

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI**  
**FACOLTÀ DI SCIENZE MM. FF. NN.**  
**CORSO DI LAUREA IN FISICA**

---

**TESI DI LAUREA IN FISICA TEORICA**

**STATI COERENTI IN MECCANICA  
QUANTISTICA**

Relatore:  
Chiar.mo Prof. Leonardo ANGELINI

Laureando:  
Francesco Vincenzo PEPE

---

ANNO ACCADEMICO 2006/2007



# Indice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>INTRODUZIONE</b>  | <b>4</b>  |
| <br>   |           |
| <b>1. STATI COERENTI DELL'OSCILLATORE ARMONICO</b>   | <b>7</b>  |
| 1.1 L'oscillatore armonico. Relazioni operatoriali, stati stazionari   | 7         |
| 1.2 Stati coerenti dell'oscillatore: definizione e proprietà fondamentali  | 10        |
| 1.3 Proprietà algebriche degli stati coerenti  | 15        |
| 1.4 Definizione equivalente di Glauber. Proprietà fisiche degli stati coerenti: osservabili e funzioni d'onda          | 18        |
| 1.5 Relazione di indeterminazione. Generalizzazione degli stati di minima incertezza: stati coerenti e stati compressi | 22        |
| 1.6 Oscillatore forzato e stati coerenti   | 24        |
| <br>   |           |
| <b>2. UN ULTERIORE ESEMPIO: GLI STATI COERENTI DEL ROTATORE</b>  | <b>29</b> |
| 2.1 Il rotatore rigido. Autostati dell'energia   | 29        |
| 2.2 Stati coerenti del rotatore  | 31        |
| 2.3 Calcolo delle incertezze. Osservazioni sulla relazione di indeterminazione angolo-momento angolare                 | 33        |
| <br>   |           |
| <b>3. STATI COERENTI: APPLICAZIONE IN OTTICA QUANTISTICA</b>   | <b>37</b> |
| 3.1 Equazioni di Maxwell e potenziali elettromagnetici. Gauge di radiazione. Onde elettromagnetiche piane              | 37        |
| 3.2 Decomposizione del campo elettromagnetico in modi normali  | 40        |
| 3.3 Quantizzazione del campo elettromagnetico  | 42        |
| 3.4 Stati coerenti della radiazione  | 43        |
| <br>   |           |
| <b>BIBLIOGRAFIA</b>  | <b>47</b> |

## Introduzione

La scoperta e lo studio degli stati coerenti rappresenta un aspetto di uno dei più grandi problemi che i fisici si sono trovati ad affrontare con la nascita e il successivo sviluppo, confortato da eccellenti risultati sperimentali, della meccanica quantistica: la ricerca di una corrispondenza tra la nuova teoria, ideata per l'analisi dei sistemi microscopici, e la fisica classica, ancora del tutto valida per la descrizione del mondo macroscopico.

La nozione di stato coerente, legata inizialmente ad un ambito strettamente meccanico, cioè allo studio dell'oscillatore armonico e di altri sistemi dinamici, è stata trasferita in tempi recenti ad un campo molto più ampio, comprendente l'ottica quantistica e la teoria dei gruppi.

La storia degli stati coerenti inizia subito dopo l'avvento della meccanica quantistica [1]: la loro introduzione a livello concettuale risale infatti ad un articolo pubblicato nel 1926, in cui Schrödinger riporta l'esistenza di una classe di stati dell'oscillatore armonico che mostrano, in un certo senso, comportamento analogo a quello di un oscillatore classico: per tali stati si verifica che l'energia media corrisponde al valore classico e le medie di posizione e impulso hanno forme oscillatorie in relazione di fase costante. Non è un caso che un'idea di questo genere sia nata proprio nell'ambito dello studio dell'oscillatore armonico unidimensionale: l'analisi di questo sistema dinamico è fondamentale in meccanica quantistica [2], sia perché costituisce un'ottima approssimazione per i moti unidimensionali in un intorno di un punto di equilibrio stabile, sia perché, particolare tutt'altro che trascurabile, costituisce uno dei pochi sistemi risolti in maniera esaustiva e relativamente semplice; la teoria della quantizzazione della radiazione elettromagnetica ha inoltre garantito nuove applicazioni all'oscillatore

armonico, che sono stati rilevanti, tra l'altro, nella ritrovata importanza degli stati coerenti.

Tornando all'articolo di Schrödinger [1], gli stati "quasi classici" da lui individuati presentano, oltre alle caratteristiche già citate, un importante aspetto: essendo rappresentati da pacchetti d'onda gaussiani che non cambiano forma nel tempo, garantiscono la minimizzazione del prodotto tra le incertezze sulla posizione e sull'impulso, cioè la condizione più vicina alla possibilità di misurare contemporaneamente le suddette grandezze con precisione arbitraria, consentita dalla fisica classica.

Una volta individuate funzioni d'onda di questo genere per un oscillatore armonico, l'obiettivo di Schrödinger era la ricerca di stati simili per altri sistemi dinamici, primo tra tutti l'atomo d'idrogeno; un esito positivo di questa ricerca avrebbe garantito una forte corrispondenza tra vecchia e nuova teoria, costituendo la prova che, in determinate condizioni, esiste un pacchetto d'onde concentrato in una regione limitata dello spazio che si muove proprio sulle orbite classiche. La ricerca degli stati "coerenti" dell'atomo d'idrogeno non ha tuttavia avuto esito positivo; esistono invece studi su stati che presentano caratteristiche classiche riferiti ad altri sistemi dinamici, che hanno portato a interessanti risultati: nel caso del rotatore rigido piano [3] è stato possibile dimostrare che esistono opportune combinazioni delle autofunzioni del momento angolare lungo un asse la cui distribuzione di probabilità è concentrata intorno a un angolo.

Gli stati "quasi classici" scoperti da Schrödinger, la cui importanza è stata per qualche tempo trascurata in seguito all'impossibilità di ottenere stati analoghi per l'atomo di idrogeno, sono stati riscoperti intorno agli anni '60 e applicati allo studio dell'ottica quantistica: si deve in particolare a Glauber (1963) [4] il nome stesso di "stati coerenti" e la loro definizione operatoriale, quella di autostati dell'operatore di annichilazione; la loro applicazione iniziale riguardava essenzialmente lo studio delle funzioni di correlazione elettromagnetiche. La nozione di stati coerenti è stata in seguito estesa, grazie agli studi di Klauder e Sudarshan, alla teoria dei gruppi: è possibile infatti definire stati coerenti di un gruppo di Lie, con proprietà analoghe ai corrispondenti stati dell'oscillatore

armonico: l'estensione è dovuta alle particolari proprietà algebriche ad essi associate.

Attualmente gli stati coerenti trovano ampio utilizzo nello studio delle proprietà della statistica dei fotoni nei campi elettromagnetici [1]; anche nell'ambito dell'elettrodinamica quantistica è possibile ricorrere ad una descrizione della radiazione in termini di stati coerenti per stabilire una corrispondenza tra i campi classici e i campi quantizzati [5]; se gli oscillatori equivalenti al campo elettromagnetico sono in uno stato coerente, i valori attesi del campo elettrico e del campo magnetico si evolvono come i corrispondenti valori classici: ciò rende possibile introdurre un concetto di coerenza della radiazione anche in ambito quantistico.

## Capitolo 1

# Stati coerenti dell'oscillatore armonico

In questo capitolo si introduce in via preliminare l'oscillatore armonico come sistema dinamico quantistico, con l'analisi delle fondamentali relazioni tra i relativi operatori e la descrizione degli stati stazionari; in seguito si definisce il concetto di stati coerenti secondo Schrödinger e secondo Glauber, si dimostra l'equivalenza delle due definizioni e si ricavano le principali proprietà fisiche e algebriche di tali stati. Nell'ultima parte si analizza un esempio di creazione di uno stato coerente mediante l'applicazione di una forza esterna ad un oscillatore armonico che si trova nel suo stato fondamentale.

### 1.1 L'oscillatore armonico: relazioni operatoriali, stati stazionari

L'oscillatore armonico unidimensionale quantistico è un sistema costituito da una particella vincolata a muoversi su una retta, il cui vettore di stato  $|\psi(t)\rangle$  soddisfa l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad (1)$$

in cui l'operatore hamiltoniano  $H$  ha l'espressione

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad , \quad (2)$$

dove  $x$  e  $p$  sono rispettivamente gli operatori posizione e impulso,  $m$  è la massa dell'oscillatore e  $\omega$  una costante positiva corrispondente alla pulsazione classica, legata all'intensità della forza di richiamo.

Come si osserva, l'hamiltoniana del sistema quantistico ha la stessa forma della corrispondente grandezza classica, a meno della sostituzione alle quantità fisiche posizione e impulso dei corrispondenti operatori lineari hermitiani sullo spazio di Hilbert dei vettori di stato, che soddisfano la regola di commutazione

$$[x, p] = i\hbar \quad (3)$$

L'analisi del sistema è agevolata dall'introduzione di due operatori coniugati, detti operatori di modo normale, a cui sarà dato in seguito un preciso significato fisico:

$$a = \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \quad , \quad (4)$$

$$a^+ = \frac{m\omega x - ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \quad . \quad (5)$$

Dalla loro definizione e dalla regola di commutazione (3) si ricavano le seguenti relazioni [2]:

$$[a, a^+] = I, \quad (6)$$

$$[a, a] = [a^+, a^+] = 0, \quad (7)$$

$$[a, H] = \hbar\omega a \quad , \quad (8)$$

che consentono di esprimere l'hamiltoniana nella forma

$$H = \hbar\omega \left( a^+ a + \frac{1}{2} \right) \quad . \quad (9)$$

Poiché l'operatore hamiltoniano è costituito, a meno di costanti, dalla somma dei quadrati di due operatori hermitiani, i suoi autovalori devono essere positivi; è possibile dimostrare utilizzando la (9) che tutti gli autovalori dello spettro devono essere maggiori o uguali di  $\frac{\hbar\omega}{2}$ ; al minimo autovalore dello spettro energetico corrisponde

l'autostato  $|0\rangle$  (stato fondamentale o *ground state*) per il quale vale la proprietà

$$a|0\rangle = 0 \quad . \quad (10)$$

Inoltre, detto  $H'$  un autovalore arbitrario dell'hamiltoniana (purché diverso dal minimo nella (9)) e  $|H'\rangle$  il corrispondente autostato, si ha [2]

$$Ha|H'\rangle = (H' - \hbar\omega)a|H'\rangle \quad , \quad (11)$$

$$Ha^+|H'\rangle = (H' + \hbar\omega)a^+|H'\rangle \quad ; \quad (12)$$

è possibile osservare che gli autovalori dell'energia differiscono tra loro di multipli di  $\hbar\omega$ , e possono essere individuati da un indice  $n$  relativo al numero di quanti energetici (detti "fotoni" per analogia con i quanti di energia elettromagnetica osservati nell'effetto fotoelettrico) ad essi corrispondenti:

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (13)$$

L'operatore hamiltoniano può quindi essere espresso nel modo seguente:

$$H = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right) \quad . \quad (14)$$

La (13) è significativa in quanto si è posto  $a^+a = \hat{N}$  (operatore numero) per indicare che l'operatore conta il numero di quanti di energia  $\hbar\omega$  che competono ad un determinato autovalore.

A questo punto può essere chiarito il ruolo degli operatori di modo normale: si osserva che l'applicazione di  $a$  ad uno stato stazionario restituisce sempre un autostato di  $H$ , ma con numero di fotoni ridotto di 1, mentre  $a^+$  incrementa il numero di una unità; alla luce di questa proprietà,  $a$  e  $a^+$  assumono rispettivamente il nome di operatori di *distruzione* (o *annichilazione*) e *creazione*. Imponendo che tutti gli stati stazionari siano normalizzati, le suddette proprietà si esprimono in questo modo [2]:

$$a^+|n-1\rangle = \sqrt{n}|n\rangle \quad , \quad (15)$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad . \quad (16)$$

L'autostato normalizzato relativo al generico autovalore  $E_n$  si ottiene quindi, a meno di una costante, applicando  $n$  volte l'operatore di creazione allo stato fondamentale:

$$|n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \quad . \quad (17)$$

Gli autovalori dell'energia non sono degeneri; i relativi autoket costituiscono un sistema ortonormale completo di vettori nello spazio degli stati dell'oscillatore armonico, che soddisfa la relazione di completezza

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = I \quad , \quad (18)$$

che consente di scrivere il generico stato come combinazione lineare di stati stazionari:

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|\psi\rangle \quad . \quad (19)$$

La definizione (4) e (5) degli operatori di creazione e distruzione consente di esprimere  $x$  e  $p$  in funzione di essi:

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^+) \quad , \quad (19)$$

$$p = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (a - a^+) \quad . \quad (20)$$

Dalle relazioni (15) e (16) si osserva che, in virtù dell'ortonormalità degli stati stazionari, gli elementi di matrice diagonali degli operatori posizione e impulso sono nulli nella rappresentazione dell'energia, il che significa che i valori di attesa di posizione e impulso su qualsiasi stato stazionario sono nulli istante per istante.

## 1.2 Stati coerenti dell'oscillatore: definizione e proprietà fondamentali

Gli stati stazionari appena analizzati sono caratterizzati da distribuzioni di probabilità rispetto alla posizione costanti nel tempo; i valori di attesa della posizione e dell'impulso sono nulli in ogni istante: questo aspetto costituisce una fondamentale differenza con gli stati dell'oscillatore classico, per i quali, una volta definita l'energia (purché diversa da zero), le osservabili posizione e impulso si evolvono nel tempo secondo funzioni sinusoidali e sono sempre in quadratura di fase tra loro. Inoltre, se si calcolano le incertezze su posizione e impulso per uno stato stazionario ad  $n$  fotoni, si ottiene la relazione di indeterminazione [5]

$$\Delta x \Delta p = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \quad ; \quad (21)$$

è dunque possibile ottenere la minimizzazione del prodotto delle incertezze su impulso e

posizione, che rappresenta la massima similitudine con la meccanica classica (grandezze misurabili con precisione arbitraria, solo nel caso del *ground state*, la cui funzione d'onda è una gaussiana centrata sull'origine:

$$\phi_0(q) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2} \quad ; \quad (22)$$

come tutti i pacchetti d'onda gaussiani, la (22) verifica la relazione

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} \quad . \quad (23)$$

Uno stato che sia quanto più possibile simile al caso classico deve dunque presentare le seguenti caratteristiche:

- 1 *L'evoluzione nel tempo dei valori di aspettazione di posizione e impulso deve essere di tipo periodico semplice, con rapporto di fase costante tra posizione e impulso;*
- 2 *Le funzioni d'onda devono essere quanto più strette possibile intorno al valore medio della posizione, in modo che la distribuzione di probabilità rispetto alla posizione possa tendere, variando opportuni parametri, ad una funzione delta di Dirac;*
- 3 *Il prodotto delle incertezze sulla posizione e sull'impulso deve essere minimo.*

Gli stati coerenti, ricercati inizialmente da Schrödinger per soddisfare le suddette proprietà, si possono definire come gli stati  $|\alpha(t)\rangle$  per i quali sono valide le condizioni [1]:

$$\bullet \quad \langle \alpha(t) | x | \alpha(t) \rangle = x_{cl}(t) \quad (24)$$

$$\bullet \quad \langle \alpha(t) | H | \alpha(t) \rangle = E_{cl} \quad (25)$$

La prima condizione impone che il valore di attesa della posizione sia una funzione temporale che ha la stessa forma della posizione di un oscillatore classico:

$$x_{cl}(t) = C e^{-i\omega t} + C^* e^{i\omega t} \quad ; \quad (26)$$

ponendo

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \quad (27)$$

e  $\alpha = C/x_0$ , è opportuno eseguire sulla (26) una fattorizzazione, la cui utilità sarà chiara in seguito:

$$x_{cl}(t) = x_0(\alpha e^{-i\omega t} + \alpha^* e^{i\omega t}) \quad (28)$$

La seconda condizione impone che l'energia si conservi, secondo la definizione quantomeccanica, e corrisponda al valore classico

$$E_{cl} = \frac{1}{2} m \dot{x}_{cl}^2(t) + \frac{1}{2} m \omega^2 x_{cl}^2(t) = 2m\omega x_0^2 |\alpha|^2 \quad (29)$$

Nel seguito della trattazione, si assume per comodità di calcolo che l'energia sia misurata a partire dal *ground state*, cioè sottraendo la quantità  $\hbar\omega/2$  dall'hamiltoniana [1]; come si è visto in precedenza, l'utilizzo delle formule (4) e (5) rende possibile esprimere  $x$  come prodotto di una costante per la somma degli operatori di creazione e distruzione:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^+) \equiv x_0 (a + a^+) \quad (30)$$

La suddetta espressione, unita all'applicazione del propagatore dell'equazione di Schrödinger

$$|\alpha(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} |\alpha\rangle = e^{-i\omega t (a^+ a)} |\alpha\rangle \quad (31)$$

in cui  $|\alpha\rangle$  rappresenta il vettore di stato del sistema all'istante  $t=0$ , consente di scrivere la condizione (24) come

$$x_{cl}(t) = x_0 \langle \alpha | e^{i\omega t a^+ a} (a + a^+) e^{-i\omega t a^+ a} | \alpha \rangle \quad (32)$$

il secondo membro può essere semplificato utilizzando l'identità operatoriale [1]

$$e^{\xi a^+ a} f(a, a^+) e^{-\xi a^+ a} = f(a e^{-\xi}, a^+ e^{\xi}) \quad (33)$$

valida per funzioni  $f$  espandibili in serie di potenze; le (32) e (33) consentono in definitiva di scrivere la condizione (24) come:

$$x_0 (\langle \alpha | a | \alpha \rangle e^{-i\omega t} + \langle \alpha | a^+ | \alpha \rangle e^{i\omega t}) = x_0 (\alpha e^{-i\omega t} + \alpha^* e^{i\omega t}) \quad (34)$$

questa uguaglianza porta ad individuare una prima proprietà dello stato  $|\alpha\rangle$ :

$$\langle \alpha | a | \alpha \rangle = \alpha \quad . \quad (35)$$

Si introducono a questo punto due operatori  $a'$  e  $a'^+$  così definiti,

$$a' = a + \alpha \quad , \quad (36)$$

$$a'^+ = a^+ + \alpha^* \quad , \quad (37)$$

che verificano banalmente le stesse proprietà di commutazione degli operatori di creazione e distruzione, e possono essere da essi ottenuti applicando un operatore unitario, di cui sarà in seguito determinata l'espressione [1]:

$$a' = D^+(\alpha) a D(\alpha) \quad , \quad (38)$$

$$a'^+ = D^+(\alpha) a^+ D(\alpha) \quad , \quad (39)$$

$$D(\alpha) D^+(\alpha) = D^+(\alpha) D(\alpha) = I \quad . \quad (40)$$

Una volta definito

$$|\alpha'\rangle = D^+(\alpha) |\alpha\rangle \quad (41)$$

è possibile ricavare

$$\langle \alpha' | a' | \alpha' \rangle = \langle \alpha | D(\alpha) a' D^+(\alpha) | \alpha \rangle = \langle \alpha | a | \alpha \rangle = \alpha \quad , \quad (42)$$

da cui segue, per la proprietà (35),

$$\langle \alpha' | a | \alpha' \rangle = \langle \alpha | a' - \alpha | \alpha \rangle = 0 \quad . \quad (43)$$

Poiché la suddetta proprietà è verificata, tra l'altro, da tutti gli stati stazionari, la condizione (24) non è sufficiente a determinare in maniera univoca lo stato coerente; a questo scopo occorre applicare, facendo uso dei risultati ottenuti e definendo  $H' = D^+(\alpha) H D(\alpha)$ , la condizione sul valor medio dell'energia; il valore calcolato su uno stato  $|\alpha(t)\rangle$  risulta

$$\begin{aligned} \langle \alpha(t) | H | \alpha(t) \rangle &= \langle \alpha(t) | D(\alpha) H' D^+ | \alpha(t) \rangle = \langle \alpha'(t) | H' | \alpha'(t) \rangle = \hbar\omega \langle \alpha'(t) | (a^+ + \alpha^*)(a + \alpha) | \alpha'(t) \rangle \\ &= \hbar\omega |\alpha|^2 + \langle \alpha' | H | \alpha' \rangle + \hbar\omega\alpha \langle \alpha' | a^+ | \alpha' \rangle + \hbar\omega\alpha^* \langle \alpha' | a | \alpha' \rangle \quad ; \end{aligned} \quad (44)$$

il terzo e il quarto addendo all'ultimo membro sono nulli per la (43), mentre il primo addendo corrisponde al valore  $E_{cl}$ : la condizione (25) è dunque soddisfatta se e solo se

$$\langle \alpha' | H | \alpha' \rangle = \hbar \omega \langle \alpha' | \hat{N} | \alpha' \rangle = 0 ; \quad (45)$$

l'unico vettore di stato che verifica questa proprietà è il *ground state* dell'oscillatore; l'unicità di  $|\alpha'\rangle$  implica l'unicità di  $|\alpha\rangle$ , che si ottiene dall'equazione (41):

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle , \quad (46)$$

$$|\alpha(t)\rangle = e^{-i\omega a^\dagger a} D(\alpha)|0\rangle . \quad (47)$$

Resta ora da definire la forma dell'operatore  $D$ , per poter esprimere in maniera esplicita lo stato coerente; si ricorre alla proprietà degli operatori unitari, per i quali esiste sempre un operatore hermitiano  $h$  tale che

$$D(\alpha) = e^{ih(\alpha)} ; \quad (48)$$

data questa proprietà, le (36) e (37) si riducono a

$$e^{-ih(\alpha)} a e^{ih(\alpha)} = a + \alpha , \quad (49)$$

$$e^{-ih(\alpha)} a^\dagger e^{ih(\alpha)} = a^\dagger + \alpha^* , \quad (50)$$

che usando l'identità di Baker-Hausdorff diventano

$$a - i[h(\alpha), a] + \dots = a + \alpha , \quad (51)$$

$$a^\dagger - i[h(\alpha), a^\dagger] + \dots = a^\dagger + \alpha^* . \quad (52)$$

Le equazioni (51) e (52) sono soddisfatte se

$$[h(\alpha), a] = i\alpha , \quad (53)$$

$$[h(\alpha), a^\dagger] = i\alpha^* ; \quad (54)$$

un operatore che soddisfa queste ultime condizioni è  $h(\alpha) = -i(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$ , quindi l'operatore  $D$  ha l'espressione.

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} . \quad (55)$$

Partendo da una definizione analoga a quella di Schrödinger, è stato quindi possibile provare la seguente proprietà (P1): *gli stati coerenti si ottengono applicando al ground state dell'oscillatore armonico l'operatore definito dalla (55), che sarà da questo punto in poi indicato come "operatore di spostamento"*.

Combinando le equazioni (46), (36) e (38) e considerando la (10) si ottiene una ulteriore proprietà (P2):

$$a|\alpha\rangle = aD(\alpha)|0\rangle = D(\alpha)(a + \alpha)|0\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (56)$$

gli stati coerenti sono autostati dell'operatore di distruzione dell'oscillatore armonico corrispondenti ad un autovalore  $\alpha$ , in genere complesso; questa proprietà è stata utilizzata da Glauber come definizione di stati coerenti. La P1 può essere dimostrata anche risolvendo l'equazione agli autovalori (56); in generale è possibile partire sia dalla definizione di Schrödinger sia da una tra P1 e P2 per ottenere le stesse proprietà degli stati coerenti, che saranno nel seguito della trattazione enunciate e dimostrate.

Utilizzando la P1 e l'identità operatoriale  $e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2}$ , valida quando il commutatore tra  $A$  e  $B$  è un numero, si ottiene

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle, \quad (57)$$

in cui l'ultimo passaggio è giustificato da  $e^{-\alpha^* a} |0\rangle = |0\rangle$ , essendo  $a|0\rangle = 0$  [5].

Considerando lo sviluppo in serie dell'operatore

$$e^{\alpha a^\dagger} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\alpha^n}{n!} \right) (a^\dagger)^n \quad (58)$$

e tenendo presente la (17), è possibile esprimere lo stato coerente nella base degli stati stazionari:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \right) |n\rangle. \quad (59)$$

Gli stati ottenuti in questo modo sono già normalizzati, essendo prodotti dall'applicazione di un operatore unitario al ground state normalizzato dell'oscillatore. Dall'espressione nella base dell'energia si può immediatamente ricavare una proprietà fisica degli stati coerenti: la distribuzione di probabilità associata al numero di fotoni di uno stato coerente è

$$P_\alpha(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}, \quad (60)$$

cioè una distribuzione poissoniana con media [6]

$$N = \langle \alpha | \hat{N} | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \quad (61)$$

e varianza (che in questo caso assume il significato di incertezza sulla misura di  $n$ ) uguale alla radice quadrata del valor medio.

### 1.3 Proprietà algebriche degli stati coerenti

Data l'espressione (57) di un generico stato coerente nella rappresentazione dell'energia, risulta immediato ricavare alcuni aspetti matematici [1]:

- *Due distinti stati coerenti non sono vettori ortogonali dello spazio di Hilbert degli stati dell'oscillatore armonico.*

La dimostrazione segue dalla (57):

$$\langle \alpha | \beta \rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n} \beta^m}{\sqrt{n!m!}} \langle n | m \rangle = e^{-\left(\frac{|\alpha|^2}{2} + \frac{|\beta|^2}{2} - \alpha^* \beta\right)} = e^{-\frac{|\alpha - \beta|^2}{2}}, \quad (62)$$

quindi il prodotto scalare tra due stati coerenti non è mai nullo; inoltre è una funzione continua di due variabili complesse.

- *L'insieme dei ket relativi agli stati coerenti è un insieme di vettori linearmente dipendenti; ciò implica che uno stato coerente può essere espresso come combinazione lineare degli altri.*

Per dimostrare la proprietà si considera la sovrapposizione lineare di stati coerenti  $|\alpha\rangle$  su tutto il piano complesso con coefficienti  $\alpha^m$  [1], dove  $m$  è un intero positivo non nullo; scrivendo  $\alpha = re^{i\theta}$  e  $d^2\alpha = r dr d\theta$ , la sovrapposizione risulta:

$$\int \alpha^m |\alpha\rangle d^2\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle}{\sqrt{n!}} \int_0^{\infty} r^{n+m+1} e^{-\frac{r^2}{2}} dr \int_0^{2\pi} e^{i(m+n)\theta} d\theta; \quad (63)$$

l'integrale in  $dr$  è sempre limitato, mentre l'integrale sull'angolo si riduce a  $2\pi\delta_{m,-n}$ , ed è sempre nullo essendo sia  $m$  sia  $n$  non negativi. Si è ottenuta quindi una sovrapposizione lineare nulla utilizzando coefficienti non nulli, quindi il set dei vettori di stato coerente è linearmente dipendente.

- *Ogni insieme finito di vettori di stato coerente è un insieme di vettori linearmente indipendenti.*

Si consideri una sovrapposizione lineare nulla di un numero finito di stati  $|\alpha_i\rangle$  con coefficienti  $c_i$ :

$$\sum_{i=1}^k c_i |\alpha_i\rangle = 0 \quad . \quad (64)$$

Moltiplicando scalarmente per un vettore bra di stato coerente  $\langle\alpha|$  si ottiene

$$\sum_{i=1}^k c_i \langle\alpha|\alpha_i\rangle = 0 \quad , \quad (65)$$

uguaglianza verificata, come volevasi dimostrare, se e solo se i coefficienti  $c_i$  della combinazione lineare sono tutti nulli, poiché i prodotti scalari tra stati coerenti sono linearmente indipendenti.

- *L'insieme dei vettori di stato coerente è completo, e la relazione di completezza assume la forma*

$$\frac{1}{\pi} \int_C |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha = I \quad . \quad (66)$$

Per verificare l'enunciato occorre provare che per ogni coppia generica di vettori di stato, si ha

$$\frac{1}{\pi} \int_C \langle\psi|\alpha\rangle\langle\alpha|\varphi\rangle d^2\alpha = \langle\psi|\varphi\rangle \quad ; \quad (67)$$

utilizzando la (59) e scrivendo  $\alpha = re^{i\theta}$  e  $d^2\alpha = r dr d\theta$ , l'integrale al primo membro diventa

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n,m=0}^{\infty} \langle\psi|m\rangle \left[ \int_0^{\infty} \frac{r^{n+m+1}}{\sqrt{n!m!}} e^{-r^2} dr \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta \right] \langle n|\varphi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle\psi|n\rangle\langle n|\varphi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle \quad , \quad (68)$$

come volevasi dimostrare, essendo l'integrale sull'angolo uguale a  $2\pi\delta_{mm}$  ed usando

$$\int_0^{\infty} r^{2n} e^{-r^2} dr^2 = n! \quad \text{nella risoluzione dell'integrale sul raggio. Questa proprietà,}$$

associata alla dipendenza lineare di ogni stato coerente dagli altri, è detta *sovracompletezza*, e può essere interpretata come esistenza di più stati coerenti di quanti sarebbero necessari per esprimere un ket generico nella loro base.

Date le suddette proprietà, è possibile espandere un generico stato nella base degli stati coerenti:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha | \psi \rangle d^2\alpha \quad (69)$$

e in particolare espandere nella stessa base uno stato coerente, in virtù della appena citata sovracompletezza:

$$|\beta\rangle = \frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha | \beta \rangle d^2\alpha = \frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle e^{-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2} + \alpha^* \beta} d^2\alpha \quad . \quad (70)$$

Particolare rilievo assume l'espressione di uno stato stazionario nella base degli stati coerenti:

$$|n\rangle = \frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha | n \rangle d^2\alpha = \frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \left( \frac{\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}} \right) e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} d^2\alpha \quad ; \quad (71)$$

ciò consente di esprimere i coefficienti dell'espansione (69) come

$$\langle \alpha | \psi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \alpha | n \rangle \langle n | \psi \rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \psi \rangle \left( \frac{\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}} \right) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} f_{\psi}(\alpha^*) \quad ; \quad (72)$$

poiché  $\sum_{n=0}^{\infty} |\langle n | \psi \rangle|^2 = \langle \psi | \psi \rangle = 1$ , la  $f_{\psi}(\alpha^*)$  è assolutamente convergente in qualsiasi regione finita del piano complesso, è cioè una funzione intera; la base degli stati coerenti consente quindi di associare ad ogni stato dello spazio di Hilbert dell'oscillatore armonico una funzione intera sul piano complesso.

#### 1.4 Definizione equivalente di Glauber. Proprietà fisiche degli stati coerenti: osservabili e funzioni d'onda

Nella definizione di Schrödinger utilizzata nel paragrafo 1.2 per caratterizzare gli stati coerenti, si impone che il valore atteso della posizione dell'oscillatore in uno stato coerente conservi in ogni istante l'uguaglianza con il valore classico della coordinata, e che al tempo stesso l'energia sia conservata. Gli stati  $|\alpha(t)\rangle$  così definiti risultano per ogni  $t$  autostati dell'operatore di distruzione. Si può provare, come era stato anticipato, che utilizzando la definizione, dovuta a Glauber, di stato coerente come

autostato dell'operatore  $a$  [7], lo stato ottenuto soddisfa le proprietà fisiche (24) e (25) e le altre richieste di corrispondenza con il caso classico; un autostato normalizzato di  $a$  è espresso nella rappresentazione dell'energia dalla formula (59).

Innanzitutto è possibile dimostrare che, dato un autostato dell'operatore di distruzione, esso resta autostato dello stesso operatore, cioè stato coerente, in ogni istante successivo; l'evoluzione dello stato nel tempo si ottiene applicando allo stato  $|\alpha\rangle$ , in cui si assume che il sistema si trovi a  $t = 0$ , il propagatore  $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$  (si trascura ancora il termine costante nell'hamiltoniana):

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} |\alpha\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-in\omega t} |n\rangle = \\ &= e^{-\frac{|\alpha e^{-i\omega t}|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = |\alpha e^{-i\omega t}\rangle = |\alpha(t)\rangle. \end{aligned} \quad (73)$$

Un autostato normalizzato di  $a$  relativo all'autovalore  $\alpha$  evolve nel tempo restando autostato normalizzato con autovalore  $\alpha e^{-i\omega t}$ : la caratteristica di stato coerente si mantiene quindi invariata nell'evoluzione del sistema.

I valori attesi delle osservabili fisiche posizione e impulso sugli stati coerenti si possono ottenere applicando le (19) e (20):

$$\begin{aligned} \langle x \rangle_t &= \langle \alpha(t) | x | \alpha(t) \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle \alpha(t) | a + a^+ | \alpha(t) \rangle = \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\alpha(t) \langle \alpha(t) | \alpha(t) \rangle + \alpha^*(t) \langle \alpha(t) | \alpha(t) \rangle) = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \operatorname{Re} \alpha(t) \quad , \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \langle p \rangle_t &= \langle \alpha(t) | p | \alpha(t) \rangle = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \langle \alpha(t) | a - a^+ | \alpha(t) \rangle = \\ &= \frac{1}{i} \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (\alpha(t) \langle \alpha(t) | \alpha(t) \rangle - \alpha^*(t) \langle \alpha(t) | \alpha(t) \rangle) = \sqrt{2m\hbar\omega} \operatorname{Im} \alpha(t) \quad ; \end{aligned} \quad (75)$$

se ora si considera la forma trigonometrica  $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$ , le precedenti espressioni possono

essere riscritte, ponendo  $A = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} |\alpha|$ , come [8]

$$\langle x \rangle_t = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \operatorname{Re}[\alpha e^{i(\theta-\omega t)}] = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} |\alpha| \cos(\theta - \omega t) \equiv A \cos(\theta - \omega t), \quad (76)$$

$$\langle p \rangle_t = \sqrt{2m\hbar\omega} \operatorname{Im}[\alpha e^{i(\theta-\omega t)}] = \sqrt{2m\hbar\omega} |\alpha| \sin(\theta - \omega t) \equiv m\omega A \sin(\theta - \omega t) ; \quad (77)$$

il valor medio dell'energia è inoltre

$$\langle E \rangle_t = \hbar\omega |\alpha|^2 \equiv \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 . \quad (78)$$

Appare a questo punto evidente come l'evoluzione temporale delle coordinate canoniche di un oscillatore quantistico in uno stato coerente corrisponda ad un moto armonico classico con ampiezza  $A$ , che cresce linearmente con il modulo dell'autovalore dell'operatore di distruzione; la posizione e l'impulso sono funzioni periodiche del tempo con pulsazione identica, e inoltre sono sempre in una relazione di fase ben definita: i valori medi delle due osservabili sono sempre in quadratura tra loro. In definitiva, posizione e impulso verificano il teorema di Ehrenfest: la relazione tra i loro valori di aspettazione è la stessa che sussiste tra le variabili classiche;

$$\langle p \rangle_t = m \frac{d}{dt} \langle x \rangle_t . \quad (79)$$

Un ulteriore requisito che lo stato deve soddisfare per stabilire la massima corrispondenza con il moto classico è che la distribuzione di probabilità di trovare la particella in una data posizione sia sufficientemente "stretta" intorno al valor medio di  $x$ , in modo che la particella si trovi con alta probabilità in un suo intorno; occorre quindi determinare la funzione d'onda dello stato coerente; l'equazione agli autovalori  $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$  diventa nella rappresentazione delle coordinate [8], usando la (4) e chiamando  $\psi_\alpha(x)$  la funzione d'onda dello stato coerente

$$\left( \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_\alpha(x) = \alpha \psi_\alpha(x) , \quad (80)$$

che, con il cambio di variabile  $y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$ , si semplifica in questo modo:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( y + \frac{\partial}{\partial y} \right) \tilde{\psi}_\alpha(y) = \alpha \tilde{\psi}_\alpha(y) . \quad (81)$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale (81) è del tipo

$$\tilde{\psi}_\alpha(y) = Ce^{-\frac{1}{2}y^2 + \sqrt{2}\alpha y} \quad ; \quad (82)$$

con alcuni passaggi algebrici e il cambio della costante di normalizzazione, si ottiene

$$\tilde{\psi}_\alpha(y) = C' e^{-\frac{1}{2}(y - \sqrt{2}\operatorname{Re}\alpha)^2} e^{i\sqrt{2}y\operatorname{Im}\alpha} \quad , \quad (83)$$

$$\psi_\alpha(x) = \tilde{\psi}_\alpha\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) = C' e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}\left(x - \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\operatorname{Re}\alpha\right)^2} e^{i\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}x\operatorname{Im}\alpha} \quad . \quad (84)$$

La costante di normalizzazione presente nella (84), che rappresenta un pacchetto d'onde

gaussiano, è  $\sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}$ ; considerando  $\alpha$  come l'autovalore di  $a$  nell'istante iniziale e

ricordando quindi che

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\operatorname{Re}\alpha = \langle x \rangle_0 \quad \text{e} \quad (85)$$

$$\sqrt{2m\hbar\omega}\operatorname{Im}\alpha = \langle p \rangle_0 \quad , \quad (86)$$

la funzione d'onda dello stato coerente

$$\psi_\alpha(x) = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}(x - \langle x \rangle_0)^2} e^{\frac{i}{\hbar}\langle p \rangle_0 x} \quad (87)$$

rappresenta un pacchetto d'onde gaussiano centrato sul valor medio della posizione che si sposta con impulso medio pari al valore di attesa di  $p$ . La (87) può essere generalizzata ad un istante di tempo qualsiasi:

$$\psi_\alpha(x, t) = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}(x - A\cos(\vartheta - \omega t))^2} e^{\frac{i}{\hbar}m\omega x A\sin(\vartheta - \omega t)} \quad ; \quad (88)$$

la corrispondente distribuzione di probabilità

$$|\psi_\alpha(x, t)|^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}(x - A\cos(\vartheta - \omega t))^2} \quad (89)$$

è una gaussiana con larghezza invariante nel tempo  $\sigma^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$ , centrata istante per

istante sul valore atteso della posizione; è qui evidente come possa essere effettuato il passaggio al limite classico: aumentando la massa dell'oscillatore, ossia rendendo l'oscillatore un oggetto macroscopico, la larghezza della gaussiana tende ad annullarsi, in modo che la distribuzione di probabilità possa essere considerata una delta di Dirac,

che rappresenta una particella localizzata nel valore di attesa della posizione, cioè nella sua coordinata classica.

### 1.5 Relazione di indeterminazione. Generalizzazione degli stati di minima incertezza: stati coerenti e stati compressi

Da stati rappresentati da funzioni d'onda gaussiane ci si aspetta che il prodotto delle incertezze sulla posizione e sull'impulso corrisponda al minimo ammesso dalla relazione di indeterminazione  $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ . Il calcolo dei valori di attesa dei quadrati della posizione e dell'impulso fornisce [8]

$$\langle x^2 \rangle_t = \frac{\hbar}{2m\omega} \left[ (2 \operatorname{Re} \alpha(t))^2 + 1 \right] \quad , \quad (90)$$

$$\langle p^2 \rangle_t = \frac{m\omega\hbar}{2} \left[ (2 \operatorname{Im} \alpha(t))^2 + 1 \right] \quad , \quad (91)$$

che, uniti alle (74) e (75), consentono il calcolo delle incertezze:

$$(\Delta x)_t^2 = \langle x^2 \rangle_t - \langle x \rangle_t^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} = \sigma^2 \quad , \quad (92)$$

$$(\Delta p)_t^2 = \langle p^2 \rangle_t - \langle p \rangle_t^2 = \frac{m\omega\hbar}{2} = \frac{\hbar^2}{4\sigma^2} \quad . \quad (93)$$

Questi risultati coincidono con quanto è previsto per una funzione d'onda gaussiana la cui corrispondente larghezza della distribuzione di probabilità sia  $\sigma^2$ , e portano alla relazione  $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$ . Si può osservare che tra gli stati stazionari l'unico che verifica la stessa minimizzazione è il *ground state*, che è a sua volta rappresentato da una funzione d'onda di tipo gaussiano.

Gli stati coerenti e lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico appartengono ad una particolare classe di vettori di stato, detti *minimum uncertainty states*, che verificano durante tutta la loro evoluzione la minimizzazione del prodotto tra le incertezze su posizione e impulso; si è visto che per gli stati coerenti e il *ground state* le incertezze sono costanti nel tempo; esiste invece una ulteriore classe di stati, detti

compressi, per i quali il prodotto delle incertezze è costante e minimo, ma le singole incertezze variano nel tempo in maniera periodica, con frequenza angolare pari a  $2\omega$ , in modo che se un dato istante l'incertezza sulla posizione è massima, quella sull'impulso sia minima, e viceversa: ciò corrisponde ad una variazione della larghezza dei pacchetti d'onda. Da un punto di vista formale, gli stati compressi soddisfano l'equazione agli autovalori [9]

$$b|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle \quad , \quad (94)$$

in cui  $b$  è una combinazione lineare a coefficienti complessi degli operatori di modo normale:

$$b = \mu a + \nu a^\dagger \quad ; \quad (95)$$

se  $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$ ,  $b$  verifica le stesse regole di commutazione di  $a$ . Una formula generale per gli stati di minima incertezza si ottiene applicando il propagatore dell'oscillatore armonico ad una funzione d'onda gaussiana [10], ed è data da

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar S}} \frac{1}{\sqrt{\cos\omega t + iS \sin\omega t}} e^{R(x,t) + iI(x,t)} \quad , \quad (96)$$

dove

$$R(x,t) = \frac{-m\omega/(2\hbar S)}{1 + (1/S^2 - 1)\cos^2\omega t} (x - A\cos\omega t)^2 \quad , \quad (97)$$

$$I(x,t) = \frac{-m\omega/(2\hbar S)\sin\omega t}{1 + (1/S^2 - 1)\cos^2\omega t} \left( S[(x^2 + A^2)\cos\omega t - 2xA] - \frac{x^2 \cos\omega t}{S} \right) \quad ; \quad (98)$$

la corrispondente densità di probabilità è

$$|\psi(x,t)|^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar S}} \frac{1}{\sqrt{1 + (1/S^2 - 1)\cos^2\omega t}} e^{-\frac{(m\omega/\hbar S)(x - A\cos\omega t)^2}{1 + (1/S^2 - 1)\cos^2\omega t}} \quad ; \quad (99)$$

la (99) rappresenta una distribuzione gaussiana con larghezza

$$(\Delta x)^2 = \frac{\hbar S}{2m\omega} [1 + (1/S^2 - 1)\cos^2\omega t] \quad ; \quad (100)$$

al variare dei parametri  $A$  ed  $S$  si ottengono tre tipi di comportamento per la funzione d'onda:

- Per  $A = 0, S = 1$  la densità di probabilità (99) è tipica di uno stato stazionario, che coincide con lo stato fondamentale dell'oscillatore; le incertezze su posizione e momento sono costanti;
- Per  $A \neq 0, S = 1$  la distribuzione di probabilità è una gaussiana la cui forma resta invariata nel tempo e il cui picco si muove con andamento sinusoidale; le incertezze restano costanti nel tempo; questa situazione coincide evidentemente con quella di uno stato coerente;
- Per  $A = 0, S > 1$  il baricentro della distribuzione di probabilità resta fisso nell'origine ma la larghezza della gaussiana varia, con frequenza angolare  $2\omega$ , tra un minimo  $\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega S}}$  e un massimo  $\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar S}{2m\omega}}$ , corrispondenti ad un massimo e un minimo dell'incertezza sull'impulso. Se  $S$  è minore di 1 i ruoli dei massimi e dei minimi si invertono. La situazione corrisponde a un caso particolare di stato compresso, con posizione media nulla, detto "stato fondamentale generalizzato";
- Per  $A \neq 0, S > 1$  si ha la stessa oscillazione delle incertezze descritta nel caso precedente ma il picco della distribuzione oscilla in maniera sinusoidale: questo è il caso più generale di stato compresso; si può dimostrare che la funzione d'onda è quella che si otterrebbe da un autostato dell'operatore  $b$  definito nella (95), in cui si sia posto  $\mu = \frac{1}{2}\left(\sqrt{S} + \frac{1}{\sqrt{S}}\right)$  e  $\nu = \frac{1}{2}\left(\sqrt{S} - \frac{1}{\sqrt{S}}\right)$ .

## 1.6 Oscillatore forzato e stati coerenti

L'applicazione all'oscillatore armonico di una forza esterna indipendente dalla posizione genera uno stato coerente: in questo paragrafo l'affermazione sarà provata sia considerando il caso di un oscillatore sottoposto a forza costante, sia analizzando il caso di una forza che agisce sull'oscillatore per un breve transiente. In entrambi i casi

all'hamiltoniano si aggiunge un termine di energia potenziale che rappresenta l'interazione con la forza esterna [6]:

$$V = -xF(t) = -x_0(a + a^+)F(t) \quad ; \quad (101)$$

(per  $x_0$  si veda la (27)). Nel caso di una forza costante  $F_0$ , l'hamiltoniano del sistema risulta

$$H = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right) - x_0(a + a^+)F_0 = \hbar\omega\left(b^+b + \frac{1}{2}\right) - \frac{(x_0F_0)}{\hbar\omega}; \quad (102)$$

nella seconda uguaglianza è stata effettuata una diagonalizzazione introducendo l'operatore

$$b = a - \frac{x_0F_0}{\hbar\omega} \quad . \quad (103)$$

L'operatore  $b$  differisce da  $a$  per una costante, quindi soddisfa le stesse regole di commutazione;  $b$  e il suo aggiunto rappresentano dunque i nuovi operatori canonici dell'oscillatore forzato: il nuovo *ground state* sarà lo stato che soddisfa l'equazione

$$b|0\rangle' = 0 \quad (104)$$

che, per la (103), corrisponde a

$$a|0\rangle' = \frac{x_0F_0}{\hbar\omega}|0\rangle' \quad . \quad (105)$$

Quest'ultima è una equazione agli autovalori per  $a$ , i cui autostati normalizzati sono per definizione gli stati coerenti dell'oscillatore: l'applicazione di  $F_0$  genera quindi uno stato coerente corrispondente allo stato fondamentale del nuovo spettro energetico; in questo particolare caso, si osserva che l'autovalore dell'operatore di distruzione è reale; lo stato coerente può essere dunque ricavato dal *ground state* dell'oscillatore libero mediante l'applicazione dell'operatore spostamento:

$$|0\rangle' = D\left(\frac{x_0F_0}{\hbar\omega}\right)|0\rangle = e^{\frac{x_0F_0}{\hbar\omega}(a^+ - a)}|0\rangle \quad . \quad (106)$$

Se invece si considera una forza dipendente dal tempo, che agisce solo per un transiente, tale che l'oscillatore sia libero per tutto il resto del tempo del moto ( $F(\pm\infty) = 0$ ), è conveniente ricorrere allo schema di Heisenberg, in cui sono gli

operatori a dipendere dal tempo, mentre i vettori di stato restano costanti; dato un operatore  $O(t)$ , la sua derivata temporale è uguale a

$$\frac{dO(t)}{dt} = \frac{\partial O(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [O(t), H] \quad . \quad (107)$$

Poiché gli operatori  $x$  e  $p$  non dipendono in maniera esplicita dal tempo, le loro derivate temporali presentano un unico contributo dovuto al commutatore con l'hamiltoniana, in cui è presente il potenziale (101):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{1}{i\hbar} [x(t), H] = \frac{1}{i\hbar} \left[ x(t), \frac{p(t)^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - x(t)F(t) \right] = \\ &= \frac{1}{i\hbar} \left[ x(t), \frac{p(t)^2}{2m} \right] = \frac{1}{2i\hbar m} \{ [x(t), p(t)]p(t) + p(t)[x(t), p(t)] \} = \frac{p(t)}{m} \quad , \end{aligned} \quad (108)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= \frac{1}{i\hbar} [p(t), H] = \frac{1}{i\hbar} \left[ p(t), \frac{p(t)^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x(t)^2 - x(t)F(t) \right] = \\ &= \frac{1}{i\hbar} \left[ x(t), \frac{1}{2} m\omega^2 x(t)^2 - x(t)F(t) \right] = -m\omega^2 x(t) + F(t) \quad . \end{aligned} \quad (109)$$

Queste uguaglianze, combinate, consentono di ottenere un'equazione differenziale operatoriale per  $x$ , che ha la stessa forma della seconda legge di Newton per un oscillatore classico forzato:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{F(t)}{m} \quad ; \quad (110)$$

la (110) può essere risolta con il metodo delle funzioni di Green: alla (103) si associa l'equazione differenziale ausiliaria [6]

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) G(t-t') = \omega \delta(t-t') \quad (111)$$

in cui  $F$  è sostituita da una "forza" impulsiva applicata al tempo  $t=t'$  e  $G$  è una funzione adimensionale; le soluzioni dell'equazione, ottenute sviluppando  $G$  e la delta di Dirac in integrali di Fourier, sono

$$G_R(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin \omega t & t > 0 \end{cases}, \quad (112)$$

$$G_A(t) = \begin{cases} -\sin \omega t & t < 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}. \quad (113)$$

L'equazione (110) deve essere risolta con le condizioni al contorno

$$x(t) \rightarrow x_{in}(t), \quad t \rightarrow -\infty \quad \text{e} \quad (114)$$

$$x(t) \rightarrow x_{out}(t), \quad t \rightarrow +\infty, \quad (115)$$

in cui  $x_{in}$  e  $x_{out}$  rappresentano gli operatori posizione dell'oscillatore prima e dopo il transiente in cui agisce la forza esterna, e sono quindi soluzioni dell'equazione differenziale dell'oscillatore libero  $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$ . Le soluzioni trovate utilizzando le funzioni di Green con le due diverse condizioni al contorno,

$$x(t) = x_{in}(t) + \frac{1}{\omega m} \int_{-\infty}^{+\infty} G_R(t-t') F(t') dt', \quad (116)$$

$$x(t) = x_{out}(t) + \frac{1}{\omega m} \int_{-\infty}^{+\infty} G_A(t-t') F(t') dt', \quad (117)$$

consentono di esprimere  $x_{out}$  in termini di  $x_{in}$ :

$$x_{out}(t) = x_{in}(t) + \frac{1}{\omega m} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \omega(t-t') F(t') dt' \quad (118)$$

I due operatori posizione possono essere scritti in termini di operatori di modo normale:

$$x_{in}(t) = x_0 (a e^{-i\omega t} + a^+ e^{i\omega t}), \quad (119)$$

$$x_{out}(t) = x_0 (b e^{-i\omega t} + b^+ e^{i\omega t}), \quad (120)$$

dove  $a$  e  $a^+$  sono gli operatori di creazione e distruzione relativi all'oscillatore imperturbato, mentre  $b$  e  $b^+$  sono gli analoghi operatori dell'oscillatore che ha risentito dell'effetto della forza esterna [6]; la trasformazione da una coppia di operatori all'altra si ottiene inserendo le (119) e (120) nella (118):

$$\begin{aligned} x_0 (b e^{-i\omega t} + b^+ e^{i\omega t}) &= x_0 (a e^{-i\omega t} + a^+ e^{i\omega t}) + \frac{1}{\omega m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega(t-t')} - e^{-i\omega(t-t')}}{2i} F(t') dt' \Rightarrow \\ \Rightarrow (b-a) e^{-i\omega t} + (b^+ - a^+) e^{i\omega t} &= \frac{1}{2ix_0 \omega m} e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t'} F(t') dt' - \frac{1}{2ix_0 \omega m} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t'} F(t') dt' \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (b-a)e^{-i\omega t} + (b^+ - a^+)e^{i\omega t} = \frac{i\hat{F}(\omega)}{2x_0\omega m} e^{-i\omega t} - \frac{i\hat{F}^*(\omega)}{2x_0\omega m} e^{i\omega t} \quad , \quad (121)$$

dove  $\hat{F}(\omega)$  è il coefficiente di Fourier di  $F$  relativo alla pulsazione propria dell'oscillatore:

$$\hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} F(t) dt \quad ; \quad (122)$$

dalla (121), sostituendo a  $x_0$  l'espressione (27), uguagliando i coefficienti che moltiplicano gli esponenziali di argomento negativo, si ottiene

$$b = a + \frac{i\hat{F}(\omega)}{\sqrt{2\hbar m\omega}} = a + i\alpha_0 \quad , \quad (123)$$

mentre uguagliando i coefficienti che moltiplicano gli esponenziali di argomento positivo si ottiene l'uguaglianza hermitiana coniugata.

E' evidente, anche in questo caso, che il *ground state* dell'oscillatore dopo l'applicazione della forza esterna sarà definito dall'equazione (104) con  $b$  ricavato dalla (120): anche lo stato fondamentale  $|0\rangle'$  dell'oscillatore sottoposto ad una forza variabile nel tempo del tipo considerato è dunque uno stato coerente determinato da

$$a|0\rangle' = -i\alpha_0|0\rangle' \quad . \quad (124)$$

## Capitolo 2

# Un ulteriore esempio: gli stati coerenti del rotatore

Questo capitolo presenta i risultati di una ricerca di stati coerenti (W.S. Porter, 1993) indipendente dallo studio dell'oscillatore armonico; analizzando la dinamica di un rotatore rigido quantistico, si trova che esistono opportune combinazioni lineari delle autofunzioni del momento angolare che presentano una certa corrispondenza con il caso classico: la distribuzione di probabilità è concentrata intorno ad un unico valore dell'angolo, e ruota rigidamente nel tempo con velocità angolare uniforme.

### 2.1 Il rotatore rigido. Autostati dell'energia

Il rotatore rigido classico è un sistema dinamico costituito da un punto materiale di massa  $m$  vincolato da un'asta rigida di massa trascurabile a muoversi a distanza  $R$  da un punto scelto come origine; in assenza di forze esterne la conservazione del momento angolare impone che il moto si svolga su un piano. In meccanica quantistica un rotatore rigido vincolato a muoversi sul piano  $xy$  è descritto da un operatore hamiltoniano contenente il solo termine di energia cinetica, che, in coordinate polari, risulta:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 = -\frac{\hbar^2}{2mR^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = -\frac{\hbar^2}{2I} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad , \quad (1)$$

in cui si indica con  $I$  il momento d'inerzia della particella rispetto all'origine e con  $\varphi$  l'angolo azimutale misurato rispetto all'asse  $x$ ; si osserva che, essendo  $-i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$  l'operatore momento angolare rispetto all'asse  $z$ , da qui in poi indicato per semplicità di notazione come  $L$ , l'operatore hamiltoniano diventa

$$H = \frac{L^2}{2I} . \quad (2)$$

Si nota immediatamente che le osservabili energia e momento angolare sono compatibili. Gli autovalori dell'energia

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{2I} \quad (3)$$

sono degeneri, poiché a ciascuno di essi corrisponde una autofunzione di  $L$  con autovalore  $n$  ed una con autovalore  $-n$ . Gli autostati normalizzati di  $L$  e  $H$  del rotatore sono dunque del tipo [3]:

$$\psi_n(\varphi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(n\varphi - \omega_n t)} , \quad (4)$$

dove  $\omega_n = E_n / \hbar$ . Poiché energia e momento angolare costituiscono un set completo di osservabili compatibili, il generico stato del sistema può essere scritto come combinazione lineare delle autofunzioni di tipo (4):

$$\psi(\varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(\varphi, t) , \quad (5)$$

con

$$a_n = \int_0^{2\pi} \psi(\varphi, 0) \psi_n^*(\varphi, 0) d\varphi . \quad (6)$$

Analizzando le funzioni (4), si può osservare che la distribuzione di probabilità relativa alla misura dell'angolo azimutale, corrispondente al modulo quadro della funzione d'onda, è costante: ciò significa che il punto materiale ha uguale probabilità di trovarsi in un punto qualsiasi della circonferenza su cui è vincolato a muoversi; per questo motivo gli autostati di  $L$  non presentano una evidente corrispondenza con il moto classico, che prevede una particella localizzata che si muove con velocità angolare costante.

## 2.2 Stati coerenti del rotatore

E' possibile considerare coppie di funzioni d'onda (4), relative a differenti autovalori di  $L$ , sovrapposte con lo stesso peso statistico: all'istante  $t = 0$  si ha [3]

$$\psi^\pm(\varphi, 0) = \frac{A}{2} \left( e^{in_1\varphi} \pm e^{in_2\varphi} \right) ; \quad (7)$$

se si impone che le funzioni (7) siano normalizzate, si deve avere  $A = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ ; il modulo quadro delle due funzioni d'onda così ottenute, ponendo  $N = n_2 - n_1$ , è

$$\left| \psi^+(\varphi, 0) \right|^2 = \frac{1}{\pi} \cos^2 \left( \frac{N\varphi}{2} \right) , \quad (8)$$

$$\left| \psi^-(\varphi, 0) \right|^2 = \frac{1}{\pi} \sin^2 \left( \frac{N\varphi}{2} \right) . \quad (9)$$

La densità di probabilità definita dalla (8) presenta massimi per  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \frac{2\pi}{N}$ ,  $\varphi = \frac{4\pi}{N}$ , ecc., mentre la (9) ha i suoi massimi in  $\varphi = \frac{\pi}{N}$ ,  $\varphi = \frac{3\pi}{N}$ , ecc. I massimi della (8) rappresentano per la (9) punti in cui la probabilità è nulla e viceversa; se si costruisce la (7) in modo che  $N = 1$ , la probabilità di trovare la particella è massima in corrispondenza di un unico valore dell'angolo azimutale, e decresce gradualmente fino ad annullarsi nel punto opposto rispetto all'origine: la situazione può essere vista come una "localizzazione" della particella in un intorno di un punto della circonferenza su cui è vincolata; questa situazione ricorda la localizzazione dell'oscillatore armonico in uno stato coerente, ma presenta una differenza: mentre un pacchetto d'onda gaussiano può essere confinato arbitrariamente intorno ad un punto aumentando la massa della particella, non esiste nelle (8) e (9) un parametro che si può variare per ottenere una minore larghezza della distribuzione di probabilità.

Per istanti diversi da zero, le funzioni d'onda (7) diventano

$$\psi^\pm(\varphi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( e^{i(n_1\varphi - \omega_1 t)} \pm e^{i(n_2\varphi - \omega_2 t)} \right) \quad (10)$$

con una banale applicazione del propagatore. Le relative distribuzioni di probabilità angolare (8) e (9) si evolvono nel tempo in questo modo:

$$|\psi^+(\varphi, t)|^2 = \frac{1}{\pi} \cos^2\left(\frac{N(\varphi - \Omega t)}{2}\right) , \quad (11)$$

$$|\psi^-(\varphi, t)|^2 = \frac{1}{\pi} \sin^2\left(\frac{N(\varphi - \Omega t)}{2}\right) , \quad (12)$$

in cui si è posto

$$\Omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{N} = \frac{\hbar}{2I} \frac{n_2^2 - n_1^2}{n_2 - n_1} = (n_1 + n_2) \frac{\hbar}{2I} . \quad (13)$$

Dalle (11) e (12) appare evidente che la distribuzione di probabilità ruota intorno all'origine degli assi cartesiani senza cambiare forma: i massimi della (11) si trovano al tempo  $t$  in corrispondenza degli angoli  $\Omega t, \Omega t + \frac{2\pi}{N}, \dots$  mentre i massimi della (12) sono in  $\Omega t + \frac{\pi}{N}, \Omega t + \frac{3\pi}{N}, \dots$ ; il caso  $N = 1$  rappresenta una densità di probabilità concentrata su un solo valore dell'angolo che ruota con velocità angolare costante data dalla (13), situazione che ricorda il rotatore classico.

Una ulteriore corrispondenza si trova calcolando il valore di aspettazione del momento angolare, corrispondente sia allo stato iniziale (7) sia alla sua evoluzione nel tempo:

$$\begin{aligned} \langle L \rangle &= \int_0^{2\pi} \psi^{\pm*} L \psi^{\pm} d\varphi = -\frac{i\hbar}{4\pi} \int_0^{2\pi} (e^{-in_1\varphi} \pm e^{-in_2\varphi}) \frac{\partial}{\partial \varphi} (e^{in_1\varphi} \pm e^{in_2\varphi}) d\varphi = \\ &= \frac{\hbar}{4\pi} \int_0^{2\pi} (e^{-in_1\varphi} \pm e^{-in_2\varphi}) (n_1 e^{in_1\varphi} \pm n_2 e^{in_2\varphi}) d\varphi = \frac{\hbar}{4\pi} (n_1 + n_2) \int_0^{2\pi} d\varphi = (n_1 + n_2) \frac{\hbar}{2} ; \end{aligned} \quad (14)$$

si può notare confrontando il risultato appena ottenuto con la (13), che se il rotatore si trova in uno "stato coerente" (non necessariamente con  $N = 1$ ) sussiste la relazione tra velocità del pacchetto d'onde e momento angolare medio

$$\langle L \rangle = I\Omega , \quad (15)$$

tipica del corrispondente sistema dinamico classico.

### 2.3 Calcolo delle incertezze. Osservazioni sulla relazione di indeterminazione angolo-momento angolare

Date le funzioni d'onda di stato coerente (7) e le loro rispettive evoluzioni nel tempo (10), è possibile calcolare i valori di attesa dell'angolo e del suo quadrato per ottenere l'incertezza sulla misura dell'angolo; i calcoli effettuati sono tutti riferiti a  $\psi^+(\varphi, t)$  nell'istante iniziale, ma valgono chiaramente anche per  $\psi^-(\varphi, t)$  e in qualsiasi istante; se si considera  $\varphi$  come l'operatore che moltiplica la funzione d'onda per il suo argomento angolare, si ottiene

$$\begin{aligned}\langle \varphi \rangle &= \int_0^{2\pi} \varphi |\psi^+|^2 d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi \cos^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi d\varphi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi \cos N\varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi} \left. \frac{\varphi^2}{2} \right|_0^{2\pi} = \pi \quad ,\end{aligned}\quad (16)$$

$$\begin{aligned}\langle \varphi^2 \rangle &= \int_0^{2\pi} \varphi^2 |\psi^+|^2 d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi^2 \cos^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi^2 \cos N\varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi} \left. \frac{\varphi^3}{3} \right|_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi N} \int_0^{2\pi} \varphi \sin N\varphi d\varphi = \frac{4}{3} \pi^2 - \frac{2}{N^2} \quad .\end{aligned}\quad (17)$$

I risultati ottenuti consentono di ricavare l'incertezza sulla misura dell'angolo in uno stato di tipo (7) [3]:

$$(\Delta\varphi)^2 = \langle \varphi^2 \rangle - \langle \varphi \rangle^2 = \frac{\pi^3}{3} - \frac{2}{N^2} \quad ;\quad (18)$$

Per quanto riguarda il momento angolare, il suo valore atteso è già stato calcolato nella (14); il valor medio del quadrato, calcolato sempre su  $\psi^+(\varphi, 0)$ , è invece

$$\begin{aligned}\langle L^2 \rangle &= -\frac{\hbar^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} (e^{-in_1\varphi} + e^{-in_2\varphi}) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (e^{in_1\varphi} + e^{in_2\varphi}) d\varphi = \\ &= \frac{\hbar^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} (e^{-in_1\varphi} + e^{-in_2\varphi}) (n_1^2 e^{in_1\varphi} + n_2^2 e^{in_2\varphi}) d\varphi = \frac{\hbar^2}{4\pi} (n_1^2 + n_2^2) \int_0^{2\pi} d\varphi = (n_1^2 + n_2^2) \frac{\hbar^2}{2} \quad ,\end{aligned}\quad (19)$$

e l'incertezza risulta [3]

$$(\Delta L)^2 = \langle L^2 \rangle - \langle L \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{2} \left[ n_1^2 + n_2^2 - \frac{(n_1 + n_2)^2}{2} \right] = (n_2 - n_1)^2 \frac{\hbar^2}{4} = \left( \frac{N\hbar}{2} \right)^2 . \quad (20)$$

Si pone ora il problema di determinare quale sia la relazione di indeterminazione che sussiste nel caso del rotatore; [11] si potrebbe supporre che per le variabili angolo azimutale e momento angolare rispetto all'asse  $z$  sia valida la disuguaglianza di Schwarz per due operatori hermitiani  $A$  e  $B$ :

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle| . \quad (21)$$

Poiché il commutatore in questione, essendo  $L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$ , è uguale a  $i\hbar$ , la relazione di indeterminazione di tipo (21) diventa

$$\Delta \varphi \Delta L_z \geq \frac{\hbar}{2} ; \quad (22)$$

la disuguaglianza (22), tuttavia, non è fisicamente accettabile, poiché, se si trovasse una funzione d'onda per cui  $\Delta L_z \leq \frac{\hbar}{4\pi}$ , l'incertezza sull'angolo sarebbe maggiore di  $2\pi$ , e al limite, per una autofunzione del momento angolare lungo  $z$  ( $\Delta L_z = 0$ ), risulterebbe un'incertezza sull'angolo azimutale infinita: ovviamente un'incertezza maggiore di  $2\pi$  su un qualsiasi angolo non ha senso fisico. La (22) poggia sull'assunzione che gli operatori  $\varphi$  e  $L_z$  siano entrambi hermitiani, il che è ovvio per  $\varphi$ , che è un operatore moltiplicativo reale, ma non per  $L_z$ : la condizione affinché anche il momento angolare sia hermitiano è l'uguaglianza

$$\langle \psi_1 | L_z | \psi_2 \rangle = \langle \psi_2 | L_z | \psi_1 \rangle^* , \quad (23)$$

in cui i due ket sono generici; essendo ora

$$\langle \psi_2 | L_z | \psi_1 \rangle^* = i\hbar \int_0^{2\pi} \frac{\partial \psi_1^*}{\partial \varphi} \psi_2 d\varphi = i\hbar \psi_1 \psi_2 \Big|_0^{2\pi} + \langle \psi_1 | L_z | \psi_2 \rangle , \quad (24)$$

l'uguaglianza (23) è verificata se e solo se il termine  $\psi_1 \psi_2 \Big|_0^{2\pi}$  si annulla, cioè se le due funzioni sono  $2\pi$ -periodiche rispetto a  $\varphi$ . Supporre  $L_z$  hermitiano *a priori* porta ad un

paradosso: dette  $Y_{lm}$  le armoniche sferiche, autofunzioni del momento angolare totale e lungo  $z$ , e considerato il commutatore tra  $\varphi$  e  $L_z$ , si ha l'uguaglianza

$$\langle Y_{lm'} | [\varphi, L_z] | Y_{lm} \rangle = i\hbar \delta_{mm'} \quad , \quad (25)$$

ma si ottiene anche, considerando  $L_z$  hermitiano,

$$\langle Y_{lm'} | [\varphi, L_z] | Y_{lm} \rangle = \langle Y_{lm'} | \varphi L_z | Y_{lm} \rangle - \langle Y_{lm'} | L_z \varphi | Y_{lm} \rangle = \hbar(m - m') \langle Y_{lm'} | \varphi | Y_{lm} \rangle \quad ; \quad (26)$$

uguagliando i secondi membri, si giunge all'uguaglianza paradossale [11,12],

$$i\delta_{mm'} = (m - m') \langle Y_{lm'} | \varphi | Y_{lm} \rangle \quad , \quad (27)$$

poiché per  $m = m'$  si trova l'assurdo  $i = 0$ . Il paradosso riguarda in realtà tutte le coppie di operatori coniugati il cui commutatore è  $i\hbar$ , nel caso in cui lo spettro di autovalori di uno di essi sia discreto: in questo caso lo spettro del momento angolare rispetto a  $z$  è discreto perché si è imposto che le relative autofunzioni siano periodiche di periodo  $2\pi$ . Il problema può essere anche affrontato da un diverso punto di vista [12], non mettendo in discussione l'hermiticità di  $L_z$ , ma sostenendo che  $\varphi$  non può essere considerata una osservabile fisica, poiché per uno stesso punto dello spazio l'angolo è definito solo a meno di un multiplo di  $2\pi$ ; in questo modo sono da considerare osservabili fisiche solo le funzioni periodiche dell'angolo, e non l'angolo stesso.

Una relazione di indeterminazione alternativa può essere ricavata nel seguente modo: poiché ad una autofunzione di  $L_z$  del tipo (4) corrisponde una distribuzione angolare costante, la relativa incertezza sull'angolo azimutale deve essere la massima possibile, e risulta

$$(\Delta\varphi)^2 = \langle \varphi^2 \rangle - \langle \varphi \rangle^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi - \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi d\varphi \right)^2 = \frac{\pi^2}{3} \quad . \quad (28)$$

Sulla base di questo risultato si può formulare (congettura di Judge) la relazione di indeterminazione

$$\frac{\Delta\varphi \Delta L_z}{1 - \frac{3}{\pi^2} \Delta\varphi} \geq \frac{\hbar}{2} \quad , \quad (29)$$

che è stata anche dimostrata in maniera rigorosa (M. Bouten e altri, 1965): il

denominatore diverge in corrispondenza di  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ , che corrisponde come previsto a

$$\Delta L_z = 0.$$

Nel problema del rotatore, per gli stati coerenti di tipo (7)-(13), inserendo i risultati (18) e (20) nella (29), la relazione di indeterminazione diventa [3]

$$\frac{N^2\pi^2}{6\sqrt{\frac{N^2\pi^2}{3}-2}} \geq 1. \quad (30)$$

Il primo membro della disuguaglianza assume il valore minimo per  $N=1$ : anche nel caso del rotatore, lo stato che meglio approssima la situazione classica è uno stato di minima incertezza sulle variabili coniugate, che in questo caso sono angolo e momento angolare.

## Capitolo 3

# Stati coerenti: applicazione in ottica quantistica

Questo capitolo conclusivo contiene cenni riguardo all'applicazione degli stati coerenti nell'ambito della teoria quantistica della radiazione elettromagnetica. È necessario, prima di introdurre gli stati coerenti, trattare la scomposizione in modi normali del campo elettromagnetico contenuto in una regione finita dello spazio, che, una volta effettuata la quantizzazione, consente di descriverlo come un insieme di oscillatori armonici: a questo punto, alla luce dei risultati ottenuti per l'oscillatore armonico, sarà chiara l'importanza della ricerca di stati coerenti della radiazione.

### 3.1 Equazioni di Maxwell e potenziali elettromagnetici. Gauge di radiazione. Onde elettromagnetiche piane

Le equazioni di Maxwell costituiscono, insieme all'equazione di continuità per la carica elettrica e all'espressione della forza di Lorentz che agisce su una carica in un campo elettromagnetico, le equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo classico [13]; esse, scritte di seguito nel sistema di unità di misura di Gauss, determinano la relazione tra il campo elettrico e il campo magnetico nello spazio in presenza di una distribuzione di cariche e correnti elettriche descritta dalle funzioni  $\rho(\vec{r}, t)$  (densità di carica) e  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  (densità di corrente):

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad , \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad , \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad . \quad (4)$$

Si introducono, allo scopo di semplificare le equazioni di Maxwell in determinate condizioni, due funzioni di spazio e tempo: il potenziale scalare  $\varphi$  e il potenziale vettore  $\vec{A}$ ; le relazioni che consentono di ottenere i campi dai potenziali sono

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi \quad , \quad (5)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad . \quad (6)$$

I potenziali non sono univocamente definiti, poiché i campi e le equazioni dell'elettromagnetismo sono invarianti per trasformazioni di gauge, cioè per trasformazioni dei potenziali del tipo

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \quad , \quad (7)$$

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f \quad ; \quad (8)$$

nelle (7) e (8)  $f$  è una arbitraria funzione scalare dello spazio e del tempo, che può essere scelta a seconda della situazione fisica per semplificare le equazioni che coinvolgono i potenziali.

Una delle possibili scelte è la trasformazione detta *gauge di radiazione*, in cui si impone che i due potenziali soddisfino le condizioni:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad , \quad (9)$$

$$\varphi = 0 \quad , \quad (10)$$

sotto le quali, in assenza di cariche e correnti, ciascuna componente del potenziale vettore è soluzione dell'equazione di d'Alembert

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad , \quad (11)$$

verificata nelle stesse condizioni anche dai campi elettrico e magnetico. La (11) ammette soluzioni ondulatorie piane che si propagano con velocità  $c$ , in cui i campi sono sempre ortogonali alla direzione di propagazione dell'onda e sempre ortogonali tra loro; il campo magnetico, il campo elettrico e il versore di propagazione formano istante per istante una terna congrua di vettori:

$$\vec{B} = \hat{n} \wedge \vec{E} \quad ; \quad (12)$$

essendo  $\hat{n}$  un versore, si ottiene inoltre l'uguaglianza istantanea tra i moduli dei campi:

$$|\vec{B}| = |\vec{E}| \quad . \quad (13)$$

La densità di energia del campo elettromagnetico risulta uguale, a meno di una costante, al quadrato di uno qualsiasi dei vettori di campo:

$$H = \frac{1}{8\pi} \int d\vec{r} (E^2 + B^2) = \int d\vec{r} \frac{E^2}{4\pi} \quad . \quad (14)$$

Se l'onda oltre ad essere piana, è anche monocromatica, cioè presenta uno spettro costituito da una sola frequenza  $\omega$ , le soluzioni delle equazioni di d'Alembert per tutte le componenti dei campi e del potenziale si possono esprimere nella forma

$$\Phi = \text{Re} \Phi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad , \quad (15)$$

dove  $\Phi_0$  è una costante complessa; si ha in particolare, per il potenziale vettore,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \text{Re} \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (16)$$

con  $\vec{A}_0$  vettore complesso costante e il vettore d'onda che soddisfa la relazione

$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{c} \quad . \quad (17)$$

I campi complessi si ottengono dalle (16) e (17):

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i k \vec{A} \quad , \quad (18)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = i \vec{k} \wedge \vec{A} \quad , \quad (19)$$

in cui le parti reali dei secondi membri rappresentano i campi fisici. Dalle (16) e (18) si ricava che il campo elettrico deve essere una funzione sinusoidale della fase dell'onda, quindi l'energia di un'onda monocromatica piana è proporzionale all'ampiezza del campo elettrico (o del campo magnetico); inoltre, essendo valida la (13), il campo elettrico e il campo magnetico devono essere sempre in fase.

### 3.2 Decomposizione del campo elettromagnetico in modi normali

Se si considera un campo di radiazione elettromagnetica confinato in una cavità a forma di parallelepipedo di lati  $A$ ,  $B$  e  $C$  e volume  $V = ABC$ , visti i risultati del paragrafo precedente e mantenendo la gauge di radiazione, è possibile sviluppare il potenziale vettore in un punto qualsiasi della cavità in serie tripla di Fourier lungo gli assi cartesiani [13]:

$$\vec{A} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \left( \vec{c}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \vec{c}_{\vec{k}}^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) ; \quad (20)$$

le condizioni al contorno periodiche impongono una limitazione sui valori delle tre componenti dei vettori d'onda:

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{A} , \quad (21)$$

$$k_y = \frac{2\pi n_y}{B} , \quad (22)$$

$$k_z = \frac{2\pi n_z}{C} , \quad (23)$$

dove per  $n$  si intende un intero arbitrario. Quando il volume tende all'infinito, è possibile sostituire la serie con un integrale di Fourier, e lo spettro dei vettori d'onda diventa continuo:

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \rightarrow \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} . \quad (24)$$

La condizione di gauge (9) impone che i vettori  $\vec{c}_{\vec{k}}$  e complesso coniugato siano ortogonali a  $\vec{k}$ ; inoltre si assume una dipendenza dal tempo del tipo

$$\vec{c}_{\vec{k}} \propto e^{-i\omega t} , \quad (25)$$

in virtù della quale il potenziale espresso dalla (20) è soluzione dell'equazione di d'Alembert. Si definiscono ora due variabili vettoriali reali:

$$\vec{q}_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{1}{4\pi c^2 V}} (\vec{c}_{\vec{k}} + \vec{c}_{\vec{k}}^*) \quad , \quad (26)$$

$$\vec{p}_{\vec{k}} = -i\omega \sqrt{\frac{1}{4\pi c^2 V}} (\vec{c}_{\vec{k}} - \vec{c}_{\vec{k}}^*) = \frac{d\vec{q}_{\vec{k}}}{dt} \quad , \quad (27)$$

che consentiranno di identificare il campo di radiazione con un insieme di oscillatori armonici unidimensionali indipendenti; applicando le uguaglianze (18) e (19) ad ogni onda monocromatica presente nello sviluppo di Fourier, si ottengono le espressioni dei campi elettrico e magnetico:

$$\vec{E} = -\sqrt{\frac{4\pi}{V}} \sum_{\vec{k}} (\vec{p}_{\vec{k}} \cos \vec{k} \cdot \vec{r} + \omega \vec{q}_{\vec{k}} \sin \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad , \quad (28)$$

$$\vec{B} = -\sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} \sum_{\vec{k}} \left( \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{p}_{\vec{k}} \cos \vec{k} \cdot \vec{r} + \vec{k} \wedge \vec{q}_{\vec{k}} \sin \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \quad . \quad (29)$$

Ricordando che i soli contributi la cui integrazione su tutto il volume dà risultato non nullo sono quelli proporzionali ai quadrati di coseno e seno nello sviluppo del quadrato del campo elettrico o magnetico, l'energia elettromagnetica del campo rappresentato dal potenziale (20) diventa,

$$H = \frac{1}{8\pi} \int d\vec{r} (E^2 + B^2) = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} (\vec{p}_{\vec{k}}^2 + \omega^2 \vec{q}_{\vec{k}}^2) \quad ; \quad (30)$$

poiché i vettori di tipo  $\vec{p}$  e  $\vec{q}$  sono combinazioni lineari dei vettori  $\vec{c}$  e  $\vec{c}^*$ , essi sono ortogonali ai rispettivi  $\vec{k}$ , quindi ciascuno di essi può essere visto come combinazione di due vettori polarizzati in direzioni ortogonali, le cui componenti sono indicate con  $q_{\vec{k}\alpha}$  e  $p_{\vec{k}\alpha}$ , con  $\alpha = 1, 2$ . L'energia totale, che rappresenta l'hamiltoniana classica del campo di radiazione, può essere riscritta come

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}\alpha} (p_{\vec{k}\alpha}^2 + \omega^2 q_{\vec{k}\alpha}^2) \quad , \quad (31)$$

cioè la somma delle energie di infiniti oscillatori armonici indipendenti con frequenza che varia con  $k$  in base alla (17) e massa unitaria; l'indipendenza degli oscillatori è confermata dalla soluzione delle equazioni di Hamilton per ogni coppia  $\vec{k}, \alpha$ :

$$\frac{dq_{\vec{k}\alpha}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{\vec{k}\alpha}} = p_{\vec{k}\alpha} \quad , \quad (32)$$

$$\frac{dp_{\vec{k}\alpha}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\vec{k}\alpha}} = -\omega^2 q_{\vec{k}\alpha} \quad , \quad (33)$$

che implicano

$$\frac{d^2 q_{\vec{k}\alpha}}{dt^2} + \omega^2 q_{\vec{k}\alpha} = 0 \quad . \quad (34)$$

### 3.3 Quantizzazione del campo elettromagnetico

È stato dimostrato nel precedente paragrafo che il campo elettromagnetico classico in una cavità è scomponibile in un insieme di oscillatori armonici disaccoppiati: questo risultato è il punto di partenza per la quantizzazione del campo di radiazione; una volta sostituiti opportuni operatori alle grandezze presenti nelle equazioni classiche, occorre postulare le relazioni di commutazione tra di essi: la corrispondenza con l'insieme di oscillatori suggerisce di assumere un commutatore di questo tipo tra gli operatori corrispondenti alle coppie di variabili coniugate presenti nelle equazioni (31), (32) e (33):

$$\left[ q_{\vec{k}\alpha}, p_{\vec{k}\alpha} \right] = i\hbar \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\alpha\alpha'} \quad ; \quad (35)$$

gli operatori di campo elettrico e magnetico si ottengono dalle espressioni (28) e (29) sostituendo alle variabili reali posizione e impulso i corrispondenti operatori definiti dalla relazione di commutazione (35); la stessa sostituzione si effettua per ottenere la hamiltoniana quantistica: poiché le componenti dipendenti da coseno e seno alla prima potenza si annullano nell'integrazione sul volume  $V$ , essa ha la forma

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}\alpha} \left( p_{\vec{k}\alpha}^2 + \omega^2 q_{\vec{k}\alpha}^2 \right) \quad . \quad (36)$$

Nello stesso modo si sostituiscono ai vettori  $\vec{c}_{\vec{k}}$  e  $\vec{c}_{\vec{k}}^*$  gli operatori  $c_{\vec{k}\alpha}$  e  $c_{\vec{k}\alpha}^+$  (con  $\alpha = 1, 2$ ), che svolgono la stessa funzione di creazione e distruzione di un fotone, tipiche degli operatori di modo normale di un oscillatore armonico; per ragioni di

normalizzazione, tuttavia, si preferisce utilizzare in luogo di  $c_{\vec{k}\alpha}^-$  e  $c_{\vec{k}\alpha}^+$  gli operatori adimensionali [13]

$$a_{\vec{k}\alpha}^- = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega q_{\vec{k}\alpha}^- + ip_{\vec{k}\alpha}^-) \quad , \quad (37)$$

$$a_{\vec{k}\alpha}^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega q_{\vec{k}\alpha}^- - ip_{\vec{k}\alpha}^-) \quad ; \quad (38)$$

questi ultimi sono del tutto identici agli operatori di modo normale di un oscillatore armonico di massa unitaria, e soddisfano per di più identiche regole di commutazione

$$[a_{\vec{k}\alpha}^-, a_{\vec{k}'\alpha'}^+] = [a_{\vec{k}\alpha}^+, a_{\vec{k}'\alpha'}^+] = 0 \quad , \quad (39)$$

$$[a_{\vec{k}\alpha}^-, a_{\vec{k}'\alpha'}^+] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\alpha\alpha'} \quad , \quad (40)$$

date le quali è possibile riscrivere l'hamiltoniana come

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}\alpha} (a_{\vec{k}\alpha}^- a_{\vec{k}\alpha}^+ + a_{\vec{k}\alpha}^+ a_{\vec{k}\alpha}^-) \hbar\omega = \sum_{\vec{k}\alpha} \left( \hat{N}_{\vec{k}\alpha} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad ; \quad (41)$$

per ogni oscillatore armonico è stato introdotto l'operatore numero  $\hat{N}_{\vec{k}\alpha} = a_{\vec{k}\alpha}^+ a_{\vec{k}\alpha}^-$ , che conta il numero di fotoni associati al campo elettromagnetico corrispondenti ad un determinato valore della frequenza della radiazione e ad una determinata direzione di polarizzazione.

### 3.4 Stati coerenti del campo elettromagnetico

Se si consideriamo una radiazione elettromagnetica monocromatica e polarizzata linearmente, l'hamiltoniano (36) si riduce all'operatore energetico relativo ad un solo oscillatore armonico unidimensionale di massa unitaria:

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) \quad , \quad (44)$$

e gli operatori associati al campo elettromagnetico, dati dalle (28) e (29) con l'opportuna sostituzione delle grandezze fisiche con gli operatori definiti dalla (35), diventano:

$$E = -\sqrt{\frac{4\pi}{V}}(p \cos \vec{k} \cdot \vec{r} + \omega q \sin \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad , \quad (45)$$

$$B = -\sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}}\left(\frac{1}{c} p \cos \vec{k} \cdot \vec{r} + k q \sin \vec{k} \cdot \vec{r}\right) \quad . \quad (46)$$

Poiché l'hamiltoniana ha espressione

$$H = \left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad , \quad (47)$$

uno stato del campo elettromagnetico corrispondente ad un numero ben definito di fotoni corrisponde ad uno stato stazionario dell'oscillatore armonico. Come ben noto, uno stato di questo genere, per qualunque autovalore dell'energia, presenta valori di attesa nulli sia della posizione sia dell'impulso: è evidente dalle (45) e (46) che ciò implica l'annullarsi dei valori attesi dei campi; inoltre, poiché lo stato è stazionario, le distribuzioni di probabilità associate ai due campi non variano nel tempo: non si osserva, quindi, alcun fenomeno ondulatorio. Uno stato ad energia definita non presenta dunque analogie rilevanti con un'onda elettromagnetica classica: in particolare, se i campi fossero in uno stato stazionario, sarebbe impossibile osservare i fenomeni di interferenza.

Se lo stato della radiazione coincide, invece, con uno stato coerente dell'oscillatore armonico, la sua energia non può più essere determinata con incertezza zero (si è visto nel Capitolo 1 che la distribuzione delle energie per uno stato coerente è poissoniana), ma, in compenso, calcolando i valori di attesa dei campi si ottiene un risultato di grande rilievo: facendo uso delle formule (76) e (77) del Capitolo 1, il valor medio del campo elettrico risulta

$$\begin{aligned} \langle E \rangle_t &= -\sqrt{\frac{4\pi}{V}}[\langle p \rangle_t \cos \vec{k} \cdot \vec{r} + \omega \langle q \rangle_t \sin \vec{k} \cdot \vec{r}] = -\sqrt{\frac{4\pi}{V}}[-\omega A \sin(\omega t - \theta) \cos \vec{k} \cdot \vec{r} + \omega A \cos(\omega t - \theta) \sin \vec{k} \cdot \vec{r}] = \\ &= -\omega A \sqrt{\frac{4\pi}{V}}[\cos(\omega t - \theta) \sin \vec{k} \cdot \vec{r} - \sin(\omega t - \theta) \cos \vec{k} \cdot \vec{r}] = \text{Cost} \times \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \theta) \quad ; \quad (48) \end{aligned}$$

analoga espressione si ottiene per il campo magnetico; l'andamento dei valori medi dei campi in uno stato coerente è identico a quello di un'onda elettromagnetica piana classica: essi sono espressi dal prodotto di un'ampiezza per una funzione sinusoidale il cui argomento è proprio la fase dell'onda; inoltre, poiché gli stati coerenti sono stati di

minima incertezza con uguali incertezze sulle componenti che si sommano in quadratura nell'hamiltoniana, essi risultano anche gli stati in cui i campi possono essere determinati con la massima accuratezza possibile, cioè sono a tutti gli effetti gli stati più vicini al caso classico consentiti dalla quantizzazione. Il ragionamento si può estendere ad un generico campo di radiazione, in cui è presente un numero di modi normali maggiore di uno: in questo caso si parla di stato coerente del campo elettromagnetico quando tutti gli oscillatori associati ad un modo normale si trovano in uno stato coerente.

Uno stato coerente può essere ottenuto dall'interazione tra il campo di radiazione e una corrente classica [5,14], cioè tale da essere rappresentata da un vettore nello spazio e non da un operatore; l'hamiltoniana che rappresenta l'interazione tra una corrente classica e un potenziale vettore quantizzato è

$$H_I = \int \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) d\vec{r} \quad ; \quad (49)$$

il vettore di stato deve dunque obbedire all'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H_I |\psi(t)\rangle \quad ; \quad (50)$$

poiché l'operatore potenziale vettore non commuta con se stesso in tempi diversi, la forma corretta della soluzione è

$$|\psi(t)\rangle = \prod_{\vec{k}} e^{\alpha_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger - \alpha_{\vec{k}}^* a_{\vec{k}}} |\psi(0)\rangle \quad , \quad (51)$$

in cui i coefficienti  $\alpha_{\vec{k}}$  sono dati da

$$\alpha_{\vec{k}} = C_{\vec{k}} \int_0^t dt' \int d\vec{r} \hat{\varepsilon}_{\vec{k}} \cdot \vec{j}_\omega(\vec{r}, t') e^{i(\omega t' - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad ; \quad (52)$$

$\vec{j}_\omega(\vec{r}, t)$  rappresenta la corrente generata da un dipolo monocromatico oscillante ad una frequenza data dalla (17),  $\hat{\varepsilon}_{\vec{k}}$  è il versore di polarizzazione del campo di radiazione e  $C_{\vec{k}}$  è una costante che assicura al coefficiente (52) la corretta dimensionalità. Se si considera come stato iniziale del sistema lo stato di vuoto, cioè quello in cui tutti gli oscillatori che rappresentano il campo sono nello stato fondamentale, lo stato in un istante generico risulta

$$|\psi(t)\rangle = \prod_k e^{\alpha_k a_k^\dagger - \alpha_k^* a_k} |0\rangle_{\bar{k}} \quad . \quad (53)$$

Essendo gli oscillatori indipendenti, lo stato del  $k$ -mo oscillatore è ottenuto applicando al relativo stato fondamentale un operatore identico all'operatore spostamento introdotto nello studio degli stati coerenti dell'oscillatore armonico:

$$|\alpha_{\bar{k}}\rangle = e^{\alpha_{\bar{k}} a_{\bar{k}}^\dagger - \alpha_{\bar{k}}^* a_{\bar{k}}} |0\rangle_{\bar{k}} \quad ; \quad (54)$$

ogni oscillatore si trova quindi nello stato coerente relativo all'autovalore  $\alpha_{\bar{k}}$ ; il campo si trova globalmente in uno stato coerente, dato dal prodotto dei ket relativi allo stato di ciascun oscillatore:

$$|\{\alpha_{\bar{k}}\}\rangle = \prod_k |\alpha_{\bar{k}}\rangle \quad . \quad (55)$$

Nella teoria quantistica della radiazione, come accade per l'oscillatore armonico, gli stati coerenti ricoprono un ruolo di fondamentale importanza a livello concettuale; nell'ambito della fisica classica, gli esperimenti che hanno evidenziato il carattere ondulatorio della luce richiedono infatti la sua "coerenza", ovvero la condizione che la relazione tra le fasi delle onde che si sovrappongono in un punto dello spazio sia costante: solo in questo modo è possibile osservare, ad esempio, la figura di interferenza generata da un reticolo di diffrazione. L'elaborazione di una teoria quantistica della radiazione non può ignorare la base fenomenologica dell'elettromagnetismo classico; è necessario quindi introdurre anche nell'ambito dell'ottica quantistica un concetto di coerenza, che consenta di interpretare gli esperimenti alla luce della nuova teoria: l'esistenza degli stati coerenti, in quanto stati in cui è possibile descrivere il campo elettromagnetico come una sovrapposizione di onde piane, di cui siano definite ampiezza e fase (con le relative incertezze, per quanto minime), consente questo indispensabile collegamento; esperimenti basilari come quello della doppia fenditura, impossibili da descrivere in termini di stati stazionari, possono essere interpretati alla luce della quantizzazione del campo come sovrapposizione di stati coerenti della luce [15]. In definitiva, anche in ottica quantistica gli stati coerenti permettono di raggiungere lo scopo per cui Schrödinger li aveva inizialmente ricercati: garantire un significativo collegamento tra la "vecchia" e la "nuova" teoria.

## Bibliografia

- [1] S. Howard, S.K. Roy, *American Journal of Physics* 55,12 (1987), 1109-1117
- [2] G. Nardulli, *Meccanica Quantistica I, Principi* Cap. 5, pp. 177-186 (Milano, 2001)
- [3] W.S. Porter, *American Journal of Physics* 61,11 (1993), 1050-1051
- [4] W.M. Zhang, D.H. Feng, R. Gilmore, *Reviews of Modern Physics* 62,4 (1990), 867- 927
- [5] M.O. Scully, M.S. Zubairy, *Quantum Optics* Cap. 2, pp. 47-55 (Cambridge 1997)
- [6] P. Carruthers, N.M. Nieto, *American Journal of Physics* 33,7 (1965), 537-544
- [7] G. Nardulli, *Meccanica Quantistica II, Applicazioni* Cap. 10, pp. 278-282 (Milano, 2001)
- [8] L. Angelini, dispense di Meccanica Quantistica
- [9] R.W. Henry, S.C. Glotzer, *American Journal of Physics* 56,4 (1988), 318-328
- [10] H.A Gersch, *American Journal of Physics* 60,11 (1992), 1024-1030
- [11] C.L. Roy, A.B. Sannigrahi, *American Journal of Physics* 47,11 (1979), 965-967
- [12] G. Nardulli, *Meccanica Quantistica I, Principi* Cap. 6, pp. 212-213 (Milano, 2001)
- [13] G. Nardulli, *Meccanica Quantistica II, Applicazioni* Cap. 1, pp. 17-31 e Cap. 4, pp. 99-106 (Milano, 2001)
- [14] B.S. Skagerstam, *Topics in Modern Quantum Optics* (1999)
- [15] E.C.G. Sudarshan, T. Rothman, *American Journal of Physics* 59,7 (1991), 592-595