritto nella forma

$$|\psi\rangle = |n\rangle \otimes |n_f\rangle, \quad (1.39)$$

in cui  $n$  rappresenta il numero quantico di eccitazione per  $H_1$ . Ogni livello energetico è doppiamente degenere in quanto vi sono due stati, uno bosonico (con  $n_f = 0$ ) ed uno fermionico (con  $n_f = 1$ ), cui corrisponde la stessa energia. Il passaggio da uno all'altro prende il nome di trasformazione di supersimmetria, e avviene tramite gli operatori  $Q$  e  $Q^\dagger$ . La degenerazione non si presenta nel caso del livello fondamentale di energia. Infatti, secondo le ipotesi già fatte su  $H_1$ , l'Hamiltoniano  $H$  è definito positivo, per cui il valore di attesa per un qualunque ket  $|\psi\rangle$  è positivo [6]:

$$\langle \psi | H | \psi \rangle \geq 0. \quad (1.40)$$

Ricordando la relazione (1.34), si può riscrivere la (1.40) nel seguente modo:

$$\langle \psi | QQ^\dagger + Q^\dagger Q | \psi \rangle \geq 0, \quad (1.41)$$

ovvero

$$||Q^\dagger \psi\rangle|^2 + ||Q\psi\rangle|^2 \geq 0. \quad (1.42)$$

Nel caso dello stato fondamentale  $|\psi\rangle$ , il valore di aspettazione coincide con l'autovalore ed è nullo; poiché il primo membro della disequazione (1.42) è nullo solo se entrambi gli addendi sono nulli devono valere le relazioni

$$Q|0\rangle = Q^\dagger|0\rangle = 0. \quad (1.43)$$

Quindi lo stato fondamentale dell'Hamiltoniano rompe la degenerazione che caratterizza tutti gli altri livelli.

Considerando gli autostati di  $H$  se ne può dare una caratterizzazione differente da quella espressa nella definizione (1.39): si immagini di associare uno stato a ciascun quanto di energia che compone l'energia del livello, in modo che siano fermionici o bosonici. Di quanti nello stato fermionico ce ne può essere al più uno, mentre lo stato bosonico può essere occupato da un numero grande a piacere di quanti: gli stati dello spazio di Fock si distinguono per due numeri quantici, il numero di bosoni e di fermioni presenti nel sistema.

Il generico vettore di stato può essere espresso nella forma  $|n_b, n_f\rangle$ , in cui  $n_b$  e  $n_f$  costituiscono rispettivamente i numeri bosonici e fermionici. Il numero  $n_b$  può assumere qualunque valore intero, mentre  $n_f$  può assumere solo i valori 0 o 1.

Tramite gli operatori di creazione e distruzione  $\psi$  e  $\psi^\dagger$  nello spazio fermionico è possibile fattorizzare gli operatori  $Q$  e  $Q^\dagger$ :

$$Q^\dagger = A^\dagger \psi \qquad Q = A \psi^\dagger. \qquad (1.44)$$

Per spiegare l'azione degli operatori  $Q$  e  $Q^\dagger$  sui ket dello spazio  $\mathcal{H}$  si considerino questi come ket dello spazio di Fock identificato dai numeri fermionici e bosonici. Gli operatori  $\psi$  e  $\psi^\dagger$  agiscono sul numero fermionico di un generico autostato poiché agiscono sullo spazio generato dall'operatore  $N_f$ , mentre  $A$  e  $A^\dagger$  agiscono sugli stati dell'Hamiltoniano  $H_1$ : questi ultimi incrementano il numero quantico di eccitazione facendo quindi variare il numero bosonico, rispettivamente decrementando o incrementandolo di un'unità.

L'azione di  $Q$  su un generico stato  $|n_b, n_f\rangle$  può quindi essere espressa come [7]:

$$\begin{aligned} Q|n_b, n_f\rangle &= A\psi^\dagger|n_b, n_f\rangle \\ &= \left(A \otimes \mathbb{I}_f\right) \left(\mathbb{I} \otimes \psi^\dagger\right) |n_b, n_f\rangle \end{aligned} \qquad (1.45)$$

in cui  $\mathbb{I}_f$  e  $\mathbb{I}$  indicano rispettivamente le matrici unitarie negli spazi fermionico e degli autostati di energia. Questa scrittura è giustificata poiché lo spazio che si sta considerando è dato dal prodotto tensoriale tra lo spazio del numero fermionico e quello degli autostati di energia: segue che un operatore, agendo sul loro prodotto tensoriale, dev'essere scomposto nel prodotto tensoriale di due operatori, uno agente sul primo spazio ed uno sul secondo.

L'azione degli operatori  $A$  e  $A^\dagger$  si riconduce al decrementare o incrementare, rispettivamente, il numero quantico  $n_b$ , per cui si può scrivere

$$Q|n_b, n_f\rangle = A\psi^\dagger|n_b, n_f\rangle = |n_b - 1, n_f + 1\rangle. \qquad (1.46)$$

Si può quindi descrivere l'azione dell'operatore  $Q$  ricordando che  $A$  decrementa il livello di eccitazione di un autostato di energia dell'Hamiltoniano  $H_1$ , e di conseguenza il numero di quanti di energia ad esso associati. L'energia del sistema resta invariata in quanto contemporaneamente viene incrementato il numero dei quanti fermionici. Il numero complessivo di elementi del sistema è rimasto invariato, e non si è modificata l'energia dello stato; nel capitolo successivo si riprenderà quest'osservazione trattando il caso dell'oscillatore armonico.

Spieghiamo ancora l'azione dei due operatori  $Q$  e  $Q^\dagger$  considerando la prima rappresentazione dei ket nello spazio  $\mathcal{H}$  data dalla definizione (1.39). Si immagini la particella

in uno stato eccitato, per esempio fermionico (dipende dal numero di eccitazione, ovvero dal numero di zeri della funzione d'onda). Lo stato del sistema è descritto, nello spazio dell'operatore  $N_f$ , dal vettore  $|1\rangle$ . Applicando l'operatore  $Q^\dagger$  si ottiene il ket  $|0\rangle$ , ovvero si è eliminato lo stato fermionico, ma l'azione dell'altro operatore  $A$  ha comportato la creazione di uno stato bosonico: si è trasformato uno stato fermionico in uno bosonico. Questo è possibile in quanto ogni autovalore di energia relativo ad uno stato eccitato è doppiamente degenere, e a ciascuno corrispondono un autostato fermionico ed uno bosonico.

Applicando nuovamente l'operatore  $Q^\dagger$  allo stato ottenuto si ottiene il ket nullo, infatti l'operatore di decremento fermionico agisce sullo stato  $|0\rangle$  fornendo il vettore nullo, per cui risulta nullo tutto il prodotto tensoriale.

Si supponga ora la particella nello stato fondamentale: è uno stato bosonico poiché la funzione d'onda non presenta zeri ed è simmetrica rispetto all'origine. Lo stato fondamentale è quindi descritto nello spazio  $N_f$  dal vettore  $|0\rangle$ . Applicando l'operatore  $Q$  si ottiene il vettore  $|1\rangle$ , ovvero si è trasformato lo stato da bosonico in fermionico. Tuttavia quest'operazione produce il vettore nullo per la (1.43), quindi l'autovalore di energia relativo allo stato fondamentale non è degenere, ed è bosonico. Nel prossimo paragrafo si analizzeranno i casi di degenerazione nel livello fondamentale che caratterizzano la rottura della supersimmetria.

## 1.4 Violazione della supersimmetria e indice di Witten

Si consideri l'Hamiltoniano  $H$  definito nell'espressione (1.28) e sia  $|0\rangle$  il ket dello spazio  $\mathcal{H}$  relativo allo stato fondamentale; siano definite inoltre le supercariche  $Q$  e  $Q^\dagger$ . La supersimmetria del sistema si dice non violata se valgono le relazioni:

$$Q|0\rangle = Q^\dagger|0\rangle = 0. \quad (1.47)$$

La relazione (1.47) esprime il fatto che l'energia relativa allo stato fondamentale è un autovalore non degenere relativo ad uno stato bosonico del sistema. Nel paragrafo (1.3) abbiamo visto che l'Hamiltoniano  $H$  verifica questa condizione, infatti lo stato fondamentale è

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} \psi_0^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.48)$$

Ci si può porre il problema di verificare questa condizione o la sua violazione (rottura della supersimmetria) chiedendosi, nel caso in cui sia noto il superpotenziale  $W(x)$ , se da questo sia possibile costruire un Hamiltoniano supersimmetrico.

La condizione sulla funzione superpotenziale alla quale si presterà attenzione è [8]

$$|W(x)| \rightarrow \infty \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (1.49)$$

per ottenere uno spettro discreto di energia e la possibilità di trovare autofunzioni normalizzabili. A partire da  $W(x)$  si possono costruire gli operatori  $A$  e  $A^\dagger$ , e da questi i due Hamiltoniani  $H_1$  e  $H_2$ , usando per i rispettivi potenziali le definizioni (1.13) e (1.17). Per controllare se almeno uno dei due Hamiltoniani possiede un autostato di energia nullo, e

quindi considerare l'altro come partner supersimmetrico, si considerino separatamente le equazioni

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_0^{(1)}}{dx}(x) + \psi_0^{(1)}(x)W(x) &= 0 \\ \frac{d\psi_0^{(2)}}{dx}(x) - \psi_0^{(2)}(x)W(x) &= 0\end{aligned}\tag{1.50}$$

Dalle due equazioni (1.50) si ottengono le soluzioni

$$\psi_0^{(1,2)}(x) = N \exp\left(\mp \int^x W(t)dt\right)\tag{1.51}$$

in cui il segno  $-$  fornisce una soluzione alla prima equazione, il segno  $+$  alla seconda. Affinché le soluzioni dell'equazione siano funzioni d'onda per lo stato fondamentale con autovalore nullo di energia, è necessario che siano normalizzabili. Perché il sistema sia supersimmetrico è necessario che almeno una delle due soluzioni sia una funzione normalizzabile. Si supponga che la funzione  $\psi_0^{(1)}(x)$  sia normalizzabile, quindi il sistema formato dall'Hamiltoniano  $H_1$  e  $H_2$  è supersimmetrico: lo spettro di energia di  $H_1$  contiene l'autovalore per lo stato fondamentale nullo, mentre per  $H_2$  l'autovalore per il livello fondamentale coincide con quello del primo livello eccitato di  $H_1$ . In questo caso la supersimmetria si dice non violata: considerando l'Hamiltoniano  $H$ , ci si è ricondotti, con un diverso punto di partenza, alla situazione per lo stato fondamentale descritta dall'equazione (1.48).

La supersimmetria si dice violata se l'Hamiltoniano non ammette un autostato di energia nulla, ovvero nessuna delle due soluzioni della (1.51) è una funzione normalizzabile. In questo caso è comunque possibile definire gli operatori  $A$  e  $A^\dagger$ , ma essi non agiscono come nel caso della supersimmetria non violata.

Per avere un esempio di superpotenziale per il quale il carattere supersimmetrico o meno del sistema costruito dipende dai valori assunti da alcuni parametri, si consideri

$$W(x) = gx^n.\tag{1.52}$$

I parametri  $g$  e  $n$  determinano il carattere supersimmetrico del sistema formato dagli Hamiltoniani

$$\begin{aligned}H_1 &= -\frac{d^2}{dx^2} + gx^{2n} + ngx^{n-1} \\ H_2 &= -\frac{d^2}{dx^2} + gx^{2n} - ngx^{n-1}\end{aligned}\tag{1.53}$$

Per verificare se vi è una soluzione normalizzabile all'equazione di Schrödinger per lo stato fondamentale con relativo autovalore nullo si utilizza l'espressione (1.51). Analizzando la funzione  $\psi_0^{(1)}(x)$  si ottiene

$$\frac{d}{dx}\psi_0^{(1)}(x)\frac{1}{\psi_0^{(1)}(x)} = -gx^n\tag{1.54}$$

$$\ln[\psi_0^{(1)}(x)] = -\frac{g}{n+1}x^{n+1} + c\tag{1.55}$$

$$\psi_0^{(1)}(x) = c' \exp\left[-\frac{g}{n+1}x^{n+1}\right].\tag{1.56}$$

Se  $n$  è pari e  $g$  positivo la funzione  $\psi_0^{(1)}(x)$  si annulla nel limite  $x \rightarrow +\infty$  ma diverge se  $x \rightarrow -\infty$ . Cambiando il segno di  $g$  si invertono i risultati dei precedenti limiti, ma non si ottiene comunque una funzione normalizzabile. Considerando invece  $n$  dispari e  $g$  positivo la funzione è normalizzabile in quanto è pari, e tende a zero per  $x \rightarrow \pm\infty$ . Analoghi risultati si sarebbero ottenuti considerando  $\psi_0^{(2)}(x)$ , e imponendo  $n$  dispari e  $g$  negativo. Si può definire, quindi, il ket per lo stato fondamentale del sistema  $H$ , sostituendo l'espressione ottenuta dalla (1.54) nella (1.48).

Si consideri un Hamiltoniano,  $H_1$ , fattorizzato dai due operatori  $A$  e  $A^\dagger$ , e si costruisca l'Hamiltoniano partner  $H_2$  come effettuato nella (1.7) e (1.15). Se l'autovalore di energia per il livello fondamentale non è nullo si verifica la rottura della supersimmetria; cade la condizione imposta dall'equazione (1.11) in quanto

$$A^\dagger A \psi_0^{(1)}(x) = E_0^{(1)} \psi_0^{(1)}(x) \quad E_0^{(1)} \neq 0. \quad (1.57)$$

Si applichi l'operatore  $A$  ad entrambi i membri dell'equazione appena riportata: ricordando la definizione di  $H_2$  (1.15) risulta

$$H_2 A \psi_0^{(1)}(x) = E_0^{(1)} A \psi_0^{(1)}(x). \quad (1.58)$$

Si osservi quindi che l'Hamiltoniano  $H_2$  ammette l'autovalore di energia  $E_0^{(1)}$ , mentre nel caso di supersimmetria non violata ne era privo. Si può considerare il generico autostato di  $H_1$  descritto dall'autofunzione  $\psi_n^{(1)}(x)$  relativo all'autovalore  $E_n^{(1)}$ , ed osservare che a tale autostato ne corrisponde uno di  $H_2$ . Analogamente, considerando la generica autofunzione  $\psi_n^{(2)}(x)$  per un autostato di  $H_2$ , se  $E_n^{(2)}$  è il corrispondente autovalore di energia si ottiene l'equazione

$$H_1 A^\dagger \psi_0^{(1)}(x) = E_0^{(1)} A^\dagger \psi_0^{(1)}(x). \quad (1.59)$$

Si conclude che, come nel caso della supersimmetria non violata, gli operatori  $A$  e  $A^\dagger$  stabiliscono una relazione biunivoca tra le autofunzioni di  $H_1$  e quelle di  $H_2$ , mettendo in relazione autofunzioni relative agli stessi autovalori di energia. Gli spettri energetici dei due Hamiltoniani coincidono, e poiché possiedono entrambi lo stesso autovalore di energia per lo stato fondamentale, la relazione tra gli autovalori corrispondenti è

$$E_0^{(1)} \neq 0 \quad (1.60)$$

$$E_n^{(2)} = E_n^{(1)}. \quad (1.61)$$

Autovalori corrispondenti sono caratterizzati dallo stesso numero quantico, ovvero si riferiscono ad autostati ugualmente eccitati. Questa è la differenza tra un sistema che viola la supersimmetria ed uno che la rispetta: nasce dall'osservazione che entrambi gli Hamiltoniani sono caratterizzati dallo stesso autovalore per il livello fondamentale, e porta a concludere che si stabilisce una corrispondenza tra stati con numero quantico uguale, anziché diverso per un'unità.

Questa conclusione fa cadere un importante elemento dei sistemi supersimmetrici, ovvero la possibilità di mettere in relazione sistemi (bosonici e fermionici) caratterizzati dallo stesso livello di energia.

Nel modo in cui si modifica la relazione tra gli autovalori, si modifica anche quella tra le autofunzioni: a meno di una costante di normalizzazione si evince dalle equazioni (1.58) e (1.59) che

$$A\psi_0^{(1)} \neq 0 \quad (1.62)$$

$$\psi_n^{(2)} = A\psi_n^{(1)} \quad (1.63)$$

$$\psi_n^{(1)} = A^\dagger\psi_n^{(2)}. \quad (1.64)$$

Si mostrerà ora come si procede nello studio di un Hamiltoniano nel caso in cui vi sia uno spettro energetico discreto e limitato inferiormente, ma questo sia incognito. Sia  $\tilde{V}(x)$  un generico potenziale non singolare, e siano  $E_n$  e  $\psi_n(x)$ , al variare di  $n$ , rispettivamente lo spettro energetico e le autofunzioni del corrispondente Hamiltoniano. Sia  $\phi(x)$  una soluzione, non necessariamente autofunzione, dell'equazione di Schrödinger con autovalore  $\epsilon$ : l'assunzione appena fatta ha senso in quanto  $\phi(x)$  potrebbe verificare l'equazione ma non essere normalizzabile, e quindi un'autofunzione.

L'equazione in esame è

$$-\phi''(x) + \tilde{V}(x)\phi(x) = \epsilon\phi(x) \quad (1.65)$$

L'unica condizione che si impone su  $\phi(x)$  è che sia priva di nodi e si annulli per  $x \rightarrow -\infty$ . Si definisce il superpotenziale  $W_\phi(x)$  come segue:

$$W_\phi(x) = -\frac{\phi'(x)}{\phi(x)}. \quad (1.66)$$

Segue quindi la definizione del potenziale associato a  $W_\phi(x)$ ,

$$\begin{aligned} V_{1\phi}(x) &= W_\phi(x)^2 - W'_\phi(x) \\ &= \frac{\phi'^2(x)}{\phi^2(x)} - \frac{\phi'^2(x) - \phi''(x)\phi(x)}{\phi^2(x)} \\ &= \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} \\ &= \tilde{V}(x) - \epsilon \end{aligned} \quad (1.67)$$

Il pedice 1 serve a distinguere il potenziale definito  $V_{2\phi}(x)$  da

$$V_{2\phi}(x) = W_\phi(x)^2 + W'_\phi(x) \quad (1.68)$$

Gli autovalori dell'Hamiltoniano contenente  $V_{1\phi}(x)$  sono, vista l'espressione ottenuta nell'espressione (1.67),

$$E_{n\phi} = E_n - \epsilon \quad (1.69)$$

I casi che si possono presentare sono tre, a seconda che la differenza  $E_0 - \epsilon$ , ovvero  $E_{n\phi}$ , sia positiva, nulla o negativa; verranno tuttavia considerati solo i primi due casi, in quanto il terzo implica dei nodi nella funzione  $\phi(x)$ , ovvero delle singolarità nel superpotenziale e nei potenziali.



Se la differenza è strettamente positiva si è ottenuto un sistema che viola la supersimmetria, infatti  $W_\phi(x)$  può essere visto come un superpotenziale che genera un sistema che non ammette uno stato fondamentale ad energia nulla, ovvero degenerare e quindi in cui la supersimmetria è rotta.

Se la differenza è nulla il superpotenziale considerato genera un sistema supersimmetrico: poiché vale l'uguaglianza  $E_0 = \epsilon$  deve necessariamente risultare che la funzione da cui si è partiti coincida con l'autofunzione  $\psi_0(x)$ . In questo caso si è conclusa la ricerca di un superpotenziale che permetta di fattorizzare l'Hamiltoniano.

Il carattere supersimmetrico di un sistema può essere determinato tramite il valore di un parametro, noto come indice di Witten. Per poterlo calcolare occorre conoscere lo spettro degli autostati di un sistema. Si consideri l'operatore numero fermionico  $N_f$ , di seguito indicato con  $F$ , definito nell'espressione (1.35): si definisce l'indice di Witten

$$\Delta = Tr [(-1)^F]. \quad (1.70)$$

Segue quindi il calcolo di  $(-1)^F$ . Poiché  $(-1) = e^{i\pi}$  abbiamo:

$$\begin{aligned} (-1)^F &= \exp [i\pi F] \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\pi)^k F^k}{k!} = \mathbb{I} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(i\pi)^k F^k}{k!} = \mathbb{I} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(i\pi)^k F}{k!} = \mathbb{I} + F \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\pi)^k}{k!} - F \\ &= \mathbb{I} - 2F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Si è ottenuto un operatore avente come possibili autovalori  $+1$  e  $-1$ . Applicando quest'operatore ad uno stato del sistema ne viene determinata la parità: considerando due stati, uno fermionico  $|f\rangle$  ed uno bosonico  $|b\rangle$ , valgono le seguenti uguaglianze:

$$(-1)^F |f\rangle = -|f\rangle \quad (1.72)$$

$$(-1)^F |b\rangle = |b\rangle. \quad (1.73)$$

Per calcolare la traccia dell'operatore: si procede sommando i valori di attesa dell'operatore, calcolati per ogni possibile stato:

$$\Delta = \sum_k \langle k | (-1)^F | k \rangle \quad (1.74)$$

Nell'espressione precedente  $|k\rangle$  è un autostato di energia con due componenti relative ai corrispondenti stati fermionici e bosonici. Considerando un generico stato in cui entrambe le componenti del ket  $|k\rangle$  siano non nulle, il valore di attesa dell'operatore  $(-1)^F$  è nullo: per un sistema formato da due Hamiltoniani partner il valore d'attesa per un qualunque stato diverso da quello fondamentale è necessariamente nullo in quanto gli spettri energetici coincidono, e quindi deve valere la corrispondenza tra gli autostati. Il contributo all'indice di Witten proviene dal valore d'attesa dell'operatore per lo stato fondamentale: nel caso di supersimmetria violata esso è nullo, in quanto per entrambi gli Hamiltoniani vi è uno stato con la stessa energia minima, quindi  $\Delta = 0$ . Nel caso in cui

la supersimmetria non sia violata, invece, il valore d'attesa è uno in quanto la seconda componente del ket  $|0\rangle$  è nulla. Si possono definire quindi i valori che l'indice di Witten può assumere: zero in caso di supersimmetria violata, +1 nel caso di supersimmetria non rotta. Il significato che si può attribuire all'indice di Witten è di numero intero che fornisce la differenza tra il numero di stati dei due sistemi partner: in caso di violazione della supersimmetria tale differenza è nulla, mentre è diversa da zero nel caso in cui la supersimmetria sia verificata. Indicando con  $N_+(E=0)$  il numero di stati bosonici con energia nulla e con  $N_-(E=0)$  il corrispondente numero di stati fermionici, l'indice di Witten è:

$$\Delta = N_+(E=0) - N_-(E=0). \quad (1.75)$$

Concludiamo ricordando che abbiamo applicato il formalismo della supersimmetria unicamente agli stati legati di un sistema. È possibile tuttavia un'estensione dello studio al caso di una particella non legata: il formalismo consente di stabilire delle relazioni tra i coefficienti di trasmissione e riflessione associati al problema della particella in moto nei potenziali  $V_1(x)$  e  $V_2(x)$ . Questo argomento non sarà trattato nella tesi.

## 1.5 Fattorizzazioni successive di un Hamiltoniano

Nel paragrafo (1.1) si è considerato un Hamiltoniano  $H_1$  avente uno spettro energetico discreto e limitato inferiormente; indicata con  $E_0^{(1)}$  l'energia dello stato fondamentale si è definita la funzione superpotenziale  $W(x)$  e, tramite questa, gli operatori  $A$  e  $A^\dagger$  in modo che risultasse

$$\begin{aligned} H_1 &= A^\dagger A + E_1^{(0)} \\ &= -\frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) - W'(x) + E_1^{(0)} \\ &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x). \end{aligned} \quad (1.76)$$

Successivamente si è costruito l'Hamiltoniano partner supersimmetrico  $H_2$ :

$$\begin{aligned} H_2 &= AA^\dagger + E_1^{(0)} \\ &= -\frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) + W'(x) + E_1^{(0)} \\ &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x). \end{aligned} \quad (1.77)$$

Ricordando la relazione (1.14), indicando con  $\psi_0^{(1)}(x)$  la funzione d'onda per lo stato fondamentale di  $H_1$ , si può esprimere  $V_2(x)$  nella forma:

$$\begin{aligned} V_2(x) &= V_1(x) + 2W'(x) \\ &= V_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln \left( \psi_0^{(1)}(x) \right). \end{aligned} \quad (1.78)$$

Si vuole ripetere ora lo stesso procedimento, applicandolo all'Hamiltoniano  $H_2$ : si indicheranno d'ora in poi con  $A_i$  e  $A_i^\dagger$  gli operatori definiti per la fattorizzazione dell' $i$ -esimo

Hamiltoniano, e con  $W_i(x)$  il relativo superpotenziale. Ad esempio, gli operatori  $A$ ,  $A^\dagger$  e la funzione  $W(x)$  saranno indicati con  $A_1$ ,  $A_1^\dagger$  e  $W_1(x)$  rispettivamente. Considerando la relazione (1.23), l'energia del livello fondamentale di  $H_2$  è

$$E_0^{(2)} = E_1^{(1)}. \quad (1.79)$$

Si supponga quindi di poter costruire la funzione superpotenziale  $W_2(x)$  e dedurre da questa gli operatori  $A_2$  e  $A_2^\dagger$  tali che risulti

$$\begin{aligned} H_2 &= A_2^\dagger A_2 + E_2^{(0)} \\ &= -\frac{d^2}{dx^2} + W_2^2(x) - W_2'(x) + E_1^{(1)} \\ &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x). \end{aligned} \quad (1.80)$$

Indicando con  $\psi_0^{(2)}(x)$  la funzione d'onda relativa allo stato fondamentale per l'Hamiltoniano  $H_2$  si può definire

$$\begin{aligned} V_3(x) &= W_2^2(x) + W_2'(x) + E_1^{(1)} \\ &= V_2(x) + 2W_2'(x) \\ &= V_2(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln(\psi_0^{(2)}(x)) \\ &= V_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln(\psi_0^{(1)}(x)) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln(\psi_0^{(2)}(x)) \\ &= V_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln(\psi_0^{(1)}(x)\psi_0^{(2)}(x)). \end{aligned} \quad (1.81)$$

Ne segue la definizione dell'Hamiltoniano partner supersimmetrico di  $H_2$ ,

$$\begin{aligned} H_3 &= A_2 A_2^\dagger + E_1^{(1)} \\ &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_3(x). \end{aligned} \quad (1.82)$$

La relazione tra gli autovalori di energia è:

$$E_n^{(3)} = E_{n+1}^{(2)} = E_{n+2}^{(1)}. \quad (1.83)$$

Quindi, la fattorizzazione dell'Hamiltoniano  $H_2$  ne ha generato un altro caratterizzato dallo stesso spettro energetico discreto, ma privato del livello energetico corrispondente allo stato fondamentale:  $H_3$  ha come autovalore di energia per lo stato fondamentale quello corrispondente al secondo livello eccitato di  $H_1$ . Tramite il superpotenziale  $W_2(x)$  si possono definire gli operatori  $A_2$  e  $A_2^\dagger$ , applicando la definizione (1.8); con questi si possono ottenere le autofunzioni dell'Hamiltoniano  $H_3$  a partire da quelle di  $H_1$ , infatti a meno di una costante di normalizzazione si osserva che

$$\begin{aligned} \psi_n^{(3)}(x) &= A_2 \psi_{n+1}^{(2)}(x) \\ &= A_2 A_1 \psi_{n+2}^{(1)}(x). \end{aligned} \quad (1.84)$$

Il processo di fattorizzazioni successive per un Hamiltoniano può essere ripetuto per ogni livello energetico dello spettro discreto, portando così alla costruzione di una famiglia di Hamiltoniani partner, in cui lo spettro energetico dell'Hamiltoniano  $m$ -esimo è privato dei primi  $m - 1$  autovalori di  $H_1$ .

Si possono generalizzare le relazioni (1.81), (1.83) e (1.84), scritte per i potenziali, gli autovalori di energia e le autofunzioni dei primi tre Hamiltoniani, ottenendo:

$$V_m(x) = V_1(x) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \left( \psi_0^{(m-1)}(x) \dots \psi_0^{(1)}(x) \right) \quad (1.85)$$

$$\psi_n^{(m)}(x) = A_{m-1} \dots A_1 \psi_{n+m-1}^{(1)}(x) \quad (1.86)$$

$$\psi_n^{(1)}(x) = A_1^\dagger \dots A_{n-1}^\dagger \psi_0^{(n)}(x) \quad (1.87)$$

$$E_n^{(m)} = E_{n+m-1}^{(1)}. \quad (1.88)$$

Si supponga di voler studiare le autofunzioni per gli stati legati di un Hamiltoniano con spettro discreto limitato inferiormente: il generico livello eccitato  $n$ -esimo può essere studiato costruendo l'Hamiltoniano  $H_n$  e calcolandone l'autofunzione per lo stato fondamentale. Quest'operazione può talvolta risultare più semplice rispetto all'integrazione diretta dell'Hamiltoniano, in quanto il calcolo di un'autofunzione per lo stato fondamentale garantisce che la soluzione cercata sia priva di nodi. Nel prossimo capitolo verrà presentato un esempio, integrando un Hamiltoniano mediante questo procedimento.

# Capitolo 2

## Applicazione della supersimmetria a tre problemi di meccanica quantistica

In questo capitolo sono studiati tre sistemi quantistici: una particella in un pozzo di potenziale, in un potenziale armonico ed in una buca di potenziale con  $V(x) \sim -\text{sech}^2 x$ . Questi sistemi sono trattati tramite il formalismo della supersimmetria: si considera per ciascuno il superpotenziale ed il potenziale partner, e si ricavano le autofunzioni per gli stati legati ed i relativi autovalori di energia.

Lo studio è stato effettuato con l'ausilio del programma di analisi simbolica *Mathematica* [9]. In particolare, sono state realizzate due procedure che utilizzano diverse informazioni iniziali per ogni sistema in esame. La prima, indicata con procedura 1, ha per argomenti la funzione superpotenziale e la variabile posizione, ed utilizza le relazioni (1.13) e (1.17) per calcolare i due potenziali partner  $V_1(x)$  e  $V_2(x)$ . La seconda, chiamata procedura 2, riceve in input la funzione d'onda relativa allo stato fondamentale del sistema e la variabile posizione, calcola la funzione superpotenziale  $W(x)$  e genera gli operatori di creazione e distruzione  $A^\dagger$  e  $A$  definiti dalla relazione (1.8).

### 2.1 Pozzo di potenziale

Si consideri il seguente potenziale  $V(x)$ :

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & x < 0, \quad x > L \\ 0 & 0 < x < L \end{cases} \quad (2.1)$$

L'equazione di Schödinger (1.4) all'interno del pozzo, per l'autofunzione  $\psi_n(x)$  relativa all'autovalore  $E_n$  è

$$-\psi_n''(x) = E_n \psi_n(x), \quad (2.2)$$

con autofunzioni e relativi autovalori di energia

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad E_n = \frac{\pi^2 n^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Si noti che allo stato fondamentale non corrisponde un autovalore di energia nullo. Consideriamo la funzione d'onda per tale stato, ottenuta per  $n = 1$  nelle relazioni (2.3), ed applichiamo la procedura 2 per calcolare il superpotenziale

$$W(x) = -\pi \cot \frac{\pi x}{L}, \quad (2.4)$$

mostrato in figura (2.1).

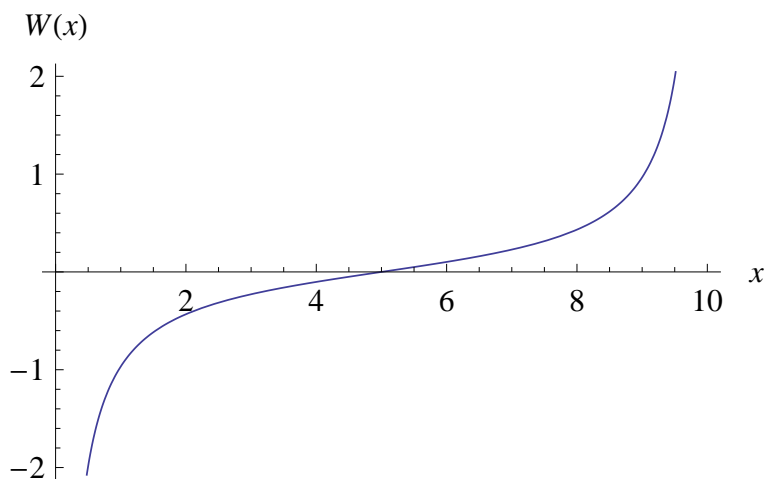


Figura 2.1: Pozzo di potenziale: superpotenziale  $W(x)$ , ( $L = 10$ ).

Noto il superpotenziale, si è applicata la procedura 1 per calcolare i potenziali  $V_1(x)$  e  $V_2(x)$ , riportati in figura (2.2): si consideri fissata la larghezza del pozzo  $L = 10$ .

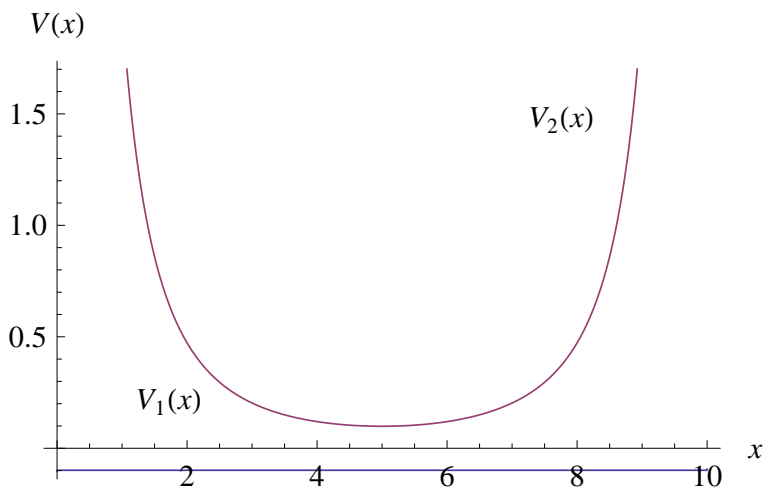


Figura 2.2: Pozzo di potenziale: potenziali partner  $V_1(x)$  e  $V_2(x)$ .

Per i potenziali  $V_1(x)$  e  $V_2(x)$  si ottengono le funzioni:

$$\begin{aligned} V_1(x) &= \frac{\pi^2}{100} \left( \cot^2 \frac{\pi x}{10} - \csc^2 \frac{\pi x}{10} \right) \\ V_2(x) &= \frac{\pi^2}{100} \left( \cot^2 \frac{\pi x}{10} + \csc^2 \frac{\pi x}{10} \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Il potenziale  $V_1(x)$  descrive un pozzo di potenziale, ma il suo valore in un generico punto al suo interno è dato da  $-\frac{\pi^2}{100}$  anziché zero. Il fondo del pozzo è stato, quindi, traslato di una quantità pari all'autovalore di energia  $E_1$ , e per  $V_1(x)$  l'energia relativa allo stato fondamentale è nulla. Per  $V_1(x)$  le relazioni nella (2.3) si modificano, diventando:

$$\psi_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{10}} \sin \frac{(n+1)\pi x}{10} \quad E_n^{(1)} = \frac{\pi^2((n+1)^2 - 1)}{100} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

I nuovi autovalori di energia, espressi in unità di  $\frac{\pi^2}{100}$ , sono  $0, 3, 8, \dots$ . Le autofunzioni dell'Hamiltoniano partner  $H_2$ , contenente il potenziale  $V_2(x)$ , si ottengono tramite le relazioni (1.25): partendo dalla funzione d'onda  $\psi_0^{(1)}(x)$  si generano gli operatori  $A$  e  $A^\dagger$  con la procedura 2. Si può osservare che  $A\psi_0^{(1)}(x) = 0$ , e procedere quindi nel calcolo delle autofunzioni di  $H_2$ . Si consideri  $\psi_1^{(1)}(x)$  per calcolare la funzione d'onda per lo stato fondamentale di  $H_2$ :

$$\begin{aligned} \psi_0^{(2)}(x) &= A\psi_1^{(1)}(x) \\ &= \frac{\pi}{5\sqrt{5}} \left( \cos \frac{\pi x}{5} - \frac{1}{2} \cot \frac{\pi x}{10} \sin \frac{\pi x}{5} \right) \\ &= -\frac{\pi}{5\sqrt{5}} \sin \frac{\pi x}{10}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Questo primo esempio mostra il comportamento delle autofunzioni degli Hamiltoniani partner descritto nel paragrafo (1.1): si osservi il grafico in figura (2.3) in cui ciascuna autofunzione è stata traslata rispetto all'asse  $x$  di una quantità pari al corrispondente autovalore di energia, in unità di  $\frac{\pi^2}{100}$ . L'autofunzione per lo stato fondamentale di

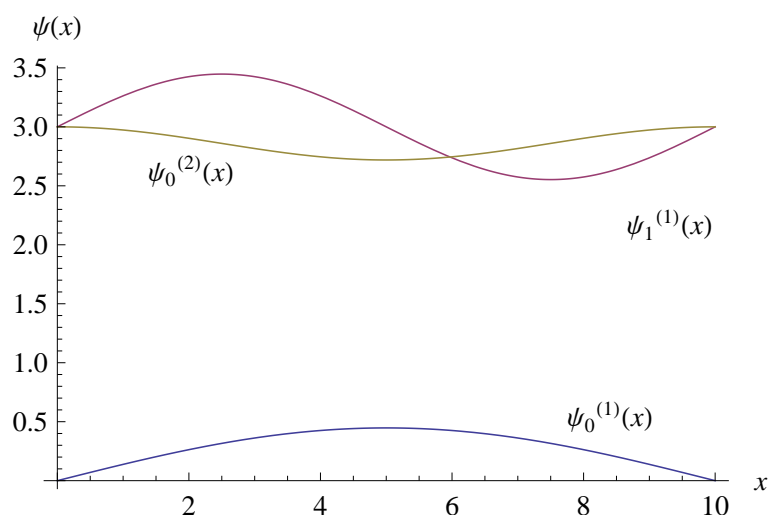


Figura 2.3: Confronto tra le prime autofunzioni di  $H_1$  e  $H_2$ .

$H_1$  non ha corrispettivo allo stesso livello in  $H_2$ , mentre in corrispondenza del secondo autovalore di energia ci sono le autofunzioni di entrambi gli Hamiltoniani. L'autofunzione

per  $H_1$  ha un nodo, poiché descrive il primo livello eccitato, mentre  $\psi_0^{(2)}(x)$  non possiede nodi, in quanto relativa allo stato fondamentale di  $H_2$ . In questo esempio abbiamo fattorizzato un Hamiltoniano secondo il procedimento presentato nel paragrafo (1.1), e verificato le osservazioni sulla connessione tra sistemi partner supersimmetrici. Si noti che i due sistemi partner mostrano difficoltà di approccio diverse: l'Hamiltoniano  $H_1$  è più semplice da integrare di  $H_2$ , ed il formalismo permette lo studio del secondo partendo dal primo.

## 2.2 Oscillatore armonico

L'Hamiltoniano di un oscillatore armonico è:

$$H = p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2. \quad (2.8)$$

L'integrazione usuale di  $H$  procede mediante la definizione di due operatori,  $a$  e  $a^\dagger$ :

$$a = \frac{p - i\omega x}{\sqrt{\omega}} \quad a^\dagger = \frac{p + i\omega x}{\sqrt{\omega}}. \quad (2.9)$$

Si ottiene che lo spettro dell'Hamiltoniano è limitato inferiormente, con valore minimo ( $\hbar = 1$ )

$$E_0 = \frac{\omega}{2}. \quad (2.10)$$

Si dimostra, inoltre, che considerando un autostato  $|\psi\rangle$  di  $H$  relativo all'autovalore  $E \neq E_0$ , i ket  $a|\psi\rangle$  e  $a^\dagger|\psi\rangle$  sono ancora autostati dell'Hamiltoniano, relativi rispettivamente agli autovalori  $E - \omega$  e  $E + \omega$ . Gli operatori  $a$  e  $a^\dagger$  agiscono, quindi, trasformando autostati dell'Hamiltoniano in autostati dello stesso, incrementando il corrispondente autovalore di energia di un quanto pari ad  $\omega$ .

Si noti che l'azione di  $a$  e  $a^\dagger$  è differente da quella degli operatori  $A$  e  $A^\dagger$  in quanto non cambia l'Hamiltoniano di cui sono autostati, mentre cambia l'autovalore di energia corrispondente.

Lo spettro degli autovalori dell'Hamiltoniano è discreto, a causa dell'azione degli operatori di creazione e distruzione  $a^\dagger$  e  $a$ : la distanza tra un autovalore e quelli adiacenti è  $\omega$ ; lo spettro è limitato inferiormente ma non superiormente, come mostrato nella (2.10), ed il generico autovalore  $E_n$  è:

$$E_n = \omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

Inoltre, l'Hamiltoniano può essere scritto come

$$H = \omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right), \quad (2.12)$$

per cui gli autostati dell'Hamiltoniano sono autostati anche dell'operatore numero  $N$ ,

$$N = a^\dagger a, \quad N|n\rangle = n|n\rangle, \quad (2.13)$$

con  $|n\rangle$  autostato  $n$ -esimo dell'Hamiltoniano.



Per utilizzare la supersimmetria si definisce l'Hamiltoniano  $H_1$  in modo che l'autovalore di energia per lo stato fondamentale sia nullo: per la definizione di  $N$ , dalla relazione (2.10) segue che

$$H_1 = \omega N = \omega a^\dagger a = A^\dagger A. \quad (2.14)$$

Gli operatori  $a$  e  $a^\dagger$  coincidono a meno di un fattore con  $A$  e  $A^\dagger$  definiti nella (1.8). Si consideri la relazione di commutazione:

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad [A, A^\dagger] = \omega, \quad (2.15)$$

da cui segue che l'Hamiltoniano partner,  $H_2$ , è definito dalla relazione

$$H_2 = AA^\dagger = A^\dagger A + \omega = H_1 + \omega = H + \frac{\omega}{2}. \quad (2.16)$$

Gli autostati dei due Hamiltoniani sono collegati dall'azione degli operatori  $A$  e  $A^\dagger$ , ovvero  $a$  e  $a^\dagger$ : gli autostati di  $H_2$  ottenuti applicando l'operatore  $a$  sono, quindi, anche autostati di  $H_1$ , e viceversa se si considera  $a^\dagger$ . Segue che i due Hamiltoniani descrivono lo stesso sistema, a parte l'autostato per il livello fondamentale di  $H_1$ , assente in  $H_2$ . In questo caso si può così definire l'Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  introdotto nella (1.28):

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H - \frac{\omega}{2} & 0 \\ 0 & H + \frac{\omega}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\sigma_3\omega. \quad (2.17)$$

## 2.3 Potenziale $V(x) \sim -\text{sech}^2 x$

In questo paragrafo studieremo l'Hamiltoniano di una particella soggetta all'azione del potenziale [10]

$$V(x) = -V_0 \text{sech}^2 x, \quad (2.18)$$

per determinarne autovalori ed autofunzioni degli stati legati: il problema sarà risolto sia risolvendo l'equazione di Schrödinger che applicando il metodo di fattorizzazioni successive dell'Hamiltoniano. In figura (2.4) è riportato il potenziale, con  $V_0 = 12$ : uno stato è legato se  $E > V(x)$  in una regione limitata dell'asse  $x$ , ovvero se  $E < 0$ .

### 2.3.1 Integrazione dell'equazione di Schrödinger

L'equazione di Schrödinger da risolvere è:

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) - V_0 \text{sech}^2 x \psi(x) = E\psi(x), \quad (2.19)$$

in cui  $\psi(x)$  è un'autofunzione di  $H$  ed  $E$  il relativo autovalore di energia.

Effettuando la sostituzione  $\xi = \tanh x$ , ed osservando che

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = \frac{d^2\xi}{dx^2} \frac{d}{d\xi}\psi(\xi) + \frac{d\xi}{dx} \frac{d^2}{d\xi^2}\psi(\xi), \quad (2.20)$$

si ottiene l'equazione

$$-2\xi(1-\xi^2) \frac{d}{d\xi}\psi(\xi) + (1-\xi^2) \frac{d^2}{d\xi^2}\psi(\xi) + [E + V_0(1-\xi^2)]\psi(\xi) = 0. \quad (2.21)$$

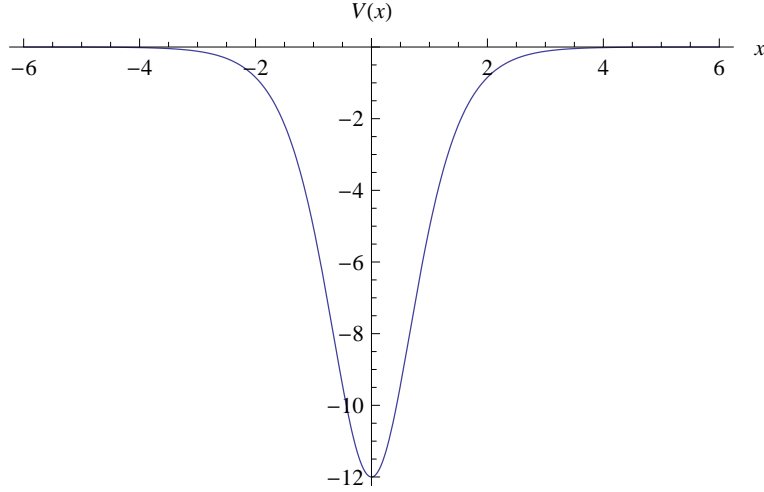


Figura 2.4: Potenziale  $V(x) = -12\text{sech}^2 x$ .

Per  $E < 0$ , se si introducono i parametri

$$\epsilon = \sqrt{-E}, \quad s = \frac{1}{2} \left[ -1 + \sqrt{4V_0 + 1} \right] \implies s(s+1) = V_0, \quad (2.22)$$

l'equazione (2.21) diventa:

$$-2\xi(1-\xi^2) \frac{d}{d\xi} \psi(\xi) + (1-\xi^2) \frac{d^2}{d\xi^2} \psi(\xi) + \left[ -\epsilon^2 + s(s+1)(1-\xi^2) \right] \psi(\xi) = 0, \quad (2.23)$$

ovvero

$$\frac{d}{d\xi} \left[ (1-\xi^2) \frac{d}{d\xi} \psi(\xi) \right] + \left[ s(s+1) - \frac{\epsilon^2}{(1-\xi^2)} \right] \psi(\xi) = 0. \quad (2.24)$$

Abbiamo ottenuto l'equazione di Legendre generalizzata: se  $s$  è un intero positivo ed  $\epsilon$  un intero, tale che

$$|\epsilon| \leq s, \quad (2.25)$$

le soluzioni sono i polinomi associati di Legendre nella variabile  $\tanh x$ , ovvero:

$$P_s^\epsilon(\tanh x) = \frac{(-1)^s}{2^s s!} (1 - \tanh^2 x)^{\frac{|\epsilon|}{2}} \frac{d^{s+\epsilon}}{dx^{s+\epsilon}} (1 - \tanh^2 x)^s. \quad (2.26)$$

Scegliere  $s$  ed  $\epsilon$  interi permette di ottenere soluzioni non discontinue in  $\xi = \pm 1$ , ovvero nei punti di discontinuità dei coefficienti dell'equazione. Imporre la regolarità in  $\xi = \pm 1$  equivale ad imporla, per la definizione di  $\xi$ , nei punti  $x = \pm\infty$ : questo è fondamentale per ottenere soluzioni normalizzabili, che possano essere funzioni d'onda.

Operando la sostituzione ed il cambio di variabile

$$\psi(\xi) = (1-\xi^2)^{\frac{\epsilon}{2}} \omega(\xi), \quad u = \frac{1}{2}(1-\xi) \quad (2.27)$$

si ottiene l'equazione ipergeometrica

$$u(1-u)\omega'' + (\epsilon+1)(1-2u)u' - (\epsilon-s)(\epsilon+s+1)\omega = 0. \quad (2.28)$$

Le soluzioni per quest'equazione sono in genere note come serie di potenze, che tuttavia si riducono a polinomi finiti di grado  $n$  imponendo la relazione

$$s - \epsilon = n. \quad (2.29)$$

Il valore di  $s$  è fissato dal potenziale, per cui scegliamo  $s = 3$  in modo che  $V_0 = 12$ . Il numero quantico  $n$  varia, quindi, in funzione di  $\epsilon$ ;  $\epsilon$  può assumere i valori compresi tra  $-3$  e  $3$ , per la relazione (2.25), ma bisogna escludere quelli negativi per la definizione (2.22). Dalla condizione (2.29) si deducono i possibili valori di  $\epsilon$  ed i conseguenti valori di  $n$ :

$$\begin{aligned} n = 0 &\iff \epsilon = 3 \\ n = 1 &\iff \epsilon = 2 \\ n = 2 &\iff \epsilon = 1 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Sono, quindi, ammessi tre stati legati per l'Hamiltoniano considerato, e dalle relazioni (2.22) e (2.26) si ottengono gli autovalori ed autofunzioni, definite a meno di un coefficiente di normalizzazione, relative agli stati legati:

$$\begin{aligned} E_0 = -9, \quad \psi_0(x) &= P_3^3(\tanh x) = -\operatorname{sech}^3 x \\ E_1 = -4, \quad \psi_1(x) &= P_3^2(\tanh x) = \tanh x \operatorname{sech}^2 x \\ E_2 = -1, \quad \psi_2(x) &= P_3^1(\tanh x) = \operatorname{sech} x (5 \tanh^2 x - 1). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Come si può vedere nella figura (2.5), l'incremento del numero quantico determina un aumento dei nodi delle autofunzioni e, di conseguenza, l'inversione della loro parità.

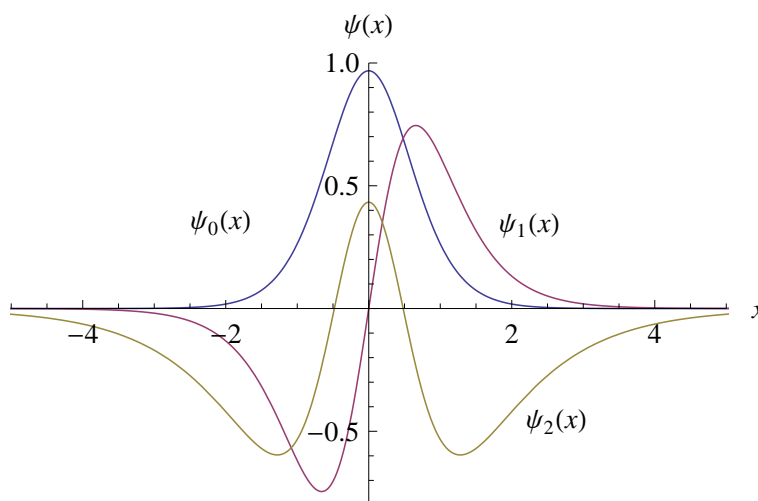


Figura 2.5: Autofunzioni per gli stati legati in eq. (2.31).

### 2.3.2 Integrazione mediante fattorizzazioni successive dell'Hamiltoniano

Il punto di partenza è la conoscenza degli autovalori di energia corrispondenti agli stati legati del sistema, ed inizialmente  $E_0$  in particolare, per definire il potenziale  $V_1(x)$ :

$$V_1(x) = V(x) + E_0 = -12\operatorname{sech}^2 x + 9, \quad (2.32)$$

da cui segue che

$$H_1 = -\frac{d^2}{dx^2} - 12\text{sech}^2x + 9. \quad (2.33)$$

L'equazione di Schrödinger per la funzione d'onda relativa allo stato fondamentale di  $H_1$ , osservando che l'autovalore corrispondente è nullo, è:

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi_0^{(1)}(x) + (9 - 12\text{sech}^2x)\psi_0^{(1)}(x) = 0. \quad (2.34)$$

Risolvendo analiticamente l'equazione differenziale si ottiene una combinazione lineare di due soluzioni: imponendo la normalizzabilità della funzione una delle due soluzioni viene scartata, per cui la funzione normalizzata ottenuta è:

$$\psi_0^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{15}{16}}\text{sech}^3x. \quad (2.35)$$

Applicando la procedura 2 è possibile, quindi, calcolare il superpotenziale  $W_1(x)$ , ottenendo

$$W_1(x) = 3 \tanh x, \quad (2.36)$$

in cui si è utilizzato l'indice 1 per distinguerlo dai successivi che saranno definiti; l'andamento del superpotenziale è mostrato nella figura (2.6). Inoltre è possibile definire, secondo la definizione (1.8), gli operatori  $A_1$  e  $A_1^\dagger$ , in cui l'indice 1 indica che sono calcolati a partire da  $W_1(x)$ . Applicando la procedura 1 è possibile verificare il potenziale

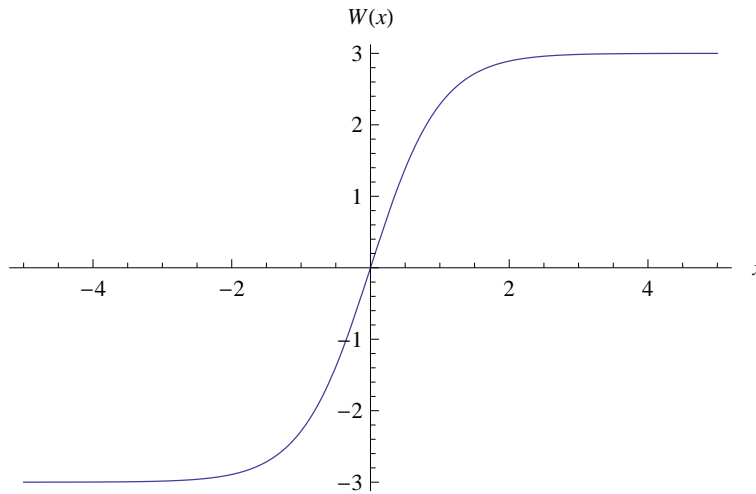


Figura 2.6: Superpotenziale  $W_1(x)$ .

$V_1(x)$  e calcolare il potenziale  $V_2(x)$ :

$$\begin{aligned} V_1(x) &= -3\text{sech}^2x + 9 \tanh x = 9 - 12\text{sech}^2x \\ V_2(x) &= +3\text{sech}^2x + 9 \tanh x = 9 - 6\text{sech}^2x. \end{aligned} \quad (2.37)$$

In figura (2.7) sono mostrati  $V(x)$ ,  $V_1(x)$  e  $V_2(x)$ , per evidenziare che  $V_1(x)$  è solo traslato rispetto a  $V(x)$ , mentre  $V_2(x)$  appare deformato, ma la forma non cambia, diversamente da quanto si è visto nel caso dell'oscillatore armonico.

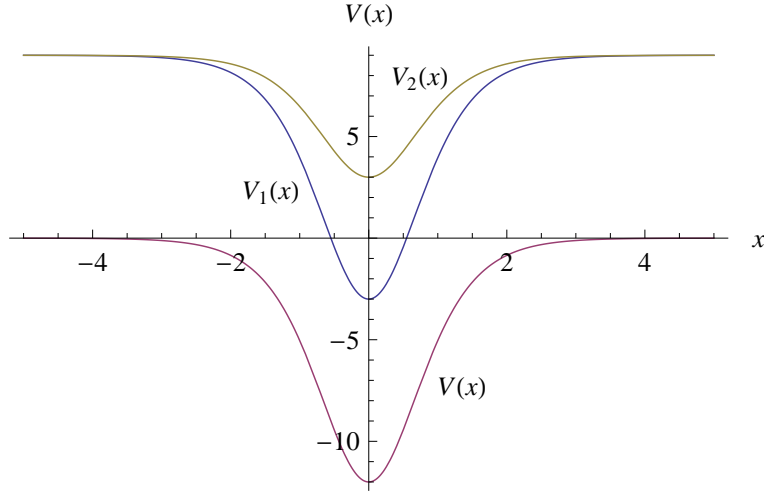


Figura 2.7: Potenziali  $V(x)$ ,  $V_1(x)$  e  $V_2(x)$ .

Si osservi, per proseguire nella fattorizzazione, che gli autovalori di energia per gli stati legati di  $H_1$  sono 0, 5, 8: per fattorizzare l'Hamiltoniano  $H_2$  contenente  $V_2(x)$  occorre considerare il potenziale  $V_2(x) - 5$ . Poiché

$$A_1\psi_0^{(1)}(x) = 0, \quad (2.38)$$

il sistema descritto dall'Hamiltoniano  $H_2$  non contiene lo stato corrispondente all'autovalore  $E_0^{(1)} = 0$ : i suoi autovalori, dopo la traslazione, sono

$$\begin{aligned} E_0^{(2)} &= 0 \\ E_1^{(2)} &= 3. \end{aligned} \quad (2.39)$$

L'equazione per lo stato fondamentale di  $H_2$ , quindi, è:

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi_0^{(2)}(x) + (4 - 6\text{sech}^2x)\psi_0^{(2)}(x) = 0. \quad (2.40)$$

Analogamente a quanto svolto in precedenza si risolve l'equazione differenziale e, imponendo la normalizzabilità della soluzione, si ottiene la funzione d'onda normalizzata  $\psi_0^{(2)}(x)$ :

$$\psi_0^{(2)}(x) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\text{sech}^2x. \quad (2.41)$$

Applicando l'operatore  $A_1^\dagger$  alla funzione  $\psi_0^{(2)}(x)$  si ottiene la funzione d'onda per il primo livello eccitato di  $H_1$ , ovvero

$$\psi_1^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}A_1^\dagger\psi_0^{(2)}(x) = -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\text{sech}^2x \tanh x, \quad (2.42)$$

in cui si è aggiunto un opportuno fattore di normalizzazione. La figura (2.8) mostra le due autofunzioni, relative allo stesso autovalore di energia, ma con numero quantico e parità diversa.

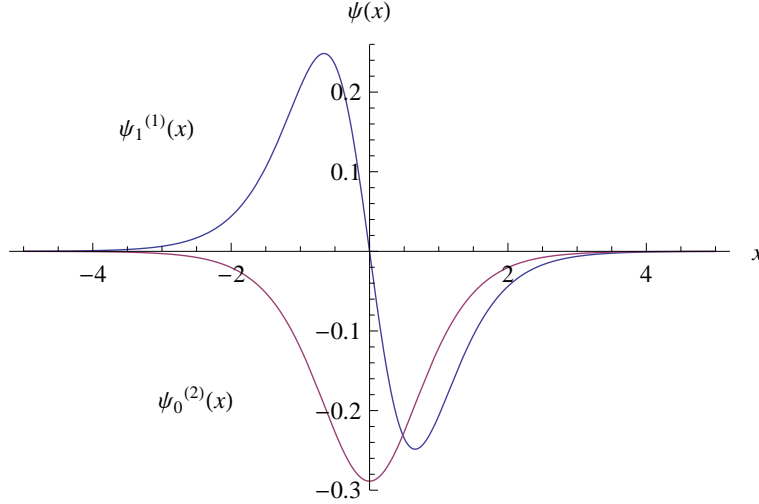


Figura 2.8: Funzioni d'onda  $\psi_0^{(2)}(x)$  e  $\psi_1^{(1)}(x)$ .

La funzione  $\psi_0^{(2)}(x)$  può essere utilizzata anche per definire il superpotenziale  $W_2(x)$  relativo all'Hamiltoniano  $H_2$ : applicando la procedura 2 si ottiene

$$W_2(x) = 2 \tanh x, \quad (2.43)$$

ed è quindi possibile definire i nuovi operatori  $A_2$  e  $A_2^\dagger$ . Il passo successivo consiste nel calcolo del potenziale  $V_3(x)$  tramite la procedura 1, utilizzando il superpotenziale  $W_2(x)$ : si ottiene

$$V_3(x) = 2(1 + \tanh^2 x) = 4 - 2\operatorname{sech}^2 x, \quad (2.44)$$

la forma del potenziale rimasta ancora invariata.

Inoltre

$$A_2 \psi_0^{(2)}(x) = 0, \quad (2.45)$$

per cui l'Hamiltoniano  $H_3$  non ha lo stato corrispondente all'autovalore  $E_0^{(2)} = 0$ :  $H_3$  ha un solo stato legato, la cui energia corrispondente è

$$E_0^{(3)} = E_1^{(2)} = 3. \quad (2.46)$$

Considerando il potenziale  $V_3(x) - 3$  si calcola l'autofunzione dello stato fondamentale risolvendo l'equazione di Schrödinger

$$-\frac{d^2}{dx^2} \psi_0^{(3)}(x) + (1 - 2\operatorname{sech}^2 x) \psi_0^{(3)}(x) = 0, \quad (2.47)$$

la cui soluzione normalizzata è:

$$\psi_0^{(3)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \tanh^2 x}. \quad (2.48)$$

Utilizzando l'operatore  $A_2^\dagger$  è possibile, quindi, risalire all'autofunzione relativa al primo livello eccitato di  $H_2$ ,

$$\psi_1^{(2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} A_2^\dagger \psi_0^{(3)}(x) = -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \operatorname{sech}^2 x \tanh x, \quad (2.49)$$

e da questa, tramite l'operatore  $A_1^\dagger$ , all'autofunzione per il secondo livello eccitato di  $H_1$ ,

$$\psi_2^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{8}}A_1^\dagger\psi_1^{(2)}(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(-1 + 5 \tanh^2 x)\operatorname{sech}x. \quad (2.50)$$

Si osservi, dalle (2.50) e (2.50), che si sono ottenuti gli stessi risultati forniti dalla risoluzione diretta dell'equazione di Schrödinger, presentati nelle relazioni (2.31). In figura (2.9) sono riportate le autofunzioni  $\psi_0^{(3)}(x)$ ,  $\psi_1^{(2)}(x)$  e  $\psi_2^{(1)}(x)$ , relative allo stesso autovalore di energia  $E_2^{(1)} = 8$  per  $H_1$ , ma con numeri quantici diversi per i rispettivi Hamiltoniani, come si deduce dal loro numero di nodi.

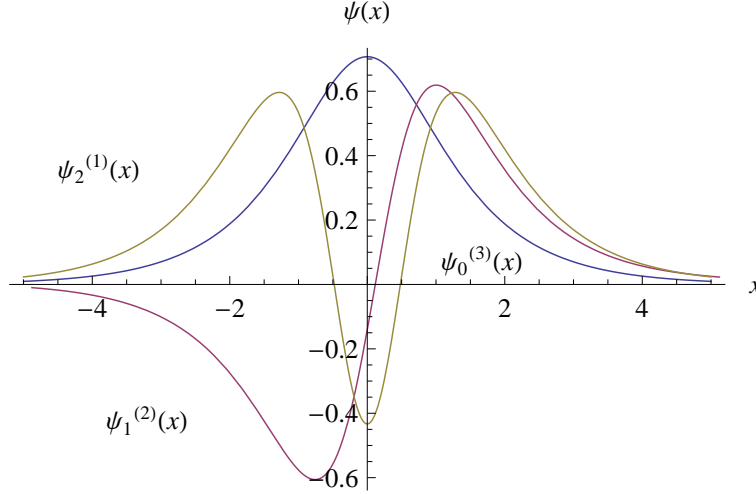


Figura 2.9: Funzioni d'onda  $\psi_0^{(3)}(x)$ ,  $\psi_1^{(2)}(x)$  e  $\psi_2^{(1)}(x)$ .

In conclusione, sono state ricavate le funzioni d'onda per i tre stati legati dell'Hamiltoniano di partenza, ottenendo i risultati attesi; ci si chiede cosa succede provando ad applicare questo procedimento per determinare l'autofunzione di uno stato libero dell'Hamiltoniano  $H$ . Nel caso dell'oscillatore armonico questo problema non si pone, in quanto il potenziale è illimitato superiormente e non esistono, quindi, stati non legati per una particella. Si sa che lo spettro di una particella libera è continuo, per cui il più piccolo autovalore di  $H$  possibile è  $E = 0$ , cui corrisponde  $E^{(3)} = 1$ . Calcolando il nuovo superpotenziale  $W_3(x)$  e gli operatori  $A_3$  e  $A_3^\dagger$  si può definire l'Hamiltoniano  $H_4$ : non avendo lo stato fondamentale di  $H_3$ , l'autovalore di energia per il livello fondamentale di  $H_4$  è

$$E_0^{(4)} = 1, \quad (2.51)$$

Inoltre calcolando il potenziale  $V_4(x)$  si ottiene:

$$V_4(x) = 1, \quad (2.52)$$

per cui l'equazione per lo stato fondamentale è:

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi_0^{(4)}(x) = 0. \quad (2.53)$$

Tale equazione non ammette soluzioni normalizzabili, eccetto quella identicamente nulla, per cui non è possibile ottenere autofunzioni relative a stati non legati dell'Hamiltoniano con questo metodo.

# Capitolo 3

## Potenziali invarianti per forma

La supersimmetria è utile per la soluzione di potenziali invarianti per forma, definiti in questo capitolo. Infatti, si può dedurre un criterio di integrazione per l'equazione di Schrödinger relativa ad un sistema supersimmetrico, nel caso in cui i potenziali partner siano anche invarianti per forma. Come esempio, questo criterio è utilizzato per integrare l'equazione di Schrödinger radiale per l'atomo di idrogeno, problema da me affrontato nell'ambito dell'attività di tirocinio, della quale il paragrafo (3.2) costituisce la relazione.

### 3.1 Costruzione dei potenziali invarianti per forma

Siano  $V_1(x)$  e  $V_2(x)$  due generici potenziali. Essi si definiscono invarianti per forma se dipendono da una famiglia di parametri  $\{a_1\}$ , ed esiste una funzione  $f$  di trasformazione in modo che

$$V_2(x; a_1) = V_1(x; a_2) + R(a_1), \quad (3.1)$$

in cui  $a_2 = f(a_1)$  e  $R$ , detta funzione resto, è indipendente da  $x$ . Se  $V_1(x)$  e  $V_2(x)$  sono potenziali partner di un sistema supersimmetrico e sono anche potenziali invarianti per forma, allora il passaggio all'Hamiltoniano partner avviene tramite la trasformazione di una famiglia di parametri in  $V_1(x)$ , a meno di una quantità indipendente da  $x$ ; si assume che nei casi in cui si proceda per fattorizzazioni successive, e gli Hamiltoniani partner siano invarianti per forma, le funzioni resto e quella necessaria per trasformare i parametri rimangano invariate.

Consideriamo un sistema supersimmetrico descritto dall'Hamiltoniano  $H_1$ . Se  $\psi_0^{(1)}(x)$  è l'autofunzione relativa allo stato fondamentale si è in grado di ricavare il superpotenziale  $W_1(x)$  ed i potenziali partner  $V_1(x)$  e  $V_2(x)$ . Supponiamo che questa coppia di potenziali rispetti la definizione di potenziali invarianti per forma. Poiché vale la (3.1), si può scrivere:

$$H_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x; a_2) + R(a_1). \quad (3.2)$$

Calcolando il successivo potenziale invariante per forma, che indichiamo con  $V_3(r; a_1)$  si ha che

$$V_3(x; a_1) = V_2(x; a_2) + R(a_1) = V_1(x; a_3) + R(a_2) + R(a_1), \quad (3.3)$$

in cui

$$a_s = f^{(s-1)}(a_1). \quad (3.4)$$



Se l'Hamiltoniano  $H_1$  ha  $p$  stati legati, si possono costruire  $p$  Hamiltoniani, ovvero altrettanti potenziali, applicando la definizione di potenziali invarianti per forma. Il generico potenziale di ordine  $s$  è

$$V_s(x; a_1) = V_{s-1}(x; a_2) + R(a_1) = \dots = V_1(x; a_s) + \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k), \quad (3.5)$$

Le operazioni effettuate nel passaggio da un potenziale al successivo sono la trasformazione dei parametri nel potenziale  $V_1(r; a_1)$  tramite la funzione  $f$  e l'aggiunta della funzione resto calcolata nei parametri di partenza. Si ottiene, quindi, una famiglia di Hamiltoniani definendo

$$H_s = -\frac{d^2}{dx^2} + V_s(x; a_1). \quad (3.6)$$

Si noti che gli Hamiltoniani  $H_s$  sono stati ottenuti applicando più volte la definizione di potenziali invarianti per forma, e non sono necessariamente partner supersimmetrici. Dimostriamo ora che due generici Hamiltoniani  $H_s$  e  $H_{s+1}$ , ottenuti tramite questo procedimento, sono tra loro partner supersimmetrici. Dalla definizione, si ottiene che

$$H_s = -\frac{d^2}{dx^2} + V_s(x; a_1) = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x; a_s) + \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k), \quad (3.7)$$

mentre

$$H_{s+1} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_{s+1}(x; a_1) = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x; a_{s+1}) + \sum_{k=1}^s R(a_k). \quad (3.8)$$

Inoltre, poiché

$$V_2(x; a_s) = V_1(x; a_{s+1}) + R(a_s), \quad (3.9)$$

vale l'uguaglianza:

$$H_{s+1} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x; a_s) + \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k). \quad (3.10)$$

I due potenziali sono partner supersimmetrici in quanto, nelle (3.7) e (3.10), il termine  $\sum_{k=1}^{s-1} R(a_k)$  è in comune, e nei potenziali  $V_1$  e  $V_2$  compare la stessa famiglia di parametri:

segue che i due Hamiltoniani hanno lo stesso spettro di autovalori di energia, eccetto  $E_0^{(s)}$ , poiché  $H_{s+1}$  manca del livello fondamentale di  $H_s$ . Per calcolare l'autovalore di energia  $E_0^{(s)}$  si consideri l'equazione di Schrödinger per l'autofunzione corrispondente  $\psi_0^{(s)}(x; a_1)$ :

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi_0^{(s)}(x; a_1) + V_s(x; a_1)\psi_0^{(s)}(x; a_1) = E_0^{(s)}\psi_0^{(s)}(x; a_1). \quad (3.11)$$

Poiché  $E_0^{(1)} = 0$  si ha

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi_0^{(1)}(x; a_1) + V_1(x; a_1)\psi_0^{(1)}(x; a_1) = 0, \quad (3.12)$$

da cui si ottiene

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi_0^{(1)}(x; a_s) + V_1(x; a_s)\psi_0^{(1)}(x; a_s) = 0. \quad (3.13)$$

Sostituendo la (3.5) nella (3.11) e tenendo conto della (3.13) si ottiene:

$$H_s \psi_0^{(1)}(x; a_s) = \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k) \psi_0^{(1)}(x; a_s) = E_0^{(s)} \psi_0^{(1)}(x; a_s). \quad (3.14)$$

Quindi si deduce che

$$\psi_0^{(s)}(x; a_1) = \psi_0^{(1)}(x; a_s), \quad E_0^{(s)} = \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k). \quad (3.15)$$

Ricordando la relazione (1.83), si può dedurre la relazione per gli autovalori di  $H_1$ :

$$E_n^{(1)} = E_0^{(n+1)} = \sum_{k=1}^n R(a_k). \quad (3.16)$$

Dopo aver utilizzato l'invarianza per forma per calcolare lo spettro energetico di un sistema supersimmetrico, si possono ricavare le autofunzioni. A tal fine occorrono alcune premesse. Finora si è assunto che gli autovalori di energia dipendessero dai parametri  $\{a_1\}$ ; se cambiano i parametri, gli autovalori diventano

$$E_n^{(1)}(a_s) = \sum_{k=s}^{n+s-1} R(a_k), \quad (3.17)$$

poiché in entrambi i membri occorre applicare  $s - 1$  volte la funzione  $f$  ai parametri presenti. Occorre, inoltre, dimostrare la seguente uguaglianza:

$$\psi_n^{(2)}(x; a_s) = \psi_n^{(1)}(x; a_{s+1}). \quad (3.18)$$

Si consideri

$$\begin{aligned} H_2 \psi_n^{(2)}(x; a_s) &= E_n^{(2)}(a_s) \psi_n^{(2)}(x; a_s) \Leftrightarrow \\ -\frac{d^2}{dx^2} \psi_n^{(2)}(x; a_s) + V_2(x; a_s) \psi_n^{(2)}(x; a_s) &= E_n^{(2)}(a_s) \psi_n^{(2)}(x; a_s) \Leftrightarrow \\ -\frac{d^2}{dx^2} \psi_n^{(2)}(x; a_s) + V_1(x; a_{s+1}) \psi_n^{(2)}(x; a_s) &= [E_n^{(2)}(a_s) - R(a_s)] \psi_n^{(2)}(x; a_s). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Poiché

$$E_n^{(1)}(a_{s+1}) = \sum_{k=s+1}^{n+s} R(a_k), \quad E_n^{(2)}(a_s) = E_{n+1}^{(1)}(a_s) = \sum_{k=s}^{n+s} R(a_k), \quad (3.20)$$

si deduce che

$$E_n^{(2)}(a_s) - R(a_s) = E_n^{(1)}(a_{s+1}). \quad (3.21)$$

Sostituendo nella (3.19) si ottiene

$$-\frac{d^2}{dx^2} \psi_n^{(2)}(x; a_s) + V_1(x; a_{s+1}) \psi_n^{(2)}(x; a_s) = E_n^{(1)}(a_{s+1}) \psi_n^{(2)}(x; a_s), \quad (3.22)$$

da cui segue che

$$\psi_n^{(2)}(x; a_s) = \psi_n^{(1)}(x; a_{s+1}). \quad (3.23)$$

Ottenuto questo risultato, consideriamo la funzione d'onda  $\psi_n^{(1)}(x; a_1)$ :

$$\begin{aligned} \psi_n^{(1)}(x; a_1) &= A^\dagger(x; a_1)\psi_{n-1}^{(2)}(x; a_1) \\ &= A^\dagger(x; a_1)\psi_{n-1}^{(1)}(x; a_2) \\ &= A^\dagger(x; a_1)A^\dagger(x; a_2)\psi_{n-2}^{(2)}(x; a_2) \\ &= A^\dagger(x; a_1)A^\dagger(x; a_2)\psi_{n-2}^{(1)}(x; a_3) \\ &= A^\dagger(x; a_1)A^\dagger(x; a_2) \dots A^\dagger(x; a_n)\psi_0^{(2)}(x; a_n) \\ &= A^\dagger(x; a_1)A^\dagger(x; a_2) \dots A^\dagger(x; a_n)\psi_0^{(1)}(x; a_{n+1}). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Quindi, considerando un sistema supersimmetrico, di cui sappiamo che i primi due potenziali partner sono invarianti per forma, conoscendo la funzione d'onda per lo stato fondamentale siamo in grado di calcolare le altre autofunzioni per gli stati legati ed i corrispondenti autovalori di energia, utilizzando la regola di trasformazione per i parametri coinvolti e la funzione resto.

Il criterio che abbiamo sviluppato può essere applicato esattamente a potenziali in cui i parametri vengono traslati di una quantità costante, in cui ovvero la funzione  $f$  ha la forma

$$f(a) = a + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.25)$$

Casi in cui la funzione  $f$  è diversa, ad esempio  $f(a) = \lambda a$  e si ha una variazione di scala dei parametri, possono essere risolti solo in modo approssimato.

Fra i potenziali invarianti per forma tramite traslazione dei parametri, e che siano supersimmetrici, ricordiamo l'oscillatore armonico in una ed in tre dimensioni, il potenziale efficace coulombiano (che tratteremo nel paragrafo seguente), ed il potenziale di Morse.

## 3.2 Applicazione: il potenziale coulombiano

Si consideri l'equazione radiale per l'atomo di idrogeno:

$$-\mathcal{U}_{n,\ell}''(r) + \mathcal{U}_{n,\ell}(r) \left[ -\frac{e^2}{r} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] = E_n \mathcal{U}_{n,\ell}(r), \quad (3.26)$$

di cui conosciamo gli autovalori di energia [11]

$$E_n = -\frac{e^4}{4n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad \ell = -n + 1, \dots, n - 1. \quad (3.27)$$

Nelle relazioni precedenti  $n$  indica il numero quantico principale e  $\ell$  numero quantico relativo al modulo del momento angolare; considereremo unitaria  $e$ , la carica dell'elettrone. Sappiamo che le soluzioni sono

$$\mathcal{U}_{n,\ell}(r) = y^{(\ell+1)} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right) L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(y), \quad y = \frac{r}{n}, \quad (3.28)$$

in cui  $L$  sono i polinomi di Laguerre. La parte radiale della funzione d'onda per un generico stato dell'atomo di idrogeno è

$$\mathcal{R}_{n,\ell}(r) = \frac{\mathcal{U}_{n,\ell}(r)}{r}. \quad (3.29)$$

Vediamo come trattare il problema utilizzando la supersimmetria. Si definiscono i parametri:

$$\ell' = \ell \quad m = n - \ell - 1. \quad (3.30)$$

In seguito si ometterà l'apice su  $\ell'$  in quanto coincide con il corrispondente numero quantico. Lo spettro degli autovalori di energia dipende, formalmente, anche da  $\ell$  ed è dato dall'espressione:

$$E_m(\ell) = \frac{1}{4(\ell+1)^2} - \frac{1}{4(m+\ell+1)^2}. \quad (3.31)$$

Il livello fondamentale di energia si ottiene ponendo  $m = 0$ , quindi è possibile ottenere il potenziale  $V_1(r)$ :

$$V_1(r) = -\frac{1}{r} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{1}{4(\ell+1)^2}. \quad (3.32)$$

Infine, utilizzando i parametri introdotti le autofunzioni diventano:

$$\psi_m(r; \ell) = \mathcal{U}_{m+\ell+1,\ell}(r) = y^{(\ell+1)} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right) L_m^{2\ell+1}(y), \quad y = \frac{r}{m+\ell+1} \quad (3.33)$$

La supersimmetria e la definizione di potenziali invarianti per forma saranno applicati per ricavare le autofunzioni nella (3.33) e gli autovalori nella (3.31). Il potenziale nella (3.32) può essere espresso secondo la (1.13) tramite il superpotenziale

$$W(r) = \frac{1}{2(\ell+1)} - \frac{\ell+1}{r}. \quad (3.34)$$

La famiglia di parametri individuata nel potenziale, necessaria per trattare i potenziali partner come invarianti per forma, consta di un unico parametro,

$$a_1 = \ell, \quad (3.35)$$

e la funzione di trasformazione è

$$f(a_1) = \ell + 1. \quad (3.36)$$

Si parlerà quindi di  $V_1(r; \ell)$  e  $\psi_m(r; \ell)$  per evidenziare la dipendenza dal parametro  $\ell$ . Si noti che  $\ell$  mantiene il proprio significato fisico collegato al momento angolare, ed, inoltre, verrà utilizzato per calcolare gli autovalori e le autofunzioni, secondo le relazioni (3.17) e (3.24). Il parametro  $m$ , invece, fissa una relazione d'ordine di eccitazioni solo tra livelli con uguale momento angolare, come emerge nella tabella (3.1). Inoltre, per la relazione (3.30), al livello energetico individuato dal numero quantico principale  $n$  corrispondono gli autostati fissati dalle possibili coppie di parametri  $(m, \ell)$  tali che  $n = m + \ell + 1$ : in questo modo si vede, con i nuovi parametri, la degenerazione dei livelli energetici dell'idrogeno.

Tabella 3.1: Parametro  $m$  al variare dei numeri quantici  $n$  e  $\ell$

| $\ell$ $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------|---|---|---|---|
| s          | 0 | 1 | 2 | 3 |
| p          | - | 0 | 1 | 2 |
| d          | - | - | 0 | 1 |
| f          | - | - | - | 0 |

È possibile dedurre un'interpretazione per i numeri quantici  $n$  e  $\ell$  ed il parametro  $m$  che coinvolga le fattorizzazioni successive di un Hamiltoniano: all'Hamiltoniano  $H_1$  sono associati gli stati con  $\ell = 0$ , a  $H_2$  quelli con  $\ell = 1$  e così di seguito per gli altri. Il numero quantico  $n$  rappresenta, incrementato di 1, il livello di eccitazione dell'Hamiltoniano  $H_1$ , relativo all'orbitale  $s$ . Quindi su una riga della tabella (3.1) si trovano gli autostati di un certo Hamiltoniano, in cui il parametro  $m$  indica il rispettivo livello di eccitazione, mentre elementi nella stessa colonna corrispondono a stati con uguale energia: passando da un Hamiltoniano al successivo, ovvero incrementando il valore del momento angolare, scompare lo stato con energia più bassa, e si decrementa il livello di eccitazione dei rimanenti.

Per conoscere lo spettro energetico occorre calcolare la funzione resto  $R(\ell)$ . Dopo aver verificato che

$$V_1(r; \ell) = W^2(r; \ell) - W'(r; \ell), \quad (3.37)$$

in cui l'apice indica la derivata calcolata rispetto a  $r$ , si definisce il potenziale  $V_2(r; \ell)$ :

$$V_2(r; \ell) = W^2(r; \ell) + W'(r; \ell) = \frac{1}{4(\ell + 1)^2} - \frac{1}{r} + \frac{(\ell + 1)(\ell + 2)}{r^2}. \quad (3.38)$$

Applicando la definizione di potenziali invarianti per forma si può calcolare la funzione resto imponendo

$$V_2(r; \ell) - V_1(r; \ell + 1) = R(\ell). \quad (3.39)$$

Svolgendo i conti si ottiene, infatti, una funzione indipendente da  $r$ ,

$$R(\ell) = \frac{3 + 2\ell}{4(2 + 3\ell + \ell^2)^2}. \quad (3.40)$$

Dalle (3.4), (3.35) e (3.36) si deduce che

$$a_k = \ell + k - 1. \quad (3.41)$$

È possibile quindi calcolare  $E_m(\ell)$  utilizzando la (3.16):

$$E_m(\ell) = \frac{2\ell + 2m\ell + m^2}{4(\ell + 1)^2(m + \ell + 1)^2}. \quad (3.42)$$

Per il calcolo delle autofunzioni occorre conoscere quella relativa allo stato fondamentale: dalla (1.51) si ha che

$$\psi_0(r; \ell) = \mathcal{U}_0(r; \ell) = \exp\left(-\int^r W(t)dt\right) = r^{(\ell+1)} \exp\left(-\frac{r}{2(\ell+1)}\right). \quad (3.43)$$

```

autofunzione [m_] := Module[{b, a, w, k},
  1 a[b_] := a1 + b - 1;
  2 w[x_, l_] := 1 / (2 (1 + 1)) - (1 + 1) / x;
  3 h[0, x_, a1_] := Simplify[Exp[-Expand[Integrate[w[x, a1], x]]]];
  4 h[b_, x_, k_] :=
  -D[h[b - 1, x, a[m - b + 2]], x] + w[x, a[m - b + 1]] h[b - 1, x, a[m - b + 2]];
  5 h[m, x, a1]
]

```

Figura 3.1: Procedura per il calcolo delle autofunzioni.

```

u[r_, m_, l_] := Simplify[Expand[autofunzione [m] /. {a1 -> l, x -> r}]]

ψ[r_, n_, l_] := u[r, n - l - 1, l] / r

ψnorm[r_, n_, l_] := Module[{a, y},
  a = Integrate[ψ[y, n, l]^2, {y, 0, +∞}];
  Sqrt[1 / a] ψ[r, n, l]
]

```

Figura 3.2: Modulo per l'elaborazione delle autofunzioni

Si è realizzata una procedura per il programma Mathematica che, ricevendo in input il livello di eccitazione desiderato  $m$ , fornisce l'autofunzione  $\psi_m(r; \ell)$  utilizzando il procedimento esposto nella (3.24); specificando il valore di  $\ell$  si sceglie l'Hamiltoniano e si ottiene la funzione d'onda con numero quantico principale  $n = m + \ell + 1$  e momento angolare  $\ell$ . La procedura contiene la funzione di trasformazione del parametro  $\ell$  e la funzione superpotenziale  $W(r; \ell)$ .

Il calcolo dell'autofunzione avviene con un procedimento ricorsivo: è indicato il caso base definendo la funzione d'onda relativa allo stato fondamentale tramite la relazione (3.43). La chiamata ricorsiva della funzione invece è:

$$\psi_b^{(m-b+1)}(r; a_{m-b+1}) = A^\dagger(r; a_{m-b+1})\psi_{b-1}^{(m-b+1)}(r; a_{m-b+2}) \quad (3.44)$$

La procedura è riportata nella figura (3.1): si noti al rigo 3 la definizione del caso base e al rigo 4 la chiamata ricorsiva della funzione.

Il parametro  $b$  nella funzione  $h$  è stato inserito come parametro di controllo, che arresta l'invocazione quando  $b = 1$ , ovvero quando nel membro a destra si è raggiunto il caso base.

Il parametro  $k$  rappresenta, in ogni chiamata, il parametro  $a_{m-b+1}$  presente al primo membro della (3.44). Nella figura (3.2) sono mostrate le operazioni con cui si sono definite le funzioni  $\psi_m(r; \ell)$ , si sono ricavate le corrispondenti parti radiali, introducendo poi i numeri quantici  $n$  e  $\ell$ , e la procedura per normalizzare le funzioni d'onda ottenute. Si noti nella definizione della funzione  $u$  la sostituzione ad  $a_1$ , parametro restituito dalla procedura, rigo 5, con  $\ell$ . Le procedure sono state applicate per calcolare le parti radiali delle funzioni d'onda degli orbitali.

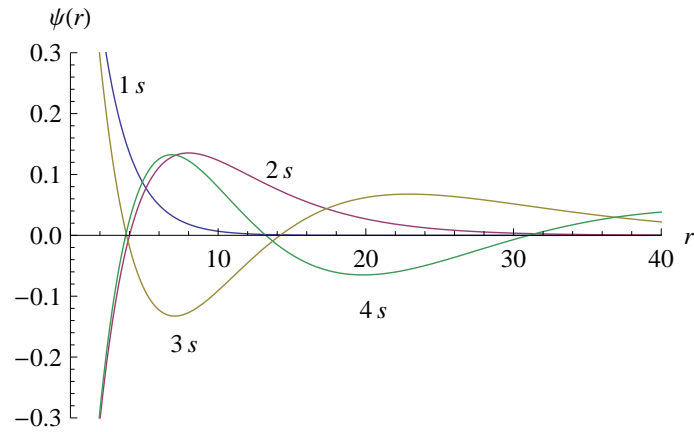


Figura 3.3: Orbitali 1s, 2s, 3s, 4s.

Le autofunzioni normalizzate ottenute sono:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_{1,0}(r) &= e^{-\frac{r}{2}} \\
 \mathcal{R}_{2,0}(r) &= \frac{1}{4}e^{-\frac{r}{4}}(r - 4) \\
 \mathcal{R}_{2,1}(r) &= \frac{1}{4}e^{-\frac{r}{4}}r \\
 \mathcal{R}_{3,0}(r) &= \frac{1}{54}e^{-\frac{r}{6}}(54 - 18r + r^2) \\
 \mathcal{R}_{3,1}(r) &= \frac{1}{18\sqrt{6}}e^{-\frac{r}{6}}r(12 - r) \\
 \mathcal{R}_{3,2}(r) &= \frac{1}{54\sqrt{2}}\frac{1}{4}e^{-\frac{r}{6}}r^2 \\
 \mathcal{R}_{4,0}(r) &= \frac{1}{1536}e^{-\frac{r}{8}}(-1536 + 576r - 48r^2 + r^3) \\
 \mathcal{R}_{4,1}(r) &= \frac{1}{512\sqrt{5}}e^{-\frac{r}{8}}r(320 - 40r + r^2) \\
 \mathcal{R}_{4,2}(r) &= \frac{1}{1536}e^{-\frac{r}{8}}r^2(-24 + r) \\
 \mathcal{R}_{4,3}(r) &= \frac{1}{1536\sqrt{5}}e^{-\frac{r}{8}}r^3,
 \end{aligned}$$

che evidentemente coincidono con le soluzioni ottenute in modo tradizionale.

I grafici delle funzioni ottenute sono riportati nelle figure (3.3)-(3.6). Si noti come, per ogni valore di momento angolare, l'incremento del numero quantico principale comporta un incremento nel numero di nodi; inoltre, per ogni valore del numero quantico, all'incremento del momento angolare corrisponde un decremento del numero di nodi, a verifica dell'interpretazione fornita dei parametri  $m$  e  $\ell$ .

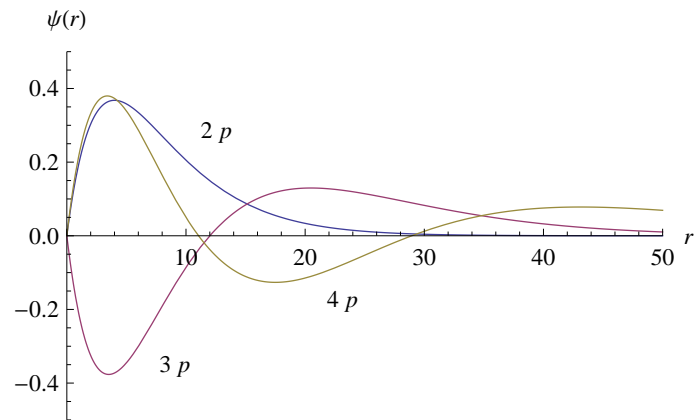


Figura 3.4: Orbitali 2p, 3p, 4p.

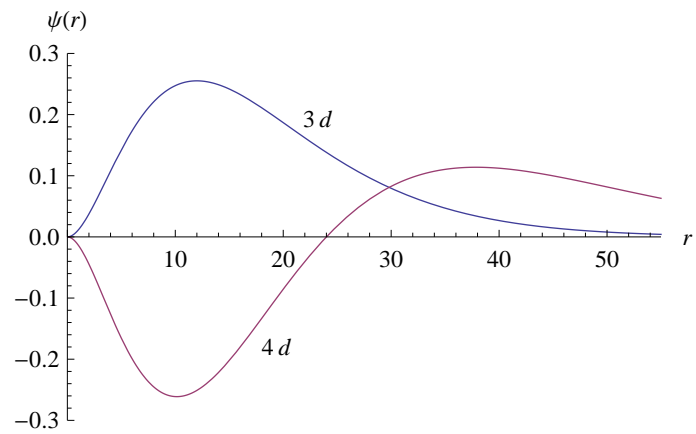


Figura 3.5: Orbitali 3d, 4d.

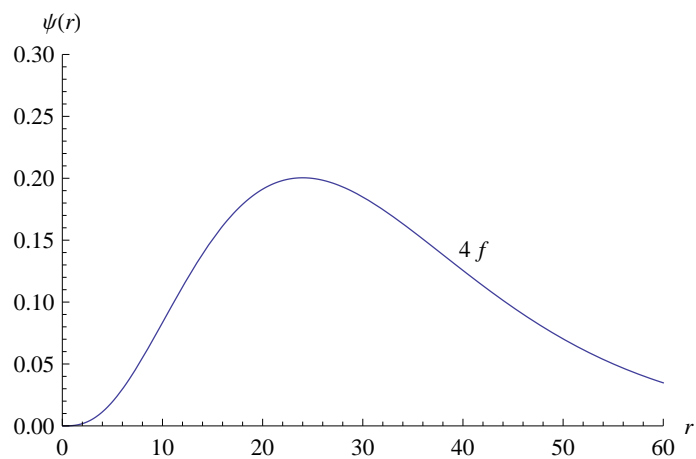


Figura 3.6: Orbitale 4f.



# Capitolo 4

## Metodi di approssimazione e supersimmetria: metodi WKB e SWKB

Uno dei vantaggi della supersimmetria in meccanica quantistica si ottiene nel metodo di approssimazione semiclassica WKB. In questo capitolo discutiamo il metodo WKB e ne presentiamo l'estensione SWKB per sistemi supersimmetrici per il calcolo degli autovalori di energia.

### 4.1 Metodo WKB

È noto che il passaggio dalla meccanica quantistica alla meccanica classica avviene nel limite in cui la costante di Planck tende a zero:

$$\hbar \longrightarrow 0. \quad (4.1)$$

Definendo la lunghezza d'onda di De Broglie per un particella di impulso  $p$ ,

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}, \quad (4.2)$$

osserviamo che se l'impulso ha valori non piccoli rispetto a  $\hbar$  la condizione (4.1) è equivalente a

$$\lambda \longrightarrow 0. \quad (4.3)$$

Secondo il principio di corrispondenza, i risultati forniti dall'interpretazione di un fenomeno mediante la fisica classica possono essere dedotti da quelli ottenuti dalla meccanica quantistica nel limite (4.1).

Il metodo WKB (Wentzel [12], Kramers [13], Brillouin [14]) permette di integrare l'equazione di Schrödinger in maniera approssimata applicando la (4.1). In questo paragrafo non attribuiremo valore unitario alle costanti o ad altri parametri, come la massa delle particelle.

Consideriamo di nuovo l'equazione di Schrödinger per il caso unidimensionale di una particella di massa  $m$  nel potenziale  $V(x)$ ; se  $\psi(x)$  è l'autofunzione per l'autovalore  $E$  si

ha

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x). \quad (4.4)$$

Scriviamo la soluzione  $\psi(x)$  nella forma

$$\psi(x) = \exp i \frac{\sigma(x)}{\hbar}, \quad (4.5)$$

e, nel limite (4.1), esprimiamo  $\sigma(x)$  come una serie di potenze di  $\hbar$ ,

$$\sigma(x) = \sigma_0(x) + \frac{\hbar}{i}\sigma_1(x) - \hbar^2\sigma_2(x) + \dots \quad (4.6)$$

La soluzione  $\psi(x)$  ha quindi la forma

$$\psi_{WKB}(x) = \exp i \frac{\sigma_0(x)}{\hbar} \exp \sigma_1(x) \dots = \psi_0(x)\psi_1(x) \dots \quad (4.7)$$

Il metodo WKB consiste nel trovare la soluzione  $\psi_{WKB}(x)$  arrestando lo sviluppo (4.6) al prim'ordine in  $\hbar$ . Sostituendo la (4.5) nella (4.4), si ottiene per  $\sigma(x)$  l'equazione

$$-\frac{d^2}{dx^2} \exp i \frac{\sigma(x)}{\hbar} + V(x) \exp i \frac{\sigma(x)}{\hbar} = E \exp i \frac{\sigma(x)}{\hbar} \quad \Leftrightarrow \quad (4.8)$$

$$\sigma'^2(x) - i\hbar\sigma''(x) = 2m[E - V(x)], \quad (4.9)$$

e dalla (4.6) arrestanda al prim'ordine si ottiene

$$\sigma_0'^2(x) - \hbar^2\sigma_1'^2(x) + 2\frac{\hbar}{i}\sigma_0'(x)\sigma_1'(x) - i\hbar\sigma_0''(x) - \hbar^2\sigma_1''(x) = 2m[E - V(x)]. \quad (4.10)$$

Eguagliando i membri corrispondenti all'ordine zero e al prim'ordine in  $\hbar$ , si ottengono le equazioni

$$\sigma_0'^2(x) = 2m[E - V(x)] \quad (4.11)$$

per l'ordine zero e

$$\sigma_0''(x) = -2\sigma_0'(x)\sigma_1'(x) \quad (4.12)$$

per il prim'ordine.

La (4.11) può essere facilmente integrata:

$$\sigma_0(x) = \pm \int^x \sqrt{2m[E - V(t)]} dt = \pm \int^x p(t) dt. \quad (4.13)$$

Se ci si trova in una zona classicamente accessibile ( $E > V$ ) la quantità sotto radice è reale, altrimenti  $E - V(x) < 0$  e l'impulso è una quantità immaginaria,

$$p(x) = i \left| \sqrt{2m[E - V(t)]} \right|. \quad (4.14)$$

Per la definizione (4.2) poniamo

$$\lambda(x) = \frac{2\pi\hbar}{p(x)}, \quad (4.15)$$

e se

$$\left| \frac{d\lambda}{dx} \right| \ll 1 \quad (4.16)$$

la soluzione  $\psi_0(x)$  ha la stessa forma della funzione d'onda per una particella libera con  $\lambda(x)$  al posto di  $\lambda$ . La condizione (4.16) garantisce che  $\lambda(x)$  vari di poco in intervalli di  $x$  confrontabili con  $\lambda$ .

Per scrivere la funzione  $\psi_0(x)$  occorre distinguere i casi in cui  $p(x)$  è reale oppure immaginario: nel primo caso bisogna considerare  $\sigma_0(x)$  con entrambi i segni, per cui  $\psi_0(x)$  è una combinazione lineare di un'onda progressiva ed una regressiva:

$$\psi_0(x) = C_1 \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int^x p(t) dt \right] + C_2 \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int^x p(t) dt \right], \quad (4.17)$$

mentre nel secondo caso bisogna considerare solo la soluzione che genera una funzione d'onda normalizzabile, ottenendo

$$\psi_0(x) = \exp \left[ -\frac{1}{\hbar} \int^x |p(t)| dt \right]. \quad (4.18)$$

Per il calcolo di  $\psi_1(x)$  risolviamo l'equazione (4.12), ottenendo

$$\sigma_1(x) = -\frac{1}{2} \ln |p(x)|, \quad (4.19)$$

da cui segue che

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}}. \quad (4.20)$$

La funzione d'onda complessiva nella regione accessibile classicamente è

$$\psi_I(x) = \frac{C_1}{\sqrt{|p(x)|}} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int^x p(t) dt \right] + \frac{C_2}{\sqrt{|p(x)|}} \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int^x p(t) dt \right], \quad (4.21)$$

mentre in quella classicamente proibita si ha

$$\psi_{II}(x) = \frac{C}{2\sqrt{|p(x)|}} \exp \left[ -\frac{1}{\hbar} \int^x |p(t)| dt \right]. \quad (4.22)$$

Supponiamo sia  $x = a$  il punto di inversione classico del moto, ovvero  $V(a) = E$ , ed il potenziale  $V(x)$  sia tale che la regione con  $x < a$  sia accessibile classicamente, quella con  $x > a$  proibita. Si ha quindi che  $\psi_I(x)$ , funzione periodica oscillante, è soluzione per  $x < a$  mentre  $\psi_{II}(x)$ , funzione esponenziale decrescente, per  $x > a$ . Il raccordo tra le due soluzioni si effettua di solito imponendo continuità e derivabilità della funzione nel punto di inversione classico, ma in questo caso ciò non è possibile poiché, dalle (4.21) e (4.22),  $x = a$  è un punto di singolarità per  $\psi_I(x)$  e  $\psi_{II}(x)$ .

Si può utilizzare un procedimento alternativo: poniamoci in un intervallo di  $a$  in cui valga l'approssimazione

$$E - V(x) \approx F(x - a), \quad (4.23)$$

con  $F < 0$  costante, ottenendo

$$\psi_{II}(x) = \frac{C}{2} \frac{1}{(2m|F|(x-a))^{\frac{1}{4}}} \exp \left[ -\sqrt{\frac{8m|F|}{9\hbar^2}} (x-a)^{\frac{3}{2}} \right]. \quad (4.24)$$

Prolungando analiticamente la funzione d'onda  $\psi_{II}(x)$  nel piano complesso, tagliato lungo il semiasse con  $x < 0$ , si ottiene la funzione  $\psi_{II}(z)$

$$\psi_{II}(z) = \frac{C}{2} \frac{1}{(2m|F|z)^{\frac{1}{4}}} \exp \left[ -\sqrt{\frac{8m|F|}{9\hbar^2}} z^{\frac{3}{2}} \right]; \quad (4.25)$$

facendola variare lungo una semicirconferenza nel semipiano superiore con centro in  $x = a$  e raggio  $\rho$ , con  $z = \rho e^{i\phi}$  e  $0 \leq \phi \leq \pi$ , si può ottenere il valore sul bordo superiore del taglio, ovvero

$$\psi_{II}(\rho e^{i\pi}) = \frac{C}{2} \frac{1}{(2m|F|)^{\frac{1}{4}}} (\rho e^{i\pi})^{-\frac{1}{4}} \exp \left[ i\sqrt{\frac{8m|F|}{9\hbar^2}} \rho^{\frac{3}{2}} \right]. \quad (4.26)$$

Prolungando la funzione  $\psi_I(x)$  ed effettuando l'approssimazione (4.23), le funzioni  $\psi_I(z)$  e  $\psi_{II}(z)$  coincidono ponendo

$$C_1 = 0 \quad (4.27)$$

$$C_2 = \frac{C}{2} e^{-\frac{i\pi}{4}}. \quad (4.28)$$

Considerando invece la funzione  $\psi_{II}(z)$  lungo una semicirconferenza nel semipiano immaginario negativo si ottiene, per  $\phi = -\pi$ , la funzione sul bordo inferiore del taglio,

$$\psi_{II}(\rho e^{-i\pi}) = \frac{C}{2} \frac{1}{(2m|F|)^{\frac{1}{4}}} (\rho e^{-i\pi})^{-\frac{1}{4}} \exp \left[ -i\sqrt{\frac{8m|F|}{9\hbar^2}} \rho^{\frac{3}{2}} \right]. \quad (4.29)$$

In questo caso il raccordo con la funzione  $\psi_I(z)$  si ottiene ponendo

$$C_1 = \frac{C}{2} e^{\frac{i\pi}{4}} \quad (4.30)$$

$$C_2 = 0. \quad (4.31)$$

Sostituendo i coefficienti ottenuti nella (4.21) si ottiene la soluzione WKB per la funzione d'onda:

$$\psi_{WKB}(x) = \frac{C}{\sqrt{p(x)}} \cos \left[ \frac{1}{\hbar} \int_a^x p(t) dt + \frac{\pi}{4} \right] = \frac{C}{\sqrt{p(x)}} \cos \left[ \frac{1}{\hbar} \left| \int_a^x p(t) dt \right| - \frac{\pi}{4} \right], \quad (4.32)$$

valida sia nella regione accessibile, in cui  $p(x)$  è una quantità reale, che in quella proibita classicamente, dove infatti si riconduce a  $\psi_{II}(x)$ .

La funzione d'onda (4.32) permette di imporre una condizione di quantizzazione sui livelli energetici discreti nel caso in cui la regione classicamente accessibile sia del tipo  $a \leq x \leq b$ : la (4.32) deve valere per entrambi i punti di inversione del moto, per cui si ha

$$\psi_{WKB}(x) = \frac{C}{\sqrt{p(x)}} \cos \left[ \frac{1}{\hbar} \int_a^x p(t) dt - \frac{\pi}{4} \right] = \frac{C'}{\sqrt{p(x)}} \cos \left[ \frac{1}{\hbar} \int_x^b p(t) dt - \frac{\pi}{4} \right], \quad (4.33)$$

ovvero

$$\frac{1}{\hbar} \int_a^x p(t) dt - \frac{\pi}{4} = n\pi - \frac{1}{\hbar} \int_x^b p(t) dt + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \quad (4.34)$$

$$\frac{1}{\hbar} \int_a^b p(t) dt = n\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \quad (4.35)$$

$$\oint \sqrt{2m(E_n - V(x))} dx = 2\pi\hbar \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (4.36)$$

estendendo l'integrale ad un'oscillazione completa.

Il numero  $n$  comporta una discretizzazione dei livelli energetici, e coincide con il numero quantico di eccitazione dell'autostato corrispondente: la (4.35) mostra che la fase della funzione d'onda varia, da  $a$  a  $b$ , di  $n\pi + \frac{\pi}{2}$ , per cui  $\psi(x)$  ha  $n$  zeri. Inoltre la distanza tra due zeri è dello stesso ordine di grandezza della lunghezza d'onda di De Broglie, per cui ricordando la condizione (4.3), occorre che  $n$  sia elevato.

## 4.2 Metodo SWKB per il calcolo degli autovalori di energia

Il metodo SWKB si applica a sistemi supersimmetrici; vedremo che, in questo caso, il calcolo degli autovalori di energia approssimati al prim'ordine è valido anche per  $n$  piccoli [15].

Se  $W(x)$  è il superpotenziale, il potenziale  $V_1(x)$  può essere scritto come

$$V_1(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x). \quad (4.37)$$

Sostituendo questa espressione nella (4.36), e indicati con  $x_1$  e  $x_2$  i punti classici di inversione del moto, si ottiene

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m \left( E_n^{(1)} - W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \right)} dx = \hbar\pi \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (4.38)$$

Osserviamo che la sostituzione (4.37) introduce in  $I$  la dipendenza da  $\hbar$  e quindi anche nei punti di inversione, che diventano  $x_1(\hbar)$  e  $x_2(\hbar)$ ; per la condizione (4.1) è possibile calcolare lo sviluppo di  $I$  in potenze di  $\hbar$ , considerando  $W(x) \sim O(\hbar^0)$ .

Posti

$$a = \lim_{\hbar \rightarrow 0} x_1(\hbar) \quad (4.39)$$

$$b = \lim_{\hbar \rightarrow 0} x_2(\hbar) \quad (4.40)$$

$$f(x, \hbar) = \sqrt{2m \left( E_n^{(1)} - W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \right)}, \quad (4.41)$$

si ha:

$$I = I_0 + \hbar I_1 + O(\hbar^2), \quad (4.42)$$

con

$$I_0 = \lim_{\hbar \rightarrow 0} I = \int_a^b \sqrt{2m \left( E_n^{(1)} - W^2(x) \right)} dx, \quad (4.43)$$

$$I_1 = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{dI}{dx} \quad (4.44)$$

$$= \lim_{\hbar \rightarrow 0} \left( \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \hbar} dx + f(x_2, \hbar) \frac{dx_2}{d\hbar} - f(x_1, \hbar) \frac{dx_1}{d\hbar} \right). \quad (4.45)$$

Per definizione di punti di inversione i termini  $f(x_1, \hbar)$  e  $f(x_2, \hbar)$  sono nulli, per cui si ha

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \sqrt{2m \left( E_n^{(1)} - W^2(x) \right)} dx + \frac{\hbar}{2} \int_a^b \frac{W'(x)}{\sqrt{E_n^{(1)} - W^2(x)}} dx + O(\hbar^2) \\ &\approx \int_a^b \sqrt{2m \left( E_n^{(1)} - W^2(x) \right)} dx + \frac{\hbar}{2} \arcsin \left[ \frac{W(x)}{\sqrt{E_n^{(1)}}} \right]_a^b \\ &= \hbar \pi \left( n + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Per definizione di punto di inversione risulta  $W^2(b) = W^2(a) = E_n$ ; ponendo  $W(b) = -W(a) = \sqrt{E_n^{(1)}}$  si ha

$$\int_a^b \sqrt{2m \left( E_n^{(1)} - W^2(x) \right)} dx = n\pi\hbar, \quad (4.47)$$

e, poiché  $E_0^{(1)} = 0$ , si ha  $a = b$  per  $n = 0$ . Le condizioni appena imposte sono necessarie per rimuovere la singolarità presente, nel caso del livello fondamentale, nella (4.46).

La relazione (4.47) è esatta per  $n = 0$ , e quindi fornisce risultati approssimati anche per piccoli valori di  $n$ : il metodo SWKB, rispetto al WKB, permette di indagare lo spettro energetico discreto di un sistema anche per valori piccoli di  $n$ .

Si osservi, infine, che definendo il potenziale partner

$$V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \quad (4.48)$$

si ottiene

$$I^{(2)} = \int_a^b \sqrt{2m \left( E_n^{(2)} - W^2(x) \right)} dx - \frac{\hbar}{2} \arcsin \left[ \frac{W(x)}{\sqrt{E_n^{(2)}}} \right]_a^b, \quad (4.49)$$

da cui segue

$$\int_a^b \sqrt{2m \left( E_n^{(2)} - W^2(x) \right)} dx = \pi\hbar(n+1), \quad (4.50)$$

che conferma la relazione tra i livelli di energia dei sistemi partner

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}. \quad (4.51)$$

# Conclusioni

In questo lavoro si è introdotto un formalismo legato alla supersimmetria che permette di studiare determinati problemi in meccanica quantistica, costruendo altri sistemi chiamati partner supersimmetrici: questi sono legati tra loro dalla corrispondenza, per gli autostati di energia, di due Hamiltoniani partner. È quindi possibile unire i due sistemi partner in uno solo, invariante nell'energia per scambi tra stati dei due Hamiltoniani: questo rispecchia l'idea alla base della supersimmetria esposta nell'Introduzione.

In alcuni casi i sistemi partner sono costruzioni che costituiscono un'interpretazione diversa della nozione di stato eccitato del sistema di partenza: per esempio, nello studio del potenziale  $V(x) \sim -\text{sech}^2 x$  ogni livello eccitato viene interpretato come stato fondamentale di un sistema partner di ordine superiore. Nel caso dell'oscillatore armonico, invece, il sistema partner coincide con il sistema stesso, mentre nel caso dell'atomo di idrogeno i sistemi partner supersimmetrici comprendono gli stati con un fissato valore del momento angolare orbitale dell'elettrone.

Nella tesi sono stati analizzati alcuni problemi riguardanti stati legati: come già detto, non è stato trattato il caso di una particella libera ricavando le relazioni, che pure derivano dalla nozione di supersimmetria, per i coefficienti di trasmissione e riflessione nell'interazione con una barriera di potenziale. Inoltre, non è stata studiata la classe dei potenziali isospettrali ed un criterio per ottenere una famiglia di simili potenziali a partire da un sistema supersimmetrico. Un altro problema non affrontato è quello di una particella carica interagente con un campo elettromagnetico; ancora, si potrebbe considerare l'allargamento della classe di potenziali periodici, analiticamente risolvibili grazie alla supersimmetria, con importanti applicazioni ai reticoli cristallini ed alla fisica degli stati condensati della materia. Ricordiamo, infine, le possibili applicazioni della supersimmetria per l'integrazione dell'equazione di Schrödinger con altri metodi perturbativi, oltre al SWKB, come ad esempio metodi variazionali.

La supersimmetria, quindi, potrà anche risultare non idonea a colmare le lacune presenti, ad esempio, nel modello standard; tuttavia, lo studio della meccanica quantistica in chiave supersimmetrica ha portato importanti risultati, alcuni dei quali sono stati descritti in questo lavoro.

# Bibliografia

- [1] G. Kane, M. Shifman, *The supersymmetric world: the beginnings of the Theory*, World Scientific, Singapore, 2000.
- [2] R. Penrose, *La strada che porta alla realtà*, BUR, Milano, 2004.
- [3] G. Kane, *Supersymmetry: Unveiling the Ultimate Laws of Nature*, Perseus Books, Cambridge, 2000.
- [4] U. Sukhatme, F. Cooper, A. Khare, *Supersymmetry in Quantum Mechanics*, World Scientific, Singapore, 2001.
- [5] R. Hagedorn, M. Chainchian, *Symmetries in Quantum Mechanics: From Angular Momentum to Supersymmetry*, Taylor & Francis, 1997.
- [6] F. Bastianelli, *Meccanica quantistica supersimmetrica. Dispense per il corso di Fisica Teorica*, <http://www-th.bo.infn.it/people/bastianelli/susyqm.ps>, Bologna, 2005.
- [7] G. Nardulli, *Meccanica Quantistica*, vol. 1 e 2, Franco Angeli, Milano, 2001.
- [8] E. Witten, Dynamical breaking of supersymmetry, *Nucl. Phys.*, **B 185** (1981), 513-554.
- [9] S. Wolfram, *Mathematica: a system for doing mathematics by computer*, Addison Weley, Redwood City, 1991.
- [10] L. Landau, E. Lifšits, *Fisica Teorica, vol. III (Meccanica quantistica)*, Editori Riuniti, Roma, 1976.
- [11] R. Shankar, *Principle of Quantum Mechanics*, Plenum Press, New York, 1994
- [12] G. Wentzel, Eine Verallgemeinerung der Quantenbedingungen für die Zwecke der Wellenmechanik, *Z. f. Phys.*, **38** (1926), 518-529.
- [13] H. A. Kramers, Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung, *Z. f. Phys.*, **39** (1926), 828-840.
- [14] L. Brillouin, La mécanique ondulatoire de Schrödinger: une méthode générale de resolution par approximations successives, *Comptes Rendus*, **183** (1926), 24-26.
- [15] U. Sukhatme, R. Dutt, A. Khare, Supersymmetry-inspired WKB approximation in quantum mechanics, *Am. J. Phys.*, **59** (1991), 723-272.



# Ringraziamenti

Desidero ringraziare calorosamente il Dott. Colangelo per l'impegno e la notevole attenzione che ha mostrato nel seguirmi in questo lavoro, e per l'aiuto che mi ha dato nel raggiungimento di questo obiettivo.

Ringrazio il Prof. Scrimieri per avermi seguito nell'attività di tirocinio.

Grazie alla mia famiglia, per aver sempre rispettato le mie scelte; grazie alla mia ragazza, per i momenti di sconforto che è riuscita ad alleviare, e grazie ai miei amici, per non aver mai fatto mancare il loro incoraggiamento ed affetto, accompagnandomi in questo entusiasmante cammino.