

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA DI I LIVELLO IN FISICA

TESI DI LAUREA IN FISICA

ENTANGLEMENT: TEORIA, ESPERIMENTI E
APPLICAZIONI IN CRITTOGRAFIA

Relatore:

Chiar.mo Prof. SAVERIO PASCAZIO

Laureando:

VITO GIOVANNI LUCIVERO

ANNO ACCADEMICO 2006-2007

Indice

Introduzione	1
1 I postulati della meccanica quantistica e gli stati entangled	4
1.1 Spazio di Hilbert e prodotto tensoriale	4
1.2 Principio di sovrapposizione e stati entangled	8
1.3 Postulato sulle osservabili e matrici di Pauli	11
1.4 Riduzione del vettore di stato	15
1.5 Relazioni di indeterminazione di Heisenberg	18
2 L'entanglement: dal paradosso EPR alla disuguaglianza di Bell	21
2.1 L'esperimento di Stern-Gerlach: preparazione e misurazione di stati	21
2.2 Il paradosso EPR nella formulazione di Bohm	28
2.3 La disuguaglianza di Bell e le variabili nascoste	33
2.4 Derivazione alternativa di Wigner	37

3	Risultati sperimentali ed applicazioni	43
3.1	Gli esperimenti di prima generazione	43
3.1.1	Le difficoltà e le condizioni sperimentali	44
3.1.2	Le prime violazioni	46
3.2	Gli esperimenti di seconda generazione	48
3.2.1	La sorgente ed il sistema di rivelazione	49
3.2.2	Esperimento con polarizzatori ad un canale	51
3.2.3	Esperimento con polarizzatori a due canali	55
3.2.4	Timing-experiment	58
3.3	L'utilità dell'inutile	62
3.4	La crittografia quantistica	63
3.4.1	Il codice di Vernam	64
3.4.2	Il teorema di no-cloning	66
3.4.3	Il protocollo BB84	68
3.4.4	Il protocollo E91	70
3.4.5	Commenti finali	72
	Conclusioni	72

Bibliografia	74
Ringraziamenti	77

Introduzione

È il 1935, l'ormai cinquantaseienne Albert Einstein arruola presso l'Institute for Advanced Study di Princeton due giovani collaboratori, Boris Podolski e Nathan Rosen, per sferrare un ultimo polemico attacco alla teoria dei quanti. Prende così luce il famoso articolo EPR in cui la meccanica quantistica viene considerata una teoria incompleta, poiché non riesce ad incorporare tutti gli elementi della realtà fisica associati ad un determinato sistema. Il sistema considerato nell'esperimento ideale dei tre fisici è costituito da due particelle correlate che, allontanandosi, sfruttano quella che Einstein definì una “sinistra azione a distanza” (permessa dai postulati quantistici) e manifestano la non-località del fenomeno: misurazioni effettuate su una delle due particelle forniscono risultati che riguardano l'altra. Da qui il “paradosso EPR” per cui la meccanica quantistica conduce a risultati in aperto contrasto con i concetti classici ed intuitivi di realismo e località. In relazione al particolare fenomeno individuato da Einstein, Erwin Schrödinger utilizza per la prima volta il termine “*entanglement*” dandone la seguente definizione:

“quando due sistemi, dei quali conosciamo gli stati sulla base della loro rispettiva rappresentazione, subiscono una interazione fisica temporanea dovuta a forze note che agiscono tra di loro, e quando, dopo un certo periodo di mutua interazione, i sistemi si separano nuovamente, non possiamo più descriverli come prima dell'interazione, cioè

dotando ognuno di loro di una propria rappresentazione. Non chiamerei questo un ma il tratto distintivo della meccanica quantistica”.

Niels Bohr, tra i padri della nuova teoria, risponde all’attacco affermando che il “paradosso” concettuale EPR non costituisce una minaccia concreta per l’applicazione della teoria dei quanti ai problemi fisici reali. Tuttavia l’enigma resiste fino al 1964, anno in cui il fisico irlandese John Bell elabora un teorema destinato a cambiare totalmente il modo in cui si pensa ai fenomeni quantistici. Assumendo, come primo passo, che la meccanica quantistica possa essere completata dall’utilizzo di alcune variabili nascoste, Bell giunge a formulare una disuguaglianza che coinvolge la somma dei possibili risultati di un esperimento su particelle entangled. Violare questa disuguaglianza significherebbe eliminare la possibile presenza di variabili nascoste e ritenere corretta la meccanica quantistica con la sconcertante conseguenza della non-località della natura. Non resta che il compito, per gli sperimentatori, di ottenere risultati del genere. È proprio questo ambizioso progetto a far incontrare quattro fisici statunitensi : John Clauser, Michael Horne, Abner Shimony e Richard Holt. Nel 1969 essi pubblicano un articolo in cui migliorano l’originale e feconda derivazione della disuguaglianza elaborata da Bell. Inoltre, per controllarla, propongono un convincente progetto sperimentale basato sulla produzione di fotoni entangled e sulla misurazione della correlazione fra le due direzioni di polarizzazione. Nel corso degli anni ’70 , grazie a continui sviluppi tecnologici, vengono effettuati diversi esperimenti che violano la disuguaglianza di Bell confermando così la teoria dei quanti. Nel 1982 il fisico francese Alain Aspect, utilizzando sia la tecnologia laser sia un migliore schema sperimentale, fornisce una ulteriore ed efficace dimostrazione della misteriosa natura non-locale del mondo quantistico ovvero dimostra che l’entanglement è un fenomeno reale.

In questa tesi affronto la storia e gli sviluppi dell'entanglement a partire dal paradosso EPR fino ad alcune applicazioni sperimentali più recenti. Nel primo capitolo, partendo da basilari nozioni di algebra lineare, definisco i postulati della meccanica quantistica e gli stati entangled. Tra i postulati, infatti, occupa una posizione fondamentale il “Principio di sovrapposizione” di cui l'entanglement rappresenta una particolare applicazione. Nel secondo capitolo, analizzando l' esperimento emblematico di Stern e Gerlach e descrivendo il paradosso EPR, espongo la derivazione matematica della disuguaglianza di Bell seguita dalla derivazione alternativa di Wigner. Segue nell'ultimo capitolo una analisi qualitativa e quantitativa degli esperimenti condotti da Alain Aspect per controllare la suddetta disuguaglianza ed una esposizione dei diversi campi di applicazione sviluppatisi negli ultimi anni, rivolgendo particolare attenzione alla crittografia quantistica.

Si tratta di quasi 70 anni di ricerca che hanno coinvolto alcune tra le menti più brillanti del novecento analizzando una parte dei fondamenti della fisica e ponendo alla natura domande contro il nostro stesso intuito, dimostrando come probabilmente:

“ L'Universo non sia soltanto più strano di quanto pensiamo, ma più strano di quanto potremmo mai pensare ”

J.B.S. Haldane

Capitolo 1

I postulati della meccanica quantistica e gli stati entangled

1.1 Spazio di Hilbert e prodotto tensoriale

Seguendo la notazione di Dirac, indichiamo un vettore appartenente allo spazio di Hilbert \mathcal{H} utilizzando il simbolo $|\alpha\rangle$ e lo chiamiamo *ket*. Per la natura di spazio vettoriale su \mathcal{H} è definita la somma tra ket e la moltiplicazione di un ket per uno scalare. In meccanica quantistica si assume che il campo degli scalari sia \mathcal{C} , ossia l'insieme dei numeri complessi. Il *prodotto interno* definito sullo spazio \mathcal{H} è un'applicazione:

$$(\cdot, \cdot) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{C} \tag{1.1}$$

tale che il prodotto interno di ogni coppia di ket $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathcal{H}$ è un numero complesso, denotato come $\langle\alpha|\beta\rangle \equiv (\alpha, \beta)$. Inoltre indichiamo con $\langle\alpha|$ il vettore duale corrispondente al ket $|\alpha\rangle$ e lo chiamiamo *bra*; il bra $\langle\alpha|$ è un operatore lineare dallo spazio \mathcal{H} a quello complesso \mathcal{C} , definito da $\langle\alpha|(|\beta\rangle) = \langle\alpha|\beta\rangle \forall |\beta\rangle \in \mathcal{H}$.

Il prodotto interno soddisfa le seguenti proprietà:

$$\langle \alpha | (\lambda | \beta \rangle) = \lambda \langle \alpha | \beta \rangle \quad (1.2)$$

$$\langle \alpha | (|\beta_1\rangle + |\beta_2\rangle) \rangle = \langle \alpha | \beta_1 \rangle + \langle \alpha | \beta_2 \rangle \quad (1.3)$$

(con $\lambda \in \mathcal{C}$ e $|\alpha\rangle, |\beta_1\rangle, |\beta_2\rangle \in \mathcal{H}$); valgono inoltre la *simmetria obliqua*:

$$\langle \alpha | \beta \rangle^* = \langle \beta | \alpha \rangle \quad (1.4)$$

(per ogni numero complesso $c = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$), $c^* = a - ib$ denota il suo complesso coniugato) e la *positività*:

$$\langle \alpha | \alpha \rangle \geq 0 \quad e \quad \langle \alpha | \alpha \rangle = 0 \Leftrightarrow |\alpha\rangle = 0 \quad (1.5)$$

da queste proprietà seguono subito le altre due:

$$\langle \lambda \alpha, \beta \rangle = \lambda^* \langle \alpha | \beta \rangle \quad (1.6)$$

$$\langle (|\beta_1\rangle + |\beta_2\rangle) | \alpha \rangle = \langle \beta_1 | \alpha \rangle + \langle \beta_2 | \alpha \rangle \quad (1.7)$$

per le (1.2) e (1.3) si dice che il prodotto interno è *lineare a destra*; per le (1.6) e (1.7) si dice che è *antilineare a sinistra*.

Come esempio identifichiamo lo spazio di Hilbert \mathcal{H} con lo spazio \mathcal{C}^n , in cui un vettore è individuato da una n-upla di numeri complessi, e definiamo il prodotto interno tra due ket $|\alpha\rangle = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $|\beta\rangle = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathcal{C}^n$ nel modo seguente:

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* \beta_i. \quad (1.8)$$

La *dimensione* n di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} è data dal numero massimo di vettori linearmente indipendenti. Un insieme di ket linearmente indipendenti $\{|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, \dots, |\alpha_n\rangle\}$

in uno spazio \mathcal{H} *n-dimensionale* costituisce una *base* di tale spazio ed ogni ket $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}$ si esprime come combinazione lineare dei ket di base:

$$|\alpha\rangle = \sum_{i=1}^n a_i |\alpha_i\rangle. \quad (1.9)$$

I numeri complessi a_i sono le componenti del ket $|\alpha\rangle$ rispetto alla base $\{|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, \dots, |\alpha_n\rangle\}$ e sono univocamente determinati. Per una base ortonormale ($\langle\alpha_i|\alpha_j\rangle = \delta_{ij}$ con $i, j = 1, 2, \dots, n$ e $\delta_{ij} = 1$ per $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ per $i \neq j$) abbiamo:

$$a_i = \langle\alpha_i|\alpha\rangle. \quad (1.10)$$

Un'altra nozione fondamentale per la nostra trattazione è quella di *prodotto tensoriale*. Siano \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 due spazi di Hilbert rispettivamente di dimensioni m ed n . Allora diciamo che lo spazio di Hilbert \mathcal{H} è il prodotto tensoriale di \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , e scriviamo $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, se possiamo associare ad ogni coppia di ket $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}_1$ e $|\beta\rangle \in \mathcal{H}_2$ un terzo vettore appartenente ad \mathcal{H} , denotato con $|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$ e chiamato prodotto tensoriale di $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$. Per definizione, i vettori di \mathcal{H} sono combinazioni lineari dei precedenti ket $|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$ e sono soddisfatte le seguenti proprietà:

- per ogni $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}_1$, $|\beta\rangle \in \mathcal{H}_2$ e $\lambda \in \mathcal{C}$,

$$\lambda(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) = (\lambda|\alpha\rangle) \otimes |\beta\rangle = |\alpha\rangle \otimes (\lambda|\beta\rangle); \quad (1.11)$$

- per ogni $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle \in \mathcal{H}_1$ e $|\beta\rangle \in \mathcal{H}_2$,

$$(|\alpha_1\rangle + |\alpha_2\rangle) \otimes |\beta\rangle = |\alpha_1\rangle \otimes |\beta\rangle + |\alpha_2\rangle \otimes |\beta\rangle; \quad (1.12)$$

- per ogni $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}_1$ e $|\beta_1\rangle, |\beta_2\rangle \in \mathcal{H}_2$,

$$|\alpha\rangle \otimes (|\beta_1\rangle + |\beta_2\rangle) = |\alpha\rangle \otimes |\beta_1\rangle + |\alpha\rangle \otimes |\beta_2\rangle; \quad (1.13)$$

D'ora in poi utilizzeremo, invece di $|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$, le notazioni equivalenti $|\alpha\rangle |\beta\rangle, |\alpha, \beta\rangle$ o $|\alpha\beta\rangle$. La dimensione dello spazio di Hilbert \mathcal{H} è data dal prodotto mn delle dimensioni di \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 . Infatti, se $|i\rangle$ e $|j\rangle$ sono le basi ortonormali di \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , allora la base ortonormale di $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ è data da $|i\rangle \otimes |j\rangle$. Ad esempio, se \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 sono due spazi di Hilbert bidimensionali ($m = n = 2$) con ket di base $|0\rangle$ e $|1\rangle$, allora \mathcal{H} ha dimensione $mn = 4$ e ket di base $|0\rangle \otimes |0\rangle, |0\rangle \otimes |1\rangle, |1\rangle \otimes |0\rangle$ e $|1\rangle \otimes |1\rangle$. Perciò un generico vettore $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ si può espandere su questa base come segue:

$$|\psi\rangle = c_{00} |00\rangle + c_{01} |01\rangle + c_{10} |10\rangle + c_{11} |11\rangle, \quad (1.14)$$

dove $c_{ij} \equiv \langle ij | \psi \rangle$, con $i, j = 0, 1$. Il prodotto interno di due ket $|\psi\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |ij\rangle$ e $|\phi\rangle = \sum_{ij} d_{ij} |ij\rangle$ appartenenti a \mathcal{H} è dunque definito da:

$$\langle \psi | \phi \rangle = \sum_{ij} c_{ij}^* d_{ij}. \quad (1.15)$$

Se \mathcal{A} e \mathcal{B} sono due operatori lineari che agiscono rispettivamente su \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 allora l'azione di $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ su un generico vettore $|\psi\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |i\rangle \otimes |j\rangle \in \mathcal{H}$ è definita da:

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \left(\sum_{ij} |i\rangle \otimes |j\rangle \right) = \sum_{ij} c_{ij} \mathcal{A} |i\rangle \otimes \mathcal{B} |j\rangle. \quad (1.16)$$

La rappresentazione matriciale dell'operatore $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ nella base $|K\rangle \equiv |ij\rangle$, indicata dal singolo indice $K = 1, 2, \dots, mn$ con $K = (i-1)n + j$, è data da:

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \dots & A_{1m}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \dots & A_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1}B & A_{m2}B & \dots & A_{mm}B \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

dove i termini $A_{ij}B$ denotano sottomatrici di dimensione $n \times n$, con A e B rappresentazioni matriciali degli operatori \mathcal{A} e \mathcal{B} (A e B sono matrici $m \times m$ e $n \times n$ rispettivamente).

1.2 Principio di sovrapposizione e stati entangled

In meccanica classica lo stato di un sistema di n particelle al tempo t_0 è determinato dalle posizioni $\{x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)\}$ e dalle velocità $\{\dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0), \dots, \dot{x}_n(t_0)\}$ di tutte le particelle all'istante dato. Se queste condizioni iniziali sono note, le leggi della meccanica classica conducono ad equazioni differenziali ordinarie del primo ordine nelle variabili x_i e \dot{x}_i con l'esistenza di un'unica soluzione $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_n(t)\}$. La meccanica quantistica è basata su una struttura matematica completamente diversa. Di seguito introduciamo i postulati che sono alla base della teoria quantistica e che forniscono una connessione tra il mondo fisico ed il formalismo matematico.

- Postulato 1 (Principio di sovrapposizione): *lo stato di un sistema quantistico S , ad un determinato istante di tempo, è completamente descritto da un vettore unitario $|\psi\rangle$, chiamato vettore di stato o funzione d'onda, di uno spazio di Hilbert \mathcal{H}_S associato con il sistema.*

Supponiamo che Q sia una assegnata grandezza fisica e che $|\psi\rangle_1, |\psi\rangle_2$ siano ket rappresentativi di due stati in cui Q abbia un valore definito: q_1 nello stato descritto da $|\psi\rangle_1$ e $q_2 \neq q_1$ nello stato descritto da $|\psi\rangle_2$; se $|\psi\rangle$ si esprime come combinazione lineare di $|\psi\rangle_1$ e $|\psi\rangle_2$, allora la misura di Q può fornire come risultato o q_1 o q_2 . Viceversa se, nello stato descritto dal ket $|\psi\rangle$, la misura della grandezza Q può fornire come risultato sia q_1 sia q_2 , allora $|\psi\rangle$ si esprime come combinazione lineare di $|\psi\rangle_1$ e $|\psi\rangle_2$.

Il postulato si generalizza immediatamente al caso di un numero di stati maggiore di due: ad esempio, se la misura di Q può fornire come risultato q_1, q_2, \dots, q_n allora $|\psi\rangle$ si esprime

come combinazione lineare di $|\psi\rangle_1, |\psi\rangle_2, \dots, |\psi\rangle_n$, dove $|\psi\rangle_k$ è il ket rappresentativo dello stato in cui Q ha il valore q_k .

È importante evidenziare che il motivo per cui assumiamo una struttura di spazio vettoriale risiede nella caratteristica peculiare degli stati quantistici che consiste nella loro possibile sovrapposizione, come suggerito dall'analisi di esperimenti emblematici di fotoni polarizzati o di interferenza di elettroni.

L'*entanglement* rappresenta la manifestazione più particolare e contro-intuitiva del principio di sovrapposizione, osservata nei sistemi quantistici composti. Innanzitutto lo spazio di Hilbert \mathcal{H} associato con un sistema composto è il prodotto tensoriale degli spazi di Hilbert \mathcal{H}_i associati con i sistemi componenti i . Nel caso più semplice di un sistema quantistico bipartito, abbiamo:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2. \quad (1.18)$$

Ora se, per esempio, gli spazi di Hilbert \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 sono bidimensionali e

$$\{|0\rangle_1, |1\rangle_1\} \quad \{|0\rangle_2, |1\rangle_2\} \quad (1.19)$$

denotano i loro ket di base, allora, come è stato visto precedentemente, la base dello spazio \mathcal{H} è data dai quattro vettori:

$$\{|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2, |0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2, |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2, |1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2\}. \quad (1.20)$$

A questo punto, il *principio di sovrapposizione* ci dice che lo stato più generale nello spazio di Hilbert \mathcal{H} non è semplicemente il prodotto tensoriale degli stati che risiedono in \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , ma è una sovrapposizione arbitraria di questi stati, che può essere scritta come segue:

$$|\psi\rangle = \sum_{ij=0}^1 c_{ij} |i\rangle_1 \otimes |j\rangle_2 \quad (1.21)$$

oppure, semplificando la notazione, nella forma equivalente:

$$|\psi\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |ij\rangle \quad (1.22)$$

dove il primo indice in $|ij\rangle$ si riferisce ad uno stato che risiede in \mathcal{H}_1 ed il secondo ad uno stato in \mathcal{H}_2 .

Per definizione, uno stato in \mathcal{H} è detto *entangled*, o *non separabile*, se non può essere scritto come un semplice prodotto tensoriale di uno stato $|\alpha\rangle_1$ in \mathcal{H}_1 ed uno stato $|\beta\rangle_2$ in \mathcal{H}_2 . Viceversa, se possiamo trasformare la (1.22) in:

$$|\psi\rangle = |\alpha\rangle_1 \otimes |\beta\rangle_2, \quad (1.23)$$

allora diciamo che lo stato $|\psi\rangle$ è *separabile*. Come primo e semplice esempio, consideriamo lo stato:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad (1.24)$$

che è entangled, e lo stato:

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle). \quad (1.25)$$

che invece è separabile, poiché possiamo scrivere:

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}((|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle). \quad (1.26)$$

L'entanglement, dunque, rappresenta una sovrapposizione non separabile di stati prodotto: quando due sistemi sono entangled non è possibile assegnare loro vettori di stato individuali $|\alpha\rangle_1$ e $|\beta\rangle_2$ e non c'è modo di caratterizzarne uno senza fare riferimento all'altro.

Le intriganti proprietà degli stati entangled, prive di analogo classico, furono chiaramente evidenziate da Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) nel 1935 [4]. L'analisi EPR e le conseguenze che ne derivano sono trattate in maniera più approfondita nel secondo capitolo.

1.3 Postulato sulle osservabili e matrici di Pauli

Prima di enunciare il secondo postulato, introduciamo brevemente le nozioni fondamentali di *equazione agli autovalori* e di operatore *hermitiano*.

Un *autovettore* di un operatore \mathcal{A} lineare sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} è un ket non nullo $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}$ tale che:

$$\mathcal{A}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (1.27)$$

dove α è un numero complesso chiamato *autovalore* di \mathcal{A} corrispondente all'autovettore $|\alpha\rangle$. L'equazione (1.27), detta *agli autovalori*, ammette sempre almeno una soluzione e l'insieme degli autovalori dell'operatore costituisce il suo *spettro*.

Per ogni operatore \mathcal{A} su uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , è possibile mostrare che esiste un unico operatore \mathcal{A}^\dagger su \mathcal{H} , chiamato *aggiunto* o *hermitiano coniugato* di \mathcal{A} , tale che, per tutti i ket $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathcal{H}$,

$$\langle \alpha | \mathcal{A} \beta \rangle = \langle \mathcal{A}^\dagger \alpha | \beta \rangle. \quad (1.28)$$

Un caso di particolare interesse si ha quando:

$$\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A} \quad (1.29)$$

e l'operatore \mathcal{A} viene chiamato *hermitiano* o *autoaggiunto*.

Si può dimostrare che gli autovettori di un operatore \mathcal{A} hermitiano su \mathcal{H} possono sempre formare una base ortonormale dello spazio di Hilbert \mathcal{H} ovvero ogni vettore dello spazio \mathcal{H} può essere espresso come combinazione lineare di vettori di questa base.

Questa proprietà è detta di *completezza* e la base degli autovettori di \mathcal{A} è chiamato *insieme ortonormale completo*.

Enunciamo ora il secondo postulato:

- Postulato 2 (Sulle osservabili e sugli autovalori): *le grandezze fisiche (o osservabili) di un sistema fisico sono descritte da operatori hermitiani sullo spazio di Hilbert degli stati \mathcal{H}_S . Il solo possibile risultato della misura di un osservabile \mathcal{A} è uno degli autovalori del corrispondente operatore \mathcal{A} .*

Inoltre, se scriviamo l'equazione agli autovalori per l'operatore \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A}|i\rangle = a_i|i\rangle, \quad (1.30)$$

dove $|i\rangle$ rappresenta una base ortonormale di autovettori dell'operatore \mathcal{A} , ed espandiamo il vettore di stato $|\psi(t)\rangle$ su questa base:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_i c_i(t) |i\rangle, \quad (1.31)$$

allora la probabilità che una misura dell'osservabile \mathcal{A} al tempo t fornisca come risultato a_i è data da:

$$p_i(t) = p(a = a_i | t) = |\langle i | \psi(t) \rangle|^2 = |c_i(t)|^2. \quad (1.32)$$

Per semplicità, abbiamo enunciato il secondo postulato per il caso di uno spettro discreto di autovalori non degeneri.

Inoltre esso produce diverse conseguenze e conduce alle seguenti considerazioni:

- siano a_i un autovalore di \mathcal{A} e $|i\rangle$ l'autovettore relativo a a_i . È ovvio che anche $\alpha|i\rangle$, con $\alpha \in \mathcal{C}$, è autovettore di \mathcal{A} relativo allo stesso autovalore. Ne segue l'importante conseguenza che *due ket paralleli, cioè che si ottengono l'uno dall'altro mediante la moltiplicazione per uno scalare, rappresentano lo stesso stato*. Per eliminare questa ridondanza, si assume che sia gli autovettori degli operatori sia tutti i vettori di stato siano normalizzati a meno di un fattore di fase. Quest'ultimo risulta non osservabile fisicamente e di conseguenza è inessenziale ai fini dell'identificazione dello stato.

- gli autovalori di un operatore autoaggiunto sono reali e gli autovettori formano un insieme ortonormale completo nello spazio di Hilbert \mathcal{H} associato con il sistema. Poichè $|\psi\rangle$ ha norma unitaria, dalla (1.32) abbiamo:

$$\sum_i p_i(t) = \sum_i |c_i(t)|^2 = 1 \quad (1.33)$$

perciò le probabilità sono normalizzate, cioè la probabilità di ottenere uno qualsiasi degli autovalori dalla misura dell'osservabile \mathcal{A} è uguale ad 1.

- nel caso particolare in cui il vettore di stato $|\psi(t_0)\rangle$ ad un dato istante t_0 coincide con un autovettore dell'operatore \mathcal{A} con autovalore a_i ,

$$|\psi(t_0)\rangle = |i\rangle, \quad (1.34)$$

allora la misura dell'osservabile \mathcal{A} al tempo t_0 fornisce con certezza il valore a_i . Per questa ragione gli autovettori dell'operatore \mathcal{A} sono anche chiamati *autostati* di \mathcal{A} .

- l'unica possibile interpretazione classica porterebbe a pensare che la sovrapposizione (1.31) sia una semplice miscela statistica di stati che si presentano singolarmente con una frequenza data da (1.32) già prima della misura; in realtà *il singolo vettore di stato (1.31) prima della misura non corrisponde ad alcun autovalore determinato di \mathcal{A} ma, solo al momento della misura, fornisce uno degli autovalori a_i con probabilità (1.32), dovendo valere la condizione (1.33).*

Un'altra importante proprietà per un operatore \mathcal{A} è quella di essere *unitario*; questo avviene quando, ponendo \mathcal{I} uguale all'operatore identità,:

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A} = \mathcal{I} \quad (1.35)$$

cioè quando l'operatore aggiunto \mathcal{A}^\dagger è uguale all'operatore inverso \mathcal{A}^{-1} .

Nella nostra trattazione utilizzeremo spesso operatori importanti chiamati *matrici di Pauli*

σ_x , σ_y e σ_z , definite come segue:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

Queste matrici godono delle proprietà seguenti:

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \mathcal{I} \quad (1.37)$$

$$\sigma_x \sigma_y = i \sigma_z \quad \sigma_y \sigma_z = i \sigma_x \quad \sigma_z \sigma_x = i \sigma_y. \quad (1.38)$$

Inoltre le matrici di Pauli sono *operatori normali*, cioè sono sia hermitiani sia unitari.

Questa classe di operatori è di particolare importanza in quanto soddisfa il seguente teorema:

Teorema di decomposizione spettrale *Un operatore \mathcal{A} è diagonalizzabile, con una base ortonormale di autovettori, se e solo se è normale.*

Rispetto a questa base allora la rappresentazione matriciale di \mathcal{A} risulta essere:

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i |i\rangle \langle i|, \quad (1.39)$$

dove λ_i sono gli autovalori di \mathcal{A} e $|i\rangle$ i corrispondenti autovettori. Chiamiamo l'equazione (1.39) *decomposizione spettrale* dell'operatore \mathcal{A} . Un esempio di rappresentazione diagonale è la matrice di Pauli:

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = |0\rangle \langle 0| - |1\rangle \langle 1|, \quad (1.40)$$

che è diagonale rispetto alla base composta dai ket:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.41)$$

dove gli autovettori $|0\rangle$ e $|1\rangle$ corrispondono rispettivamente agli autovalori $+1$ e -1 .

1.4 Riduzione del vettore di stato

Discutiamo ora l'effetto di un processo di misura sullo stato di un sistema. A questo scopo definiamo un'importante classe di operatori chiamati *proiettori*. Se $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}$ è un vettore unitario, il proiettore \mathcal{P}_α è definito, per ogni vettore $|\gamma\rangle$ in \mathcal{H} , come segue:

$$\mathcal{P}_\alpha |\gamma\rangle = |\alpha\rangle \langle \alpha | \gamma \rangle = \langle \alpha | \gamma \rangle |\alpha\rangle. \quad (1.42)$$

Questo operatore è chiamato proiettore poichè *proietta* un generico ket $|\gamma\rangle$ lungo la direzione individuata dal ket $|\alpha\rangle$. In particolare, $\mathcal{P}_\alpha |\alpha\rangle = |\alpha\rangle$ e $\mathcal{P}_\alpha |\gamma\rangle = 0$ per ogni $|\gamma\rangle$ ortogonale ad $|\alpha\rangle$. Un proiettore soddisfa la proprietà di *idempotenza*:

$$\mathcal{P}_\alpha^2 = \mathcal{P}_\alpha, \quad (1.43)$$

di dimostrazione immediata se si tiene conto di $\mathcal{P}_\alpha |\alpha\rangle = |\alpha\rangle$. La definizione (1.42) si estende facilmente a proiettori su spazi multidimensionali. Abbiamo:

$$\mathcal{P} = \sum_{l=1}^k |\alpha_l\rangle \langle \alpha_l|, \quad (1.44)$$

dove gli α_l sono tra loro ortogonali e k è la dimensione del sottospazio sul quale l'operatore \mathcal{P} proietta. Di nuovo si osserva che $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$. Inoltre è anche possibile dimostrare che qualsiasi operatore lineare \mathcal{P} , tale che $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$, è un proiettore, perciò questa proprietà può essere utilizzata come definizione di proiettore.

Assumiamo ora che la misura di un'osservabile \mathcal{A} fornisca il risultato a_n , con a_n autovalore non degenere dell'operatore autoaggiunto \mathcal{A} . Se la misura non distrugge il sistema ed immediatamente dopo viene effettuata una seconda misura dell'osservabile, allora otterremo di nuovo il risultato a_n , questa volta con probabilità unitaria. Possiamo spiegare questo risultato sperimentale solo se ammettiamo che la funzione d'onda del sistema, individuata dal ket di stato $|\psi\rangle$ prima della prima misura, immediatamente dopo viene a coincidere con l'autostato $|n\rangle$ di \mathcal{A} relativo all'autovalore a_n ovvero si *riduce* ad $|n\rangle$. Se c'è degenerazione degli autovalori, allora possiamo espandere il ket di stato $|\psi\rangle$ prima della misura come segue:

$$|\psi\rangle = \sum_n \sum_{s=1}^{g_n} c_{n_s} |n_s\rangle, \quad (1.45)$$

dove g_n rappresenta l'ordine di degenerazione dell'autovalore a_n che corrisponde alla dimensione del sottospazio vettoriale generato dagli autovettori di \mathcal{A} con lo stesso autovalore a_n . Dopo la misura che fornisce l'autovalore a_n , lo stato del sistema appartiene allora a questo sottospazio ed è dato da:

$$\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{g_n} |c_{n_s}|^2}} \sum_{s=1}^{g_n} c_{n_s} |n_s\rangle. \quad (1.46)$$

Questo stato è la proiezione normalizzata di $|\psi\rangle$ sul sottospazio corrispondente all'autovalore a_n . Possiamo allora enunciare il seguente postulato:

- Postulato 3 (Riduzione del vettore di stato): *se un sistema è descritto dal ket di stato $|\psi\rangle$ e misuriamo una osservabile \mathcal{A} , ottenendo il risultato a_n , immediatamente dopo la misura lo stato del sistema è dato da:*

$$\frac{\mathcal{P}_n |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | \mathcal{P}_n | \psi \rangle}}, \quad (1.47)$$

dove \mathcal{P}_n è l'operatore di proiezione sul sottospazio generato dagli autovettori corrispondenti all'autovalore degenere a_n .

Notiamo che il proiettore \mathcal{P}_n può essere convenientemente scritto:

$$\mathcal{P}_n = \sum_{s=1}^{g_n} |n_s\rangle \langle n_s|. \quad (1.48)$$

Poichè gli autovettori di \mathcal{A} costituiscono una base ortonormale per lo spazio di Hilbert \mathcal{H} associato con il sistema, è facile mostrare che i proiettori \mathcal{P}_n soddisfano la relazione di completezza,

$$\sum_n \mathcal{P}_n = \mathcal{I} \quad (1.49)$$

e la condizione di ortogonalità:

$$\mathcal{P}_n \mathcal{P}_m = \delta_{mn} \mathcal{P}_m. \quad (1.50)$$

Nel caso privo di degenerazione ($g_n = 1$) la funzione d'onda del sistema dopo la misura si riduce nello stato:

$$\frac{1}{|c_n|} c_n |n\rangle, \quad (1.51)$$

e perciò, trascurando un fattore di fase globale privo di significato fisico, nell'autostato $|n\rangle$ corrispondente all'autovalore a_n . Se il sistema è descritto dalla funzione d'onda (1.45), prima della misura dell'osservabile \mathcal{A} , allora la probabilità di ottenere come risultato l'autovalore a_n è data da:

$$p_n = \langle \psi | \mathcal{P}_n | \psi \rangle. \quad (1.52)$$

Nel caso non degenere è facile ritrovare la definizione dell'equazione (1.32) del postulato

2. Concludiamo questo paragrafo definendo il *valor medio* di un osservabile \mathcal{A} , dato da:

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \sum_n a_n p_n, \quad (1.53)$$

e perciò:

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \sum_n a_n \langle \psi | \mathcal{P}_n | \psi \rangle = \langle \psi | \left(\sum_n a_n \mathcal{P}_n \right) | \psi \rangle = \langle \psi | \mathcal{A} | \psi \rangle, \quad (1.54)$$

dove abbiamo utilizzato la decomposizione spettrale (1.39) nella forma $\mathcal{A} = \sum_n a_n \mathcal{P}_n$.

1.5 Relazioni di indeterminazione di Heisenberg

Terminiamo l'analisi delle nozioni basilari della meccanica quantistica con le relazioni di indeterminazione di Heisenberg che sostanzialmente limitano il grado di precisione della misura di alcune grandezze fisiche. A questo scopo introduciamo i concetti di *commutatore* ed *anticommutatore*.

Diciamo che due operatori \mathcal{A} e \mathcal{B} commutano se soddisfano la seguente relazione:

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}. \quad (1.55)$$

Il *commutatore* dei due operatori \mathcal{A} e \mathcal{B} è definito da:

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}. \quad (1.56)$$

È facile mostrare le seguenti proprietà:

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = -[\mathcal{B}, \mathcal{A}], \quad (1.57)$$

$$[\mathcal{A}\mathcal{B}, \mathcal{C}] = \mathcal{A}[\mathcal{B}, \mathcal{C}] + [\mathcal{A}, \mathcal{C}]\mathcal{B}. \quad (1.58)$$

Vale inoltre l'importante teorema:

Teorema di diagonalizzazione simultanea Due operatori normali \mathcal{A} e \mathcal{B} commutano se e solo se esiste una base ortonormale comune rispetto alla quale sia \mathcal{A} sia \mathcal{B} sono diagonali.

L'anticommutatore di due operatori \mathcal{A} e \mathcal{B} è invece definito da:

$$\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\} = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{A}. \quad (1.59)$$

Allora diciamo che due operatori \mathcal{A} e \mathcal{B} anticommutano se $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}=0$. Si verifica facilmente che le matrici di Pauli anticommutano, per cui:

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 0 \quad (i, j = x, y, z), \quad (1.60)$$

mentre valgono le seguenti relazioni di commutazione:

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z, \quad [\sigma_y, \sigma_z] = 2i\sigma_x, \quad [\sigma_z, \sigma_x] = 2i\sigma_y. \quad (1.61)$$

Definiamo ora la *standard deviation* $\Delta\mathcal{A}$ associata con le misure di \mathcal{A} come:

$$\Delta\mathcal{A} = \sqrt{\langle(\mathcal{A} - \langle\mathcal{A}\rangle)^2\rangle} = \sqrt{\langle\mathcal{A}^2\rangle - \langle\mathcal{A}\rangle^2}. \quad (1.62)$$

Perciò, se eseguiamo un gran numero di esperimenti in cui lo stato $|\psi\rangle$ è preparato e l'osservabile \mathcal{A} è misurata, otteniamo risultati con valore medio $\langle\mathcal{A}\rangle$ dato dalla (1.54) e deviazione standard $\Delta\mathcal{A}$. Partendo dall'analisi di pochi esperimenti idealizzati, Heisenberg dimostrò che non è possibile assegnare simultaneamente e con precisione arbitraria posizione e velocità di una data particella. Se aumentiamo la precisione nelle misure della velocità, allora cresce l'incertezza sulla posizione e viceversa. Questa intrinseca limitazione è espressa dalle relazioni di indeterminazione posizione-momento:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (1.63)$$

dove $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ e $\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z$ sono le incertezze sulla posizione e sul momento della particella. Di seguito enunciamo una precisa formulazione matematica del principio di indeterminazione di Heisenberg, dovuta a Jordan:

- Principio di indeterminazione di Heisenberg: *siano gli operatori hermitiani \mathcal{A} e \mathcal{B} associati alle relative osservabili \mathcal{A} e \mathcal{B} e sia $|\psi\rangle$ un dato stato quantistico. Allora è*

soddisfatta la seguente disuguaglianza:

$$\Delta\mathcal{A}\Delta\mathcal{B} \geq \frac{|\langle\psi|[\mathcal{A},\mathcal{B}]|\psi\rangle|}{2}. \quad (1.64)$$

Il principio di Heisenberg ci dice allora che in meccanica quantistica se due osservabili \mathcal{A} e \mathcal{B} non commutano, cioè $[\mathcal{A},\mathcal{B}] \neq 0$, non è possibile misurare \mathcal{A} e \mathcal{B} simultaneamente con precisione arbitraria, ma le relative incertezze $\Delta\mathcal{A}$ e $\Delta\mathcal{B}$ soddisfano la (1.64).

Capitolo 2

L'entanglement: dal paradosso EPR alla disuguaglianza di Bell

2.1 L'esperimento di Stern-Gerlach: preparazione e misurazione di stati

L'esperimento di Stern e Gerlach, eseguito per la prima volta nel 1924, permise l'individuazione diretta dello *spin* o *momento angolare intrinseco*, una delle proprietà fondamentali dei sistemi quantistici. Si tratta di uno degli esperimenti che illustra in maniera più efficace l'inadeguatezza della meccanica classica nel descrivere i fenomeni fisici.

L'apparato sperimentale di Stern-Gerlach è mostrato schematicamente in figura 2.1.

Un fascio di atomi con un solo elettrone nel livello energetico più esterno (come l'atomo di idrogeno) attraversa una regione in cui è presente un campo magnetico \vec{B} diretto lungo l'asse z . Se gli atomi sono nel loro stato fondamentale, il momento angolare orbitale

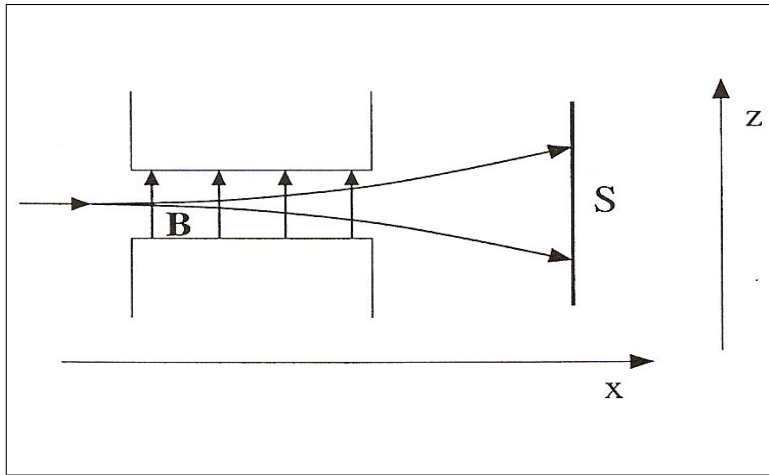


Figura 2.1: *Apparato di Stern-Gerlach*

dell'elettrone più esterno è nullo (stato s o $l = 0$) e il momento magnetico totale, che indichiamo con $\vec{\mu}$, coincide con il momento magnetico di *spin* dovuto al momento angolare intrinseco dell'elettrone. Il campo magnetico \vec{B} è disomogeneo, con gradiente ∇B diretto lungo l'asse z (B denota la componente B_z del vettore \vec{B}). Sotto queste condizioni, la meccanica classica ci dice che gli atomi sono soggetti ad una forza \vec{F} , anch'essa diretta lungo z . Se F_z e μ_z denotano le componenti dei vettori \vec{F} e $\vec{\mu}$ lungo z , abbiamo:

$$F_z = \mu_z \frac{dB_z}{dz}. \quad (2.1)$$

Dunque gli atomi vengono prima deflessi rispetto alla direzione di incidenza a causa dell'interazione tra campo magnetico \vec{B} e momento magnetico di *spin* $\vec{\mu}$ e successivamente raggiungono lo schermo S . Secondo la fisica classica, essendo i momenti magnetici degli atomi distribuiti isotropicamente, i punti di impatto sullo schermo S dovrebbero essere distribuiti in maniera continua intorno alla direzione incidente, con una deflessione massima per $\mu_z = +m$ e minima per $\mu_z = -m$ dove $m \equiv |\vec{\mu}|$. In realtà, si manifestano solo due punti di impatto sullo schermo corrispondenti a $\mu_z = +m$ e $\mu_z = -m$ ed il risultato dell'esperimento consiste nello splitting del fascio atomico incidente in due fasci secondari

a causa dell'interazione con il campo magnetico disomogeneo \vec{B} . Questa suddivisione mostra non solo che i possibili valori di μ_z sono discreti ma che *lo spin dell'elettrone può avere solo due orientazioni relative al campo magnetico: può essere o parallelo o antiparallelo*. Il numero di orientazioni possibili del momento angolare intrinseco (*spin*) S rispetto all'asse di quantizzazione z è $g = 2s + 1$ e, ottenendo sperimentalmente $g = 2$, il numero quantico di *spin* risulta $s = \frac{1}{2}$. Dunque, in corrispondenza delle due possibili orientazioni che chiamiamo *spin up* e *spin down*, la componente z del momento angolare di *spin* sarà uguale rispettivamente a $S_z = +\frac{1}{2}\hbar$ o $S_z = -\frac{1}{2}\hbar$, dove $h = 2\pi\hbar$ è la costante di Planck, il cui valore è $h \simeq 6.626 * 10^{-34}$ Joule s.

Notiamo che la scelta della direzione z nell'esperimento di Stern-Gerlach è del tutto arbitraria e che gli stessi risultati si ottengono per un campo magnetico orientato lungo una qualsiasi direzione.

Consideriamo ora più apparati di Stern-Gerlach disposti in diverse configurazioni e con direzioni di misura variabili.

Analizziamo per primo l'esperimento mostrato schematicamente nella figura seguente:

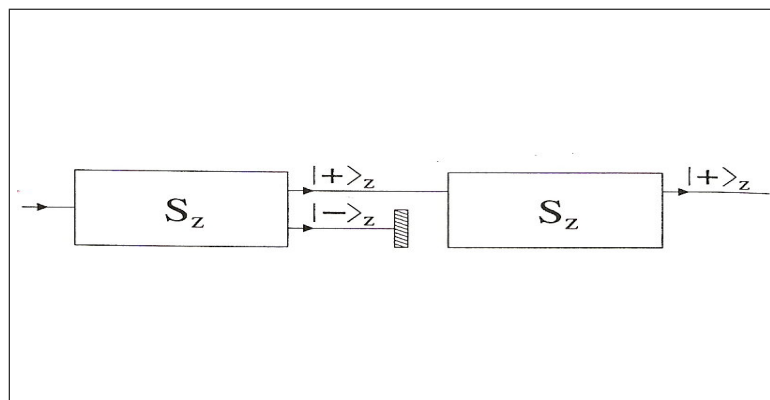


Figura 2.2: *Prima configurazione*

Il primo apparato suddivide il fascio incidente in due componenti, corrispondenti agli stati *spin up* e *spin down* degli elettroni. Chiamiamo questi due stati $|+\rangle_z$ e $|-\rangle_z$. Allora possiamo bloccare, tramite un filtro opportuno, la componente $|-\rangle_z$ lasciando che l'altra componente $|+\rangle_z$ entri nel secondo apparato di Stern-Gerlach analogo al primo ovvero con il campo magnetico orientato lungo l'asse z . Si osserva allora un singolo fascio, corrispondente alla componente $|+\rangle_z$, uscente dal secondo apparato. Dunque, appare chiaro che il primo apparato di Stern-Gerlach filtra gli atomi lasciando passare esclusivamente quelli con $\mu_z = +m$; il secondo apparato misura la medesima componente di *spin up*. Un arrangiamento sperimentale leggermente diverso è mostrato in figura 2.3:

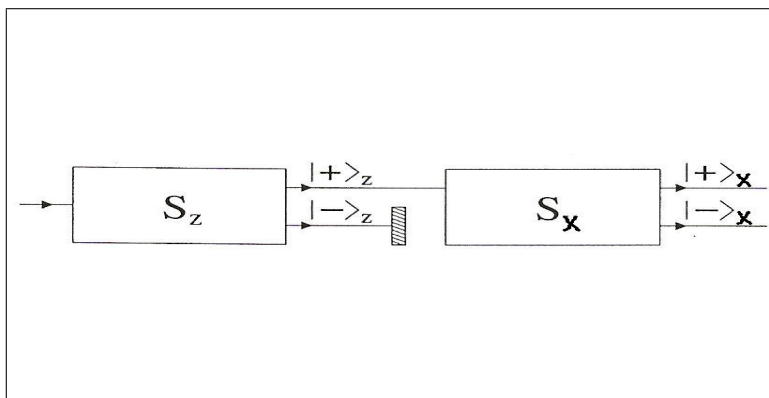


Figura 2.3: *Seconda configurazione*

In questo caso nel secondo apparato il campo magnetico è diretto lungo l'asse x . Vediamo allora emergere dal secondo apparato due fasci di eguale intensità corrispondenti a $\mu_x = +m$ e $\mu_x = -m$, dove μ_x denota la proiezione del momento magnetico lungo x . Chiamiamo queste due componenti, similmente a quanto fatto per l'asse z , $|+\rangle_x$ e $|-\rangle_x$. Il risultato non è sorprendente: gli atomi entrano nel secondo apparato con una ben definita componente $\mu_z = +m$, ma con un indefinito valore della componente μ_x . Tuttavia non è corretto pensare che metà degli atomi entranti nel secondo apparato

abbiano componenti $\mu_z = +m$ e $\mu_x = +m$ e che l'altra metà abbia componenti $\mu_z = +m$ e $\mu_x = -m$. L'esperimento in figura 2.4 mostra infatti che questo intuitivo modo di ragionare non è corretto.

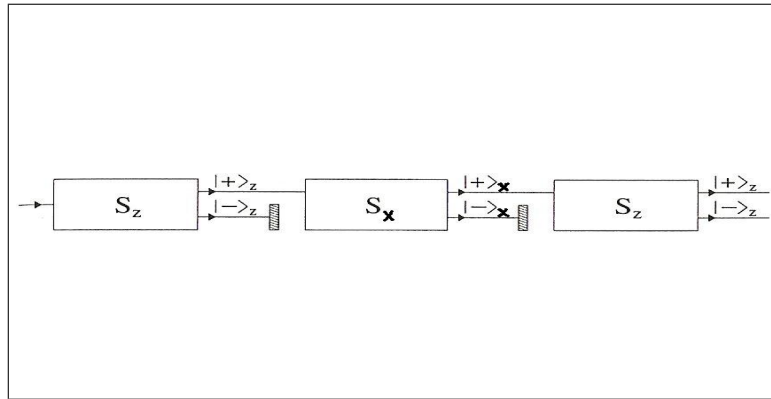


Figura 2.4: Terza configurazione

In questo caso i primi due dispositivi di Stern-Gerlach filtrano atomi con componenti del momento magnetico di *spin* $\mu_z = -m$ e $\mu_x = -m$. Il risultato consiste nell'osservazione di due nuovi fasci con componenti $|+\rangle_z$ e $|-\rangle_z$ uscenti da un terzo apparato di Stern-Gerlach con il campo magnetico diretto lungo z .

Inoltre, se si elimina il filtro della componente $|-\rangle_x$ in modo da far entrare entrambe le componenti $|+\rangle_x$ e $|-\rangle_x$ nel terzo apparato, ritroviamo esclusivamente la componente $|+\rangle_z$ nell'ultimo fascio uscente. Dunque, *lo stato finale del sistema dipende solo dallo stato degli atomi che entrano nell'ultimo apparato di Stern-Gerlach e dall'azione di questo apparato: non c'è memoria della storia precedente del sistema.* In breve, il secondo apparato fornisce lo stato $|+\rangle_x$ e così distrugge completamente ogni informazione circa il valore di S_z . Dunque, gli atomi che entrano nell'ultimo apparato, in figura 2.4, soddisfano $\mu_x = +m$ ma non hanno restrizioni su μ_z ; perciò metà degli atomi uscirà con $\mu_z = +m$, i restanti con $\mu_z = -m$.

I risultati precedenti si spiegano coerentemente e semplicemente attraverso i postulati esposti nel primo capitolo e possono essere generalizzati utilizzando le matrici di Pauli (1.36). Infatti, se l'apparato di Stern-Gerlach è orientato lungo l'asse z , possiamo equivalentemente indicare i due possibili stati $|+\rangle_z$ e $|-\rangle_z$ attraverso i ket:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

che sono proprio gli autovettori della matrice di Pauli σ_z (1.40), corrispondenti agli autovalori $+1$ e -1 . Se blocchiamo, come in figura 2.2, lo stato $|1\rangle$, allora lasciamo l'operatore di spin σ_z nell'autostato $|0\rangle$ con la certezza di ottenere l'autovalore $+1$ in un eventuale processo di misura effettuato immediatamente dopo (*riduzione del vettore di stato*). Se invece l'apparato iniziale è orientato lungo l'asse x , otteniamo uno dei due possibili stati:

$$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad e \quad |-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle), \quad (2.3)$$

che sono autovettori dell'operatore di Pauli σ_x corrispondenti agli autovalori $+1$ e -1 . Notiamo che lo stato più generale del sistema può essere scritto come:

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (2.4)$$

con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Per generalizzare il processo di misura degli stati di spin a qualsiasi direzione, introduciamo le coordinate polari sferiche θ e ϕ con $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi < \pi$. Allora lo stato (2.4) è scritto nelle nuove coordinate come:

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} |1\rangle. \quad (2.5)$$

Così, nell'esperimento di Stern-Gerlach, l'apparato può essere orientato lungo una qualsiasi direzione individuata dal vettore unitario $\vec{u} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ mostrato in figura. Allora lo stato generico (2.5) è un autostato dell'operatore:

$$\sigma_u = \vec{\sigma} \cdot \vec{u} = \sigma_x \sin \theta \cos \phi + \sigma_y \sin \theta \sin \phi + \sigma_z \cos \theta, \quad (2.6)$$

dove $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$. L'operatore σ_u ha, inoltre, la seguente rappresentazione matriciale nella base degli autovettori di σ_z :

$$\sigma_u = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Infine si mostra facilmente che la matrice σ_u , corrispondente all'operatore di spin lungo la direzione \vec{u} , ha autovettori:

$$|+\rangle_u = +\cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} |1\rangle \quad (2.8)$$

$$|-\rangle_u = -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} |0\rangle + \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} |1\rangle, \quad (2.9)$$

corrispondenti agli autovalori $+1$ e -1 .

Concludiamo questa analisi fondamentale evidenziando la duplice funzione dell'apparato di Stern-Gerlach, che può essere utilizzato sia per preparare sia per misurare stati quantistici di spin. Nel primo caso assumiamo che un fascio di atomi con numero quantico di spin $s = \frac{1}{2}$ entri nell'apparato di Stern-Gerlach orientato lungo l'asse x . Come abbiamo visto precedentemente, le due componenti $|+\rangle_x$ e $|-\rangle_x$ furiescono dall'apparato. Se blocchiamo la componente $|-\rangle_x$, allora abbiamo preparato lo stato $|+\rangle_x$ utilizzando l'apparato come *polarizzatore*. Se invece il fascio di atomi entra in un apparato con il campo magnetico \vec{B} diretto lungo una qualsiasi direzione \vec{u} e misuriamo il valore dell'operatore di spin σ_u lungo la direzione scelta, utilizziamo l'apparato di Stern-Gerlach come *analizzatore*.

Risulta ora chiaro ciò che avviene nell'esperimento in figura 2.4. Infatti, bloccando lo stato $|-\rangle_x$, si annulla la memoria della polarizzazione avvenuta nel primo apparato ed il sistema si riduce nello stato $|+\rangle_x$. Quest'ultimo equivale ad una sovrapposizione dei due autostati

$|0\rangle$ ed $|1\rangle$ di σ_z in modo tale che, utilizzando il terzo apparato come analizzatore lungo z , i rispettivi autovalori $+1$ e -1 si presenteranno con uguali probabilità $p_+ = p_- = \frac{1}{2}$.

2.2 Il paradosso EPR nella formulazione di Bohm

Quando parliamo di oggetti del mondo macroscopico come un libro o una palla da tennis, assumiamo che le proprietà di tali oggetti abbiano un'esistenza indipendente dalla nostra osservazione. Dunque, i nostri processi di misura non fanno altro che *rivelare* tali proprietà fisiche, quali dimensioni, posizione o velocità in un determinato istante di tempo t . Tuttavia, fin dai primi sviluppi della meccanica quantistica, negli anni '20 e '30 si manifestò un punto di vista che differisce marcatamente dalla visione classica. Infatti, nei postulati enunciati nel primo capitolo, si assume che un sistema quantistico, ad esempio una particella, non possiede in generale proprietà fisiche definite indipendentemente dall'osservazione, cioè prima che esse vengano misurate. Dunque un elettrone, a meno che non venga preparato in un opportuno autostato, non ha definite proprietà di “spin nella direzione z , σ_z ” o “spin nella direzione x , σ_x ”, prima che una delle due venga determinata effettuando un appropriato processo di misura qual è l'esperimento di Stern-Gerlach. Piuttosto, la meccanica quantistica fornisce un insieme di regole che specificano, dato un ket di stato, le probabilità di ottenere i diversi autovalori possibili quando è misurata l'osservabile σ_z o la σ_x .

Molti fisici, però, rifiutarono questa nuova visione della Natura. Il principale oppositore fu Albert Einstein che nel noto “articolo EPR” [4], scritto nel 1935 insieme a Nathan Rosen e Boris Podolsky, propose un esperimento mentale basato, fondamentalmente, sulla descrizione dell'entanglement quantistico per posizione e quantità di moto di due parti-

celle e finalizzato a dimostrare che la meccanica quantistica non è una teoria completa. Infatti, secondo gli autori, una teoria fisica può ritenersi completa solo se comprende un elemento corrispondente ad ogni singolo *elemento di realtà*. Per mostrare la contraddizione (“paradosso”) cui conduce, invece, la teoria quantistica, vengono effettuate due assunzioni, apparentemente naturali, intuitive e logiche:

- Principio di realtà: *se possiamo predire con certezza, senza disturbare il sistema, il valore di una quantità fisica, allora questo valore possiede realtà fisica, indipendentemente dalla nostra osservazione. Per esempio, se la funzione d'onda ψ di un sistema quantistico è un autostato di un operatore A ovvero:*

$$A|\psi\rangle = a|\psi\rangle, \quad (2.10)$$

allora il valore a dell'osservabile A è un elemento di realtà fisica.

- Principio di località: *se due sistemi sono causalmente disconnessi, il risultato di ogni eventuale misura effettuata su un sistema non può influenzare il risultato della misura effettuata sul secondo sistema. Seguendo la teoria della relatività, diciamo che due eventi o processi di misura sono disconnessi se $(\Delta x)^2 > c^2(\Delta t)^2$, dove Δx e Δt sono gli intervalli di spazio e di tempo tra i due eventi in un sistema di riferimento inerziale e c è la velocità della luce.*

Ora, secondo il principio di indeterminazione di Heisenberg (1.64), se in meccanica quantistica due operatori A e B non commutano, allora le due quantità fisiche corrispondenti agli operatori A e B non possono essere determinate simultaneamente con precisione arbitraria e quindi, secondo il *principio di realtà*, non possono avere realtà simultanea.

Nell'articolo originale [4], EPR scelgono come grandezze fisiche non commutative, alla base del loro ragionamento, la posizione e la quantità di moto. Tuttavia, in questa trattazione esaminiamo la formulazione del “paradosso” dovuta al fisico statunitense David Bohm [6], in cui le grandezze in esame sono due diverse componenti di spin cui corrispondono i rispettivi operatori di Pauli ed il processo di misura avviene, quindi, attraverso un apparato di Stern-Gerlach. L'apparato ideale è mostrato in figura:

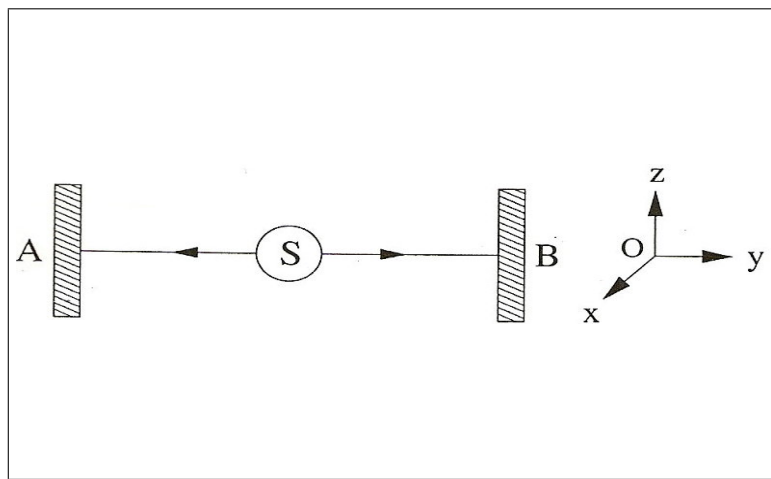


Figura 2.5: *Schema EPR idealizzato da Bohm*

Consideriamo una sorgente S che emette una coppia di particelle con numero quantico di spin $s = \frac{1}{2}$ nello stato entangled:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle), \quad (2.11)$$

dove $|0\rangle$ e $|1\rangle$, autovettori dell'operatore σ_z , sono stati definiti nella (1.41). Chiamiamo questo particolare stato “stato EPR” o “stato di Bell”. Diciamo anche che il sistema è nello stato di “singoletto” di spin a causa dell'unica orientazione relativa possibile fra gli spin delle due particelle.

Supponiamo di inviare una particella verso un osservatore A che chiamiamo Alice e la

seconda particella verso un altro osservatore B che chiamiamo Bob. Notiamo che Alice e Bob sono arbitrariamente distanti l'uno dall'altro; l'unica richiesta è che le misure effettuate dai due sperimentatori siano causalmente disconnesse. Se Alice misura la componente z della particella in suo possesso ed ottiene, ad esempio, $\sigma_z^{(A)} = +1$ (l'apice A sta per Alice), allora lo stato EPR collassa nello stato $|01\rangle$. Conseguentemente, se Bob misura la componente z dello spin della sua particella, otterrà con certezza $\sigma_z^{(B)} = +1$ (dove B sta per Bob). Perciò, trattandosi di uno stato di singoletto, i risultati delle due misure sono perfettamente opposti. Finora nulla di nuovo, poiché è facile trovare un'analogia situazione classica, macroscopica. Il punto sorprendente deriva dall'osservazione che lo stato di singoletto (2.11) può essere anche scritto come:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - | -+\rangle), \quad (2.12)$$

dove $|+\rangle$ e $|-\rangle$, autovettori dell'operatore σ_z , sono definiti nella (2.3).

Se allora Alice misura $\sigma_x^{(A)}$ ed ottiene, per esempio, l'autovalore $+1$, allora lo stato EPR collassa nello stato $|+-\rangle$ e Bob otterrà con certezza, dalla misura di $\sigma_x^{(B)}$, l'autovalore -1 . Perciò lo stato della particella che arriva a Bob, in entrambi i casi, dipende dalla natura dell'osservabile misurata sulla prima particella: *se Alice misura $\sigma_z^{(A)}$, allora lo stato della particella di Bob collassa nell'autostato di $\sigma_z^{(B)}$; se invece Alice misura $\sigma_x^{(A)}$, allora lo stato della particella di Bob collassa nell'autostato di $\sigma_x^{(B)}$* . Riprendendo il linguaggio EPR, diciamo che nel primo caso associamo un elemento di realtà fisica con $\sigma_z^{(B)}$, nel secondo con $\sigma_x^{(B)}$. Tuttavia è impossibile assegnare realtà fisica simultanea ed entrambe le osservabili $\sigma_z^{(B)}$ e $\sigma_x^{(B)}$, poiché esse non commutano, $[\sigma_x^{(B)}, \sigma_z^{(B)}] \neq 0$ dalle (1.61). Quindi, la meccanica quantistica, paradossalmente, non può racchiudere insieme entrambi gli elementi di realtà. Più in generale, lo stato di singoletto è un *invariante rotazionale*, per cui mantiene sempre

la stessa forma:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_u |-\rangle_u - |-\rangle_u |+\rangle_u) \quad (2.13)$$

per ogni direzione \vec{u} , con $|+\rangle_u$ e $|-\rangle_u$ autovettori dell'operatore σ_u con autovalori $+1$ e -1 . Infatti, per una qualsiasi direzione \vec{u} la misura dell'osservabile σ_u fornirà l'autovalore $+1$ per una particella e l'autovalore -1 per l'altra. Dunque, Alice può scegliere quale osservabile misurare anche dopo che le particelle siano state separate e, con la sua misura, influisce deterministicamente sui risultati della misura di Bob mentre, secondo il principio di località, ogni misura effettuata da Alice non dovrebbe nè potrebbe modificare lo stato della particella di Bob. Così, la meccanica quantistica si presenta in aperta contraddizione con entrambi i principi di realismo e località. *La conclusione EPR fu che la meccanica quantistica è una teoria incompleta.*

Tre mesi dopo la pubblicazione dell'articolo EPR, Niels Bohr presentò la sua “risposta” alla stessa rivista che l'aveva pubblicato, *Physical Review* [5]. Egli scrisse: “*nella libertà di scelta offerta da EPR, siamo semplicemente in presenza di una discriminazione tra differenti procedure sperimentali, il che permette l'uso non ambiguo di concetti classici complementari*”. La maggioranza degli scienziati o venne convinta dalla replica di Bohr alla critica EPR, o altrimenti pensò che la controversia fosse più di natura filosofica che fisica, visto che non vi erano risultati sperimentali in dubbio.

Tre decenni dopo, il fisico irlandese John Bell avrebbe minato anche questo punto di vista.

2.3 La disuguaglianza di Bell e le variabili nascoste

Nella formulazione del paradosso “EPR” assume un ruolo fondamentale l’entanglement dello stato di singoletto (2.13). Si tratta della sovrapposizione di due stati prodotto i cui i ket, moltiplicati tensorialmente, rappresentano gli autovettori dell’operatore σ_u . Quest’ultimo corrisponde ad un’osservabile, la componente di spin lungo la direzione \vec{u} , detta *dicotomica*, poiché può assumere solo due autovalori, $+1$ e -1 . La sovrapposizione rende lo stato di singoletto non fattorizzabile in due componenti separate e le particelle entangled restano sempre correlate. Einstein osservò che, paradossalmente, qualsiasi misura effettuata su una delle due particelle avrebbe *immediatamente* influito sull’altra, anche a distanze arbitrariamente grandi nell’universo. Di conseguenza definì il fenomeno dell’entanglement una “*sinistra azione a distanza*” e, come abbiamo visto, la sua conclusione fu che la meccanica quantistica (M.Q.) non rappresentasse una teoria fisica completa. Il dibattito sulla realtà fisica dei sistemi quantistici e sulla validità della M.Q. diventò oggetto dell’investigazione sperimentale dopo la formulazione, nel 1964, della disuguaglianza di Bell [7]. Questa si ottiene assumendo validi i principi EPR di realismo e località. Ora, poiché risulta possibile progettare situazioni in cui la meccanica quantistica predice una violazione della disuguaglianza, ogni osservazione sperimentale di tale violazione *esclude* la possibilità di una descrizione realistica e locale dei fenomeni naturali. In breve, *Bell mostrò che i principi di realismo e località conducono a disuguaglianze testabili sperimentalmente in disaccordo con le predizioni della meccanica quantistica*. Di seguito riportiamo una prima formulazione della disuguaglianza.

Consideriamo uno sperimentatore C, che chiamiamo Charlie, in grado di *preparare* due particelle e di ripetere numerose volte la stessa procedura sperimentale.

Dopo la preparazione, riprendendo lo schema EPR nella formulazione di Bohm (figura 2.5), Charlie invia una particella verso Alice e l'altra verso Bob. Una volta ricevuta la sua particella, Alice può scegliere, *in maniera del tutto casuale*, di effettuare uno tra due diversi processi di misura. Le misure riguardano due osservabili, che indichiamo rispettivamente con \mathcal{P}_Q e \mathcal{P}_R , corrispondenti a due grandezze fisiche dicotomiche (con possibili valori $+1$ e -1). Supponiamo che Alice ottenga il valore Q se misura l'osservabile \mathcal{P}_Q ed il valore R se misura l'osservabile \mathcal{P}_R . Applicando il principio di *realità*, seguendo il [2], assumiamo che Q ed R siano proprietà oggettive della particella di Alice, che si limita a *rivelare* tali proprietà attraverso le sue misure. Similmente, supponiamo che Bob sia in grado di misurare una delle due proprietà, \mathcal{P}_S o \mathcal{P}_T , rivelando le quantità S e T oggettivamente esistenti (elementi di realtà nel linguaggio EPR) e con possibili valori ± 1 . Anche Bob, come Alice, non decide precedentemente quale proprietà misurare, ma aspetta l'arrivo della particella e, solo allora, sceglie casualmente. Applicando, invece, il principio di *località*, imponiamo che i processi di misura di Alice e Bob avvengano allo stesso tempo ovvero siano causalmente disconnessi. Perciò, la misura effettuata da Alice non può disturbare il risultato di Bob e viceversa, poiché un'influenza fisica non può propagarsi più velocemente della luce. Consideriamo allora la quantità:

$$QS + RS + RT - QT, \quad (2.14)$$

notando molto semplicemente che:

$$QS + RS + RT - QT = (Q + R)S + (R - Q)T. \quad (2.15)$$

Poiché $R, Q = \pm 1$ segue che o $(Q + R)S = 0$ oppure $(R - Q)T = 0$ ma le due quantità non possono annullarsi insieme. In ogni caso, è facile mostrare dalla (2.15) che $QS + RS + RT - QT = \pm 2$. Chiamiamo ora $p(q, r, s, t)$ la probabilità che, prima di

effettuare le misure, il sistema sia nello stato con $Q = q, R = r, S = s$ e $T = t$. Dunque, denotando con $E(\cdot)$ il valore medio di una quantità, abbiamo:

$$\begin{aligned} E(QS + RS + RT - QT) &= \sum_{qrst} p(q, r, s, t)(qs + rs + rt - qt) \\ &\leq \sum_{qrst} p(q, r, s, t) \times 2 = 2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Ma vale anche:

$$\begin{aligned} E(QS + RS + RT - QT) &= \sum_{qrst} p(q, r, s, t)qs + \sum_{qrst} p(q, r, s, t)rs \\ &+ \sum_{qrst} p(q, r, s, t)rt - \sum_{qrst} p(q, r, s, t)qt \\ &= E(QS) + E(RS) + E(RT) - E(QT) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Comparando la (2.16) con la (2.17) otteniamo la *disuguaglianza di Bell*:

$$E(QS) + E(RS) + E(RT) - E(QT) \leq 2. \quad (2.18)$$

Dunque, ripetendo più volte l'esperimento, Alice e Bob possono determinare tutte le quantità alla sinistra della disequazione (2.18). Ad esempio, dopo aver raccolto i dati, possono osservare tutti gli esperimenti in cui Alice ha misurato P_Q e Bob ha misurato P_S . Moltiplicando i risultati ottengono un valore di QS per ogni esperimento e, calcolando il valor medio sul campione in esame, possono valutare $E(QS)$ con una precisione limitata esclusivamente dal numero di esperimenti effettuati.

Notiamo che la disuguaglianza di Bell espressa dalla (2.18) è un risultato assolutamente generale che potrebbe essere applicato a coppie di galassie, a coppie di stelle ed a qualunque coppia di oggetti macroscopici, una volta che siano state definite le grandezze fisiche dicotomiche da misurare. *È anche in questo carattere universale che sta il fascino della disuguaglianza di Bell.*

Tuttavia, quando consideriamo sistemi accoppiati quantistici quali particelle entangled, applicando i principi della meccanica quantistica, la disuguaglianza di Bell risulta violata. Supponiamo infatti che, nel nostro esperimento, Charlie prepari un sistema quantistico di due particelle entangled nello stato di singoletto:

$$|\psi\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.19)$$

analogo alla (2.11), ed invii la prima particella verso Alice e la seconda verso Bob. Essi effettuano le misure delle seguenti osservabili dicotomiche:

$$Q = \sigma_z^{(A)} \quad S = \frac{-\sigma_z^{(B)} - \sigma_x^{(B)}}{\sqrt{2}} \quad (2.20)$$

$$R = \sigma_x^{(A)} \quad T = \frac{\sigma_z^{(B)} - \sigma_x^{(B)}}{\sqrt{2}}. \quad (2.21)$$

Allora, applicando la definizione data dalla (1.54) ed indicando i valori medi nella notazione quantistica $\langle \cdot \rangle$, semplici calcoli mostrano che per queste osservabili valgono le relazioni:

$$\langle QS \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \langle RS \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.22)$$

$$\langle RT \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \langle QT \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (2.23)$$

Così si ottiene:

$$\langle QS \rangle + \langle RS \rangle + \langle RT \rangle - \langle QT \rangle = 2\sqrt{2}. \quad (2.24)$$

Dunque la disuguaglianza di Bell (2.18) è violata: *la meccanica quantistica risulta incompatibile con la naturale filosofia del realismo locale*. Allora, se è valida la M.Q., almeno una delle due assunzioni originarie dell'articolo EPR (principi di realtà e località) non è corretta e va rigettata. L'importanza dell'opera di John Bell sta nell'aver ricondotto ed espresso l'incompatibilità tra la M.Q. ed il realismo locale, introdotta ed evidenziata

da EPR, attraverso una disuguaglianza verificabile sperimentalmente. Prima della formulazione della disuguaglianza di Bell (1964), fu anche proposto che la M.Q., incompleta secondo EPR, fosse completata introducendo certe *variabili nascoste*. L'idea fu che la misura è in realtà un processo deterministico che appare invece probabilistico, semplicemente perché alcuni gradi di libertà (le variabili nascoste) non sono noti con precisione. Tuttavia, come vedremo nel terzo capitolo, diversi esperimenti, condotti utilizzando i fotoni, sono stati effettuati negli anni '70 ed '80 ed hanno violato la disuguaglianza di Bell in favore delle predizioni della meccanica quantistica.

2.4 Derivazione alternativa di Wigner

Deriviamo ora la disuguaglianza di Bell seguendo un semplice modello proposto dal fisico e matematico ungherese Eugene Wigner [1]. Assumiamo che una sorgente emetta un gran numero di particelle entangled nello stato di singoletto (2.13). Riferendoci sempre allo schema EPR nella formulazione di Bohm, supponiamo che i due sperimentatori Alice e Bob ricevano le due particelle e possano misurarne la polarizzazione lungo uno dei tre assi \vec{a}, \vec{b} o \vec{c} . Possiamo dividere le particelle emesse in diversi gruppi secondo il seguente criterio: *se Alice ottiene, ad esempio, l'autovalore +1 quando misura σ_a , +1 quando misura σ_b e -1 quando misura σ_c , allora diciamo che la particella appartiene al gruppo (a+, b+, c-)*. Naturalmente, come abbiamo visto ad inizio capitolo, σ_a, σ_b e σ_c rappresentano gli operatori di spin lungo le direzioni \vec{a}, \vec{b} e \vec{c} . ed Alice non effettua le tre misure simultaneamente, ma queste possono essere eseguite una per volta. Applichiamo il principio di *realtà* nella stessa maniera del paragrafo precedente e ricordiamo che i risultati delle misure effettuate da Alice e Bob sono perfettamente anticorrelati, trattandosi di uno stato di singoletto.

Così, se la particella di Alice appartiene al gruppo $(a+, b+, c-)$, la corrispondente particella di Bob deve essere nel gruppo $(a-, b-, c+)$. Mostriamo nella tabella seguente gli otto gruppi mutuamente esclusivi cui le particelle entangled possono appartenere:

Popolazione	Particella di Alice	Particella di Bob
N_1	$(a+, b+, c+)$	$(a-, b-, c-)$
N_2	$(a+, b+, c-)$	$(a-, b-, c+)$
N_3	$(a+, b-, c+)$	$(a-, b+, c-)$
N_4	$(a+, b-, c-)$	$(a-, b+, c+)$
N_5	$(a-, b+, c+)$	$(a+, b-, c-)$
N_6	$(a-, b+, c-)$	$(a+, b-, c+)$
N_7	$(a-, b-, c+)$	$(a+, b+, c-)$
N_8	$(a-, b-, c-)$	$(a+, b+, c+)$

Le quantità (N_1, N_2, \dots, N_8) rappresentano il numero di coppie di particelle appartenenti ai diversi gruppi ed $N_t = \sum_{I=1}^8 N_i$ è il numero totale di coppie emesse dalla sorgente. Notiamo che, per il principio di *località*, se una coppia appartiene al gruppo 1 ed Alice sceglie di misurare $\sigma_a^{(A)}$, allora misurerà con certezza il valore $+1$, *indipendentemente* dal fatto che Bob scelga di effettuare una misura lungo \vec{a} , \vec{b} o \vec{c} e viceversa. Ora, sia $p(a+, b+)$ la probabilità che Alice ottenga $\sigma_a^{(A)} = +1$ e Bob misuri $\sigma_b^{(B)} = +1$. Dalla tabella superiore è chiaro che:

$$p(a+, b+) = \frac{N_3 + N_4}{N_t}, \quad (2.25)$$

similmente, otteniamo:

$$p(a+, c+) = \frac{N_2 + N_4}{N_t}, \quad p(c+, b+) = \frac{N_3 + N_7}{N_t}. \quad (2.26)$$

Poiché $N_i \geq 0$, abbiamo $N_3 + N_4 \leq (N_2 + N_4) + (N_3 + N_7)$ e perciò otteniamo la seguente ed alternativa *disuguaglianza di Bell*:

$$p(a+, b+) \leq p(a+, c+) + p(c+, b+). \quad (2.27)$$

Ora, valutiamo le probabilità che appaiono nella (2.27) seguendo la teoria quantistica. A questo scopo consideriamo $p(a+, b+)$. Se Alice misura $\sigma_a^{(A)} = +1$, allora lo stato della particella di Bob collassa nell'autostato $|-\rangle_a$ di $\sigma_a^{(B)}$ con autovalore -1 . Così, ricordando le considerazioni di inizio capitolo, essendo $\sigma_a^{(A)} = +1$, è facile mostrare che Bob ottiene $\sigma_b^{(B)} = +1$ con probabilità ${}_b\langle + | |-\rangle_a \rangle^2 = \sin^2(\theta_{ab}/2)$, dove θ_{ab} è l'angolo tra i due assi \vec{a} e \vec{b} . Poiché Alice ottiene $\sigma_a^{(A)} = +1$ con probabilità $1/2$, otteniamo:

$$p(a+, b+) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2}. \quad (2.28)$$

Nello stesso modo possiamo misurare $p(a+, c+)$ e $p(c+, b+)$. Dunque, con i calcoli quantistici, la disuguaglianza (2.27) diventa:

$$\sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \leq \sin^2 \frac{\theta_{ac}}{2} + \sin^2 \frac{\theta_{cb}}{2}. \quad (2.29)$$

Dunque se scegliamo, ad esempio, gli assi \vec{a}, \vec{b} e \vec{c} tali che $\theta_{ab} = 2\theta$, $\theta_{ac} = \theta_{cb} = \theta$, allora la disuguaglianza viene violata per $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ (es. $\theta = \pi/4$). Anche in questo caso, la meccanica quantistica conduce ad una violazione, testabile sperimentalmente, della disuguaglianza di Bell.

Forniamo ora un'ultima espressione equivalente della disuguaglianza di Bell. Assumiamo che esista una variabile nascosta λ tale che, per ogni valore di λ , si ottenga un risultato ben definito $\mathcal{O}(\lambda)$ dalla misura di un'osservabile fisica \mathcal{O} . Dunque, richiediamo che la distribuzione di probabilità $\rho(\lambda)$ della variabile λ sia tale che i valori medi predetti dalla

meccanica quantistica siano ritrovati; cioè:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int \mathcal{O}(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda. \quad (2.30)$$

Considerando sempre come sperimentatori Alice e Bob, chiamiamo $A(a, \lambda)$ e $B(b, \lambda)$ i risultati delle misure (causalmente disconnesse) di polarizzazione di spin $\sigma_a^{(A)}$ e $\sigma_b^{(B)}$ lungo le direzioni \vec{a} e \vec{b} , effettuate da Alice e Bob, rispettivamente. Assumendo il principio di *località*, l'autovalore della misura di Alice non può dipendere dal risultato della misura di Bob. Definendo la *funzione di correlazione* $C(a, b)$ come la media dei prodotti dei risultati trovati per le due particelle lungo le direzioni \vec{a} e \vec{b} , si ha:

$$C(a, b) = \int A(a, \lambda) B(b, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \quad (2.31)$$

Per esempio, come abbiamo visto precedentemente, la meccanica quantistica predice la perfetta anticorrelazione per lo stato EPR (2.11) quando $a = b$ e perciò:

$$C(a, a)_{\text{quantum}} = -1 \quad (2.32)$$

Calcoliamo ora:

$$\begin{aligned} C(a, b) - C(a, b') &= \int [A(a, \lambda) B(b, \lambda) - A(a, \lambda) B(b', \lambda)] \rho(\lambda) d\lambda \\ &= \int A(a, \lambda) B(b, \lambda) [1 \pm A(a', \lambda) B(b', \lambda)] \rho(\lambda) d\lambda \\ &\quad - \int A(a, \lambda) B(b', \lambda) [1 \pm A(a', \lambda) B(b, \lambda)] \rho(\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (2.33)$$

Poiché $A(a, \lambda)$ e $B(b, \lambda)$ sono misure di polarizzazione dicotomiche, abbiamo:

$$|A(a, \lambda)| = 1 \quad |B(b, \lambda)| = 1. \quad (2.34)$$

Inoltre, $\rho(\lambda)$ è positiva per ogni λ per cui vale la relazione:

$$\begin{aligned} |C(a, b) - C(a, b')| &\leq \int [1 \pm A(a', \lambda)B(b', \lambda)]\rho(\lambda)d\lambda \\ &+ \int [1 \pm A(a', \lambda)B(b, \lambda)]\rho(\lambda)d\lambda. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Questo implica che:

$$|C(a, b) - C(a, b')| \leq \pm[C(a', b') + C(a', b)] + 2 \int \rho(\lambda)d\lambda \quad (2.36)$$

e perciò:

$$|C(a, b) - C(a, b')| \leq -|C(a', b') + C(a', b)| + 2 \int \rho(\lambda)d\lambda. \quad (2.37)$$

Infine otteniamo la disuguaglianza di Bell:

$$|C(a, b) - C(a, b')| + |C(a', b) + C(a', b')| \leq 2, \quad (2.38)$$

dove abbiamo usato la condizione di normalizzazione della distribuzione di probabilità $\rho(\lambda)$ ovvero $\int \rho(\lambda)d\lambda = 1$. Allora, anche in questo come nei casi precedenti, il punto principale sta nell'esistenza di direzioni (a, b, a', b') tali che, considerando stati entangled, la meccanica quantistica viola la suddetta disuguaglianza. Per lo stato di singoletto (2.11), infatti, la meccanica quantistica predice che $C(a, b) = -a \cdot b = -\cos \theta_{ab}$, dove θ_{ab} è l'angolo tra le direzioni \vec{a} e \vec{b} ; così abbiamo:

$$\begin{aligned} \{|C(a, b) - C(a, b')| + |C(a', b) - C(a', b')|\}_{quantum} &= \\ &= |-\cos \phi + \cos 3\phi| + |-\cos \phi - \cos \phi| = 2\sqrt{2} \geq 2, \end{aligned} \quad (2.39)$$

dove $\phi = (\pi/4)$ come in figura.

Dunque, ancora una volta, l'entanglement è alla base dei ragionamenti sulla validità della meccanica quantistica e, grazie alla disuguaglianza di Bell, permette un test sperimentale sulla consistenza della teoria. Nel prossimo capitolo descriviamo alcuni dei più noti

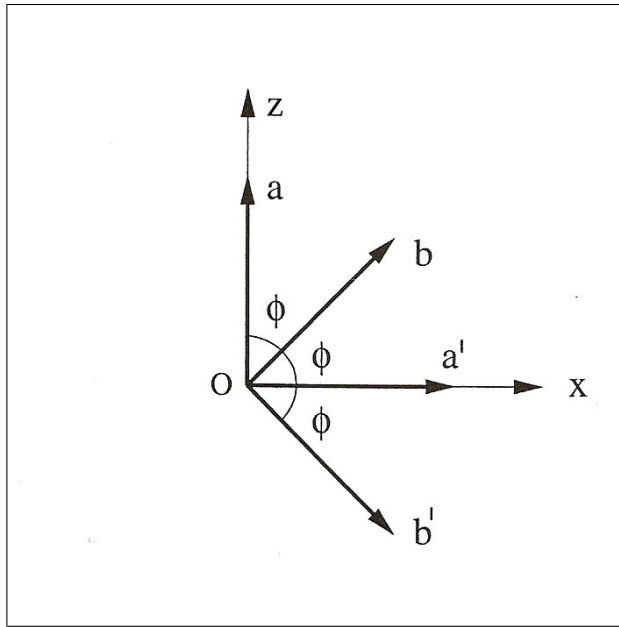


Figura 2.6: *Angolo di violazione ϕ*

esperimenti effettuati su coppie di fotoni entangled ed analizziamo alcune delle più recenti applicazioni dell'entanglement.

Capitolo 3

Risultati sperimentali ed applicazioni

3.1 Gli esperimenti di prima generazione

Nei tre decenni successivi alla sua formulazione, la disuguaglianza di Bell rappresentò la base concettuale per la realizzazione di un esperimento che sarebbe stato cruciale per la comprensione dei fenomeni quantistici. Infatti, un'eventuale violazione sperimentale della disuguaglianza avrebbe confermato la validità dei postulati quantistici e portato alla non accettazione di possibili teorie a variabili nascoste, che erano state introdotte per salvaguardare il realismo locale. A partire dagli anni '70, allora, diversi fisici si cimentarono nella progettazione di un esperimento finalizzato a tale verifica. Sino ad oggi, sono stati effettuati numerosi esperimenti che possono essere suddivisi in tre grandi gruppi o generazioni. La prima comprende quelli effettuati nel corso degli anni '70, la seconda quelli dei primi anni '80 e la terza quelli eseguiti dalla fine degli anni '80 ad oggi. In questo paragrafo ci concentriamo sui primi.

3.1.1 Le difficoltà e le condizioni sperimentali

La realizzazione di un esperimento per la verifica della disuguaglianza di Bell non risultava affatto semplice sia per le carenze tecnologiche connesse alla produzione di particelle entangled sia per la difficoltà nel soddisfare tutte le richieste concettuali esposte da Bell nel suo articolo seminale del 1964. L'obiettivo, infatti, era quello di creare una situazione sperimentale il più vicina possibile all'esperimento ideale EPR nella formulazione di Bohm, in cui le particelle di spin $1/2$ fossero però sostituite da fotoni entangled in uno stato di polarizzazione comune.

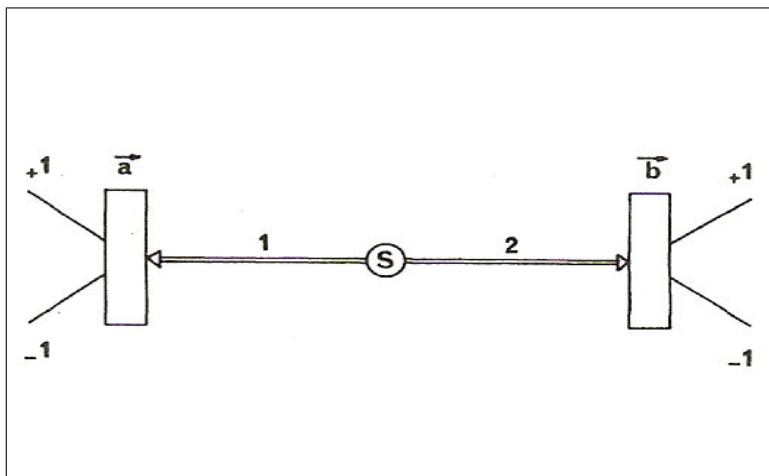


Figura 3.1: *Schema di Bohm idealizzato per fotoni*

L'apparato in figura mostra che, in presenza dei fotoni 1 e 2, gli strumenti di misura sono rappresentati da due polarizzatori che forniscono i risultati $+1$ o -1 a seconda che il rispettivo fotone incidente sia polarizzato parallelamente o perpendicolarmente alla direzione di misura (\vec{a} o \vec{b} in figura). Attraverso misure di coincidenze fra i possibili risultati forniti dai due polarizzatori è possibile calcolare la *funzione di correlazione* del tipo (2.31) per le direzioni \vec{a} e \vec{b} (a, b). Effettuando misure di questo tipo anche per altre orientazioni

$(a, b), (a', b)$ e (a', b') , è possibile calcolare la quantità corrispondente al primo membro della disuguaglianza di Bell (2.38). Scegliendo allora le direzioni per cui la meccanica quantistica viola la disuguaglianza, come nella (2.39), è possibile testare sperimentalmente se il fenomeno rispecchia le predizioni della M.Q. o di una qualsiasi teoria locale a variabili nascoste. In generale, per situazioni sperimentali in cui si misurano le correlazioni tra sottosistemi separati (che hanno interagito nel passato), come i due fotoni, possiamo esprimere due condizioni necessarie per ottenere una possibile violazione della disuguaglianza di Bell:

- i due sottosistemi (fotoni o particelle di spin $1/2$) devono essere in uno *stato entangled*, non fattorizzabile;
- per ogni sottosistema, deve essere possibile effettuare la misura di una grandezza scelta tra almeno due osservabili non commutative (come le misure di polarizzazione lungo le direzioni \vec{a} e \vec{a}' , nè parallele nè perpendicolari).

Inoltre, pur essendo soddisfatte queste due condizioni, abbiamo visto che la violazione avviene solo per particolari insiemi di orientazioni, mentre, per molte altre, le predizioni della meccanica quantistica non violano la disuguaglianza di Bell.

Questi pose, all'interno delle sue argomentazioni, anche un'altra questione fondamentale basata sulla necessità di ottenere un esperimento nella tipologia proposta da Bohm, in cui le proprietà fisiche degli apparati di misura (ad esempio la direzione dell'asse del polarizzatore) venissero modificati durante il volo delle particelle entangled. In questo caso, infatti, la condizione di *località* viene a dipendere direttamente dalla causalità einsteniana, per cui non è possibile trasmettere segnali a velocità maggiore di quella della luce. Viene così impedito ogni possibile scambio di informazione tra i due fotoni e viene esclusa

qualsiasi spiegazione classica della correlazione dei risultati. Allora, un esperimento che soddisfi questa richiesta, può essere descritto attraverso due nuove condizioni:

- le misure effettuate sui due sistemi devono essere totalmente disconnesse (principio di località EPR);
- le scelte delle osservabili da misurare, su entrambi i sottosistemi separati, devono essere casuali e disconnesse spazio-temporalmente.

La seconda condizione è ovviamente molto più difficile da realizzare.

3.1.2 Le prime violazioni

Gli esperimenti di prima generazione sono stati effettuati da tre diversi gruppi, uno a Berkeley, un altro ad Harvard e l'ultimo al College Station di Houston. Sono stati utilizzati schemi sperimentali semplificati rispetto all'apparato di figura 3.1, sostanzialmente a causa dell'utilizzo di polarizzatori ad un solo canale e dei limitati angoli di raccolta dei fotoni. Inoltre essi si ispiravano all'articolo [8] dei fisici statunitensi J.Clauser, M.Horne, A.Shimony e J.Holt (CHSH), pubblicato nel 1969, in cui venne manifestata la reale possibilità di ottenere fotoni entangled sfruttando particolari *cascade atomiche* e fu enunciata un'ipotesi addizionale che salvaguardava il principio di località, insieme alla validità della disuguaglianza di Bell, essendo i polarizzatori fissi in posizioni stabili, lungo certe orientazioni, durante l'intera durata delle misure. Gli esperimenti di seconda generazione, condotti nei primi anni '80, hanno risolto alcuni di questi problemi, avvicinandosi maggiormente alla situazione sperimentale ideale di Bohm. Dunque, tratteremo analiticamente questi ultimi nel secondo paragrafo, descrivendone le sorgenti, gli apparati e le procedure.

Tuttavia, per completezza, esponiamo di seguito i risultati fondamentali degli esperimenti di prima generazione:

- **Berkeley:** J. Clauser e S. Freedman utilizzarono una sorgente in cui atomi di calcio venivano eccitati da radiazione ultravioletta. La diseccitazione seguente avveniva, con una piccola probabilità, anche attraverso l'emissione di una coppia di fotoni entangled nel visibile (cascata radiativa). A causa del segnale molto debole (solo una coppia coincidente per ogni milione di coppie) i due fisici impiegarono più di 200 ore di sperimentazione per ottenere risultati significativi. Tuttavia, i risultati furono trovati in accordo con le predizioni della M.Q. e fu osservata una violazione della disuguaglianza di Bell con uno scarto 5 volte superiore alla deviazione standard dei dati sperimentali. I risultati dell'esperimento furono pubblicati nel 1972 [9].
- **Harvard:** R. Holt e F. Pipkin sfruttarono come sorgente la cascata atomica di mercurio (isotopo 200), eccitato da un bombardamento di elettroni. I dati furono accumulati per 150 ore ma i risultati ottenuti furono in contrasto con la M.Q. e quindi in accordo con la disuguaglianza di Bell. Per questo gli autori, forse convinti del contrario, rinunciarono alla pubblicazione ma, nel 1973, distribuirono i risultati tra i colleghi in maniera informale.
- **Houston** Nel 1976 S. Fry e C. Thompson [10] ripeterono l'esperimento con la cascata atomica dello stesso isotopo 200 del mercurio, sfruttando però un migliore schema sperimentale grazie all'impiego di un laser per eccitare gli atomi. Il segnale luminoso ottenuto, di diversi ordini di grandezza maggiore di quello dell'esperimento precedente, permise la raccolta di dati statisticamente rilevanti in soli 80 minuti. I

risultati ottenuti furono in accordo con la M.Q., violando la disuguaglianza di Bell di 4 deviazioni standard.

Dunque, tutti gli esperimenti di prima generazione, meno uno, fornirono risultati in favore della M.Q. e contrari all'alternativa di una teoria a variabili nascoste.

3.2 Gli esperimenti di seconda generazione

Abbiamo già accennato al fatto che gli esperimenti di seconda generazione sono quelli eseguiti nei primi anni '80. I più importanti tra questi sono senz'altro quelli condotti dal fisico francese Alain Aspect e collaboratori tra il 1981 ed il 1982. Aspect decise di realizzare una serie di tre importanti tipi di esperimenti. Il primo tipo coinvolgeva uno schema con polarizzatori a canale singolo e puntava a replicare i risultati ottenuti nelle esperienze di prima generazione in modo più preciso e convincente. Il secondo prevedeva l'utilizzo di polarizzatori cubici a doppio canale, al fine di aumentare notevolmente il numero di coincidenze rivelate e di avvicinarsi alla situazione ideale descritta da Bohm. Il terzo tipo mirava, per la prima volta, a soddisfare la seconda richiesta di John Bell espressa nel paragrafo 3.1.1. riguardo il principio di località, orientando i polarizzatori solo dopo l'emissione dei fotoni dalla sorgente e cercando di scegliere le osservabili da misurare sia in modo casuale sia in modo che non vi fosse comunicazione luminale fra i due sottosistemi.

3.2.1 La sorgente ed il sistema di rivelazione

Aspect utilizzò sempre la stessa sorgente, costituita da una cascata radiativa di atomi di calcio. Indichiamo nella figura seguente il fenomeno di base.

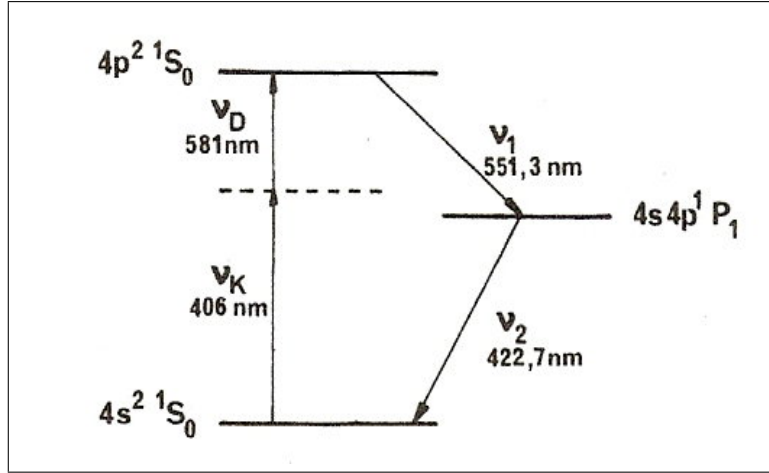


Figura 3.2: *Cascata radiativa di atomi di calcio*

Gli atomi di calcio sono eccitati dallo stato fondamentale $4s^2 1S_0$ al livello energetico superiore $4p^2 1S_0$ attraverso l'assorbimento di due fotoni ν_K e ν_D con lunghezze d'onda rispettivamente di $406nm$ e $581nm$. La cascata radiativa è una conseguenza della diseccitazione degli atomi, che avviene attraverso un livello intermedio $4p^2 1S_0 \rightarrow 4s4p^1 P_1 \rightarrow 4s^2 1S_0$ con l'emissione di due fotoni entangled ν_1 e ν_2 di lunghezze d'onda $551,3nm$ e $422,7nm$ rispettivamente. Lo stato della coppia risultante è caratterizzato da una forte correlazione tra le polarizzazioni dei due fotoni. Per questo possiamo scrivere lo stato entangled che lega i fotoni ν_1 e ν_2 come:

$$|\psi(\nu_1, \nu_2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x, x\rangle + |y, y\rangle) \quad (3.1)$$

dove $|x\rangle$ e $|y\rangle$ sono i due stati di polarizzazione lineare. Inoltre, lo stato intermedio della cascata $4s4p^1 P_1$ ha un tempo di vita media τ_r di $5 ns$, che risulta particolarmente adeguata

to in esperimenti di coincidenze. Infatti, se si raggiunge un rate di eccitazione di circa $1/\tau_r$, allora, con questo tipo di cascata, si ottiene un ottimo rapporto segnale-rumore per misure di coincidenze.

Negli esperimenti, il fascio atomico di calcio era irradiato perpendicolarmente da due fasci laser, focalizzati verso la regione di interazione, approssimativamente pari ad un cilindro lungo $1mm$ (diametro del fascio atomico) e con un diametro di $60\mu m$ (pari a quello del fascio laser). Una densità tipica nella regione di interazione risultava pari a 3×10^{10} atomi/ cm^3 , abbastanza bassa per evitare un riassorbimento dei fotoni emessi. Il primo fascio laser ($\lambda_K = 406,7nm$) era costituito da un modo-singolo di krypton, mentre il secondo fascio ($\lambda_D = 581nm$) era un dye laser luminoso di rodamina ed entrambi venivano regolati in risonanza per favorire il processo a due fotoni di figura 3.2. Infatti, due circuiti phase-lock controllavano sia la lunghezza d'onda del laser di rodamina regolabile per assicurarne il massimo della fluorescenza sia la potenza del fascio di kripton, per ottenere un rate di cascata il più stabile possibile. Con $40mW$ per ogni laser, un rate di cascata tipico era $4 \times 10^7 s^{-1}$ con una stabilità maggiore del 0,5% per diverse ore.

Dunque, la cascata radiativa di atomi di calcio rappresentava una sorgente efficiente, con dimensioni così piccole da semplificare la struttura dell'apparato ottico-elettronico di rivelazione.

Lo schema di base di questo apparato era il seguente: la luce fluorescente veniva raccolta da lenti a grande apertura ($f = 40mm$, $diametro = 50mm$), seguite da un insieme di lenti per la collimazione propria; lungo entrambi i bracci dell'apparato (2 sottosistemi) erano sistemati filtri di selezione ($551,3nm$ e $422,7nm$), sistemi di trasporto ottico, polarizzatori e tubi fotomoltiplicatori. I segnali elettrici prodotti venivano convogliati verso diversi moduli di coincidenza, che includevano un convertitore tempo-ampiezza ed un analizza-

tore multicanale, che produceva lo spettro del tempo di ritardo tra la rivelazione dei due fotoni. Mostriamo nella figura seguente un andamento tipico.

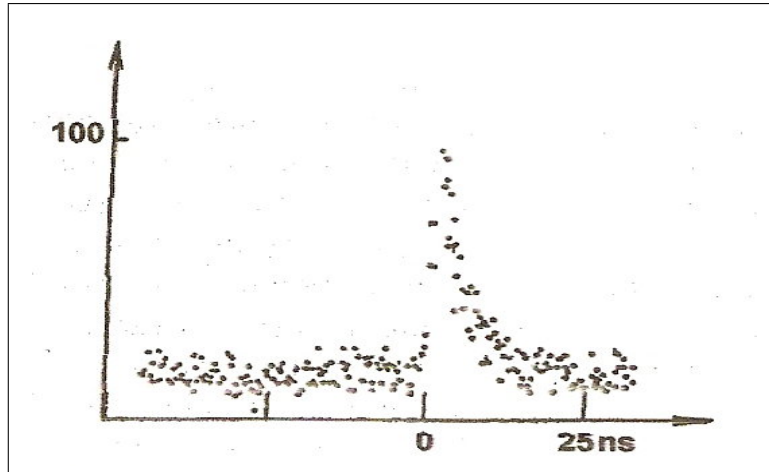


Figura 3.3: *Tipico spettro di ritardo*

Questo spettro presentava un background piano dovuto alle coincidenze accidentali (tra fotoni emessi da differenti atomi) ed un picco, centrato in ritardo nullo, dovuto alle coincidenze vere tra fotoni entangled (emessi dallo stesso atomo), con decadimento esponenziale con costante di tempo $\tau_r = 5ns$ (tempo di vita media dello stato $4s4p^1P_1$). Si ritrovava che il segnale di coincidenze vere misurato era così pari all'area del picco. Tuttavia la struttura sperimentale, in particolare per polarizzatori e moduli elettronici, fu modificata nelle tre serie di esperimenti, per cui analizziamoli uno per volta.

3.2.2 Esperimento con polarizzatori ad un canale

L'apparato del primo esperimento, i cui risultati furono pubblicati nell'agosto 1981, è riportato in figura 3.4. I polarizzatori ad *un canale* I e II erano "piles of plates", cioè composti da dieci lastre ottiche piane di vetro inclinate all'angolo di Brewster, con una ec-

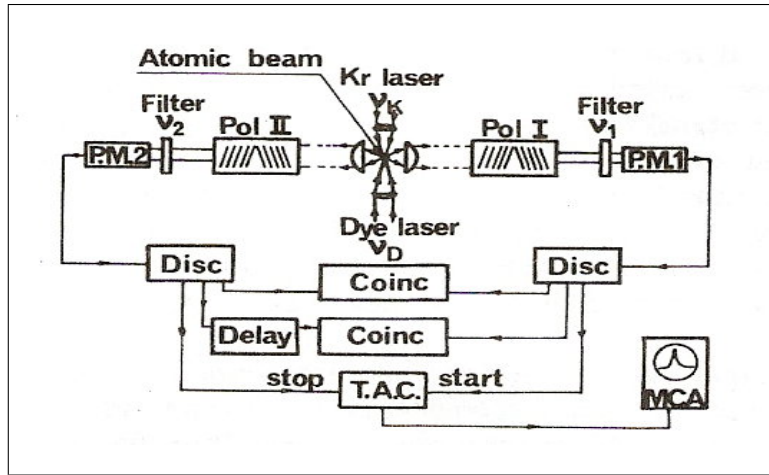


Figura 3.4: *Apparato del primo esperimento*

cellente invarianza rotazionale rispetto all'asse di incidenza dei fotoni ν_1 e ν_2 . I coefficienti di trasmissione massimi ϵ_M^i e minimi ϵ_m^i dei polarizzatori ($i = 1, 2$) per luce polarizzata parallelamente o perpendicolarmente all'asse del polarizzatore furono misurati e trovati pari a: $\epsilon_M^1 = 0,971 \pm 0,005$, $\epsilon_m^1 = 0,029 \pm 0,005$, $\epsilon_M^2 = 0,968 \pm 0,005$ e $\epsilon_m^2 = 0,028 \pm 0,005$. Tutti gli elementi ottici consecutivi erano completamente antiriflettenti ed i filtri di selezione sui due canali ($551,3nm$ e $422,7nm$) evitavano la riflessione di fotoni all'indietro o verso l'altro canale. I fotomoltiplicatori successivi, P.M.1 e P.M.2, possedevano correnti di buio (pari a meno di 200 conteggi per secondo a 20C) trascurabili rispetto ai singoli rates di conteggio tipici (40000 e 120000 conteggi per secondo). I segnali erano convogliati verso un convertitore tempo-ampiezza ed un analizzatore a multicanale che forniva lo spettro dei ritardi temporali tra i due segnali. Inoltre, un modulo di coincidenza con una larghezza di sovrapposizione pari a $19ns$ calcolava il rate di coincidenze intorno all'intervallo di delay nullo, mentre un secondo canale di coincidenza, essendo applicato un ritardo di $100ns$ al segnale di sinistra (modulo di delay in figura 3.4), misurava le eventuali coincidenze accidentali. Il rate di coincidenze vere si otteneva dalla sottrazione fra le due quantità con

un risultato pari all'area del picco dello spettro di delay-time. Come si legge nell'articolo [6], le rates di coincidenze tipiche, senza i polarizzatori inseriti, erano 240 al secondo nel canale a delay nullo e 90 nel canale per le coincidenze accidentali; dunque, per un periodo di conteggio di 100 s, si ottenevano 150 coincidenze vere al secondo con una deviazione standard minore di 2 coincidenze al secondo: dati, quindi, statisticamente rilevanti. I polarizzatori erano a canale singolo, cioè trasmettevano la luce polarizzata parallelamente all'asse ottico, bloccando quella ortogonale. Pertanto, potevano essere misurate direttamente solo le coincidenze derivanti da fotoni polarizzati entrambi parallelamente rispetto agli assi dei relativi polarizzatori. Perciò, i fotoni che non entravano nel canale singolo o colpivano il polarizzatore ma, non presentando polarizzazione parallela, non lo attraversavano, oppure mancavano del tutto l'ingresso nell'analizzatore di polarizzazione. Per recuperare i dati persi, nel primo esperimento furono effettuate misure ausiliarie di coincidenze, effettuate con uno o entrambi i polarizzatori rimossi dall'apparato. In queste condizioni sperimentali sussisteva il *teorema di Bell generalizzato o di CHSH* [8], che non dimostriamo, che conduceva alle seguenti disuguaglianze:

$$-1 \leq S = [R(\vec{a}, \vec{b}) - R(\vec{a}, \vec{b}') + R(\vec{a}', \vec{b}) + R(\vec{a}', \vec{b}') - R_1(\vec{a}') - R_2(\vec{b})]/R_0 \leq 0 \quad (3.2)$$

dove S è una quantità equivalente al primo membro della disuguaglianza di Bell descritta nel secondo capitolo (2.38), $R(\vec{a}, \vec{b})$ è il rate di coincidenze con il polarizzatore I nell'orientazione \vec{a} ed il polarizzatore II nell'orientazione \vec{b} , $R_1(\vec{a}')$ è il rate di coincidenza con il polarizzatore II rimosso ed il I orientato lungo \vec{a}' (e similmente per $R_2(\vec{b})$), e R_0 è il rate di coincidenze con entrambi i polarizzatori rimossi. Dunque, la (3.2) rappresenta una disuguaglianza di Bell, che Aspect e collaboratori testarono in questo primo esperimento.

D'altro canto, la M.Q. prevedeva:

$$R(\phi)/R_0 = \frac{1}{4}(\epsilon_M^1 + \epsilon_m^1)(\epsilon_M^2 + \epsilon_m^2) + \frac{1}{4}(\epsilon_M^1 - \epsilon_m^1)(\epsilon_M^2 - \epsilon_m^2)F(\theta) \cos 2\phi \quad (3.3)$$

$$R_i/R_0 = \frac{1}{2}(\epsilon_M^i - \epsilon_m^i) \quad i = 1, 2$$

dove $\phi = (\vec{a}, \vec{b})$ è l'angolo relativo tra le orientazioni dei polarizzatori e $F(\theta)$ tiene conto degli angoli solidi sottesi dalle lenti di raccolta e, nel caso in questione, risultava pari a 0,984. Una massima violazione della disuguaglianza era prevista per le orientazioni in figura (22,5 e 67,5).

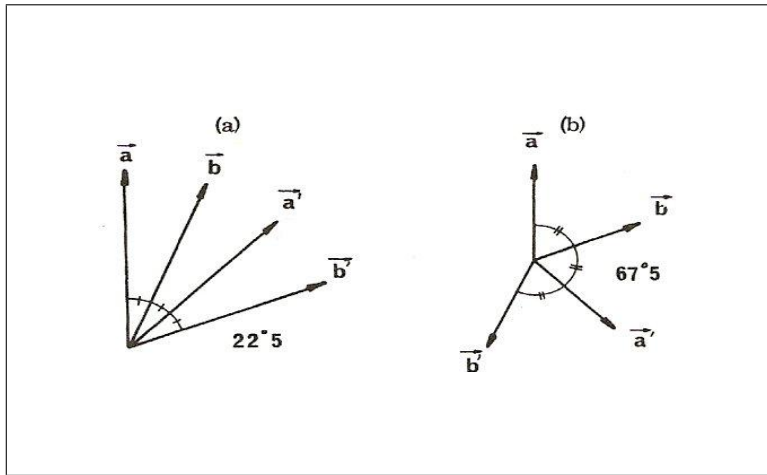


Figura 3.5: *Orientazioni di massima violazione*

La quantità S fu misurata per la prima di queste orientazioni e fu ottenuto un valore di:

$$S_{sper} = 0,126 \pm 0,014 \quad (3.4)$$

che violava la disuguaglianza (3.2) di 9 deviazioni standard, dove quest'ultima era stimata assumendo una legge Poissoniana sui conteggi. Tale risultato era in pieno accordo con le predizioni della M.Q. $S_{teor} = 0,118 \pm 0,005$. Furono inoltre misurate le quantità R_0 ed $R(\phi)$ per ogni angolo e per numerosi periodi di 100 s; la dispersione dei risultati, in accordo

con una legge poissoniana, mostrò che la stabilità della sorgente era in realtà maggiore dello 0,5% e che le misure ottenute si accordavano chiaramente con le predizioni della M.Q. nell'equazione (3.3) come si osserva nel grafico tratto dall'articolo originale [11].

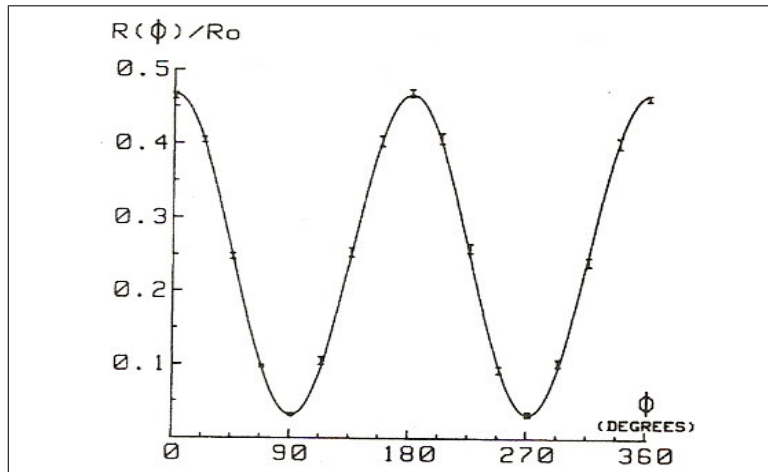


Figura 3.6: *Rate di coincidenze normalizzato in funzione dell'orientazione relativa tra i polarizzatori secondo le predizioni della M.Q.*

Infine, furono ripetute le stesse misure con i polarizzatori spostati ciascuno di 6,5 m dalla sorgente, per rendere gli eventi di rivelazione causalmente disconnessi soddisfacendo la prima delle condizioni di Bell esposte nel precedente paragrafo. L'assenza di variazioni nei risultati fece concludere che non solo si manifestava un ottimo accordo con le predizioni della M.Q. ma anche che la distanza tra i polarizzatori non aveva effetti sulle misure di correlazione.

3.2.3 Esperimento con polarizzatori a due canali

Il secondo esperimento, i cui risultati furono pubblicati nel luglio 1982 [12], riproduceva in maniera molto più vicina l'esperimento ideale di Bohm che riportiamo nuovamente in figura 3.7.

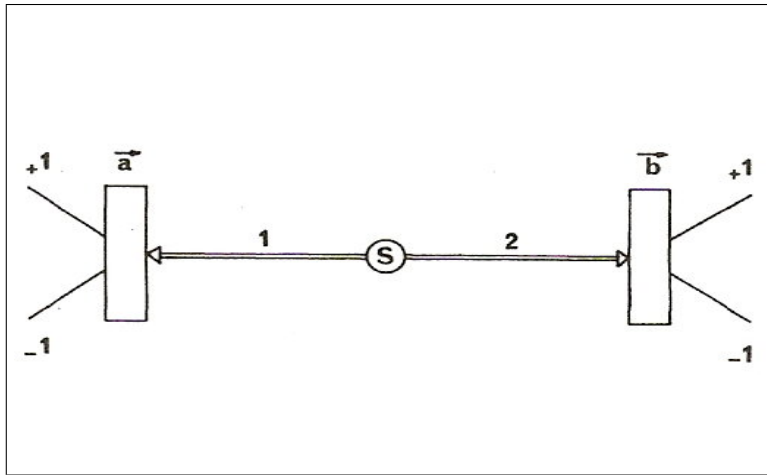


Figura 3.7: *Schema di Bohm idealizzato per fotoni*

Questo fu possibile grazie all'utilizzo di polarizzatori a doppio canale. Essi infatti, producevano un risultato di $+1$ o -1 a seconda che il fotone incidente fosse polarizzato parallelamente o perpendicolarmente rispetto all'asse del polarizzatore in maniera molto simile ai risultati delle misure di spin con apparati di Stern-Gerlach di cui abbiamo ampiamente parlato nel capitolo precedente. Dunque era possibile calcolare tutti i rates di coincidenze necessari $R_{\pm\pm}(\vec{a}, \vec{b})$, dove \vec{a} e \vec{b} indicano le orientazioni e i due (\pm) i possibili risultati delle due misure (± 1) . A questo scopo fu utilizzato l'apparato in figura:

I polarizzatori erano cubici, costituiti da due prismi tenuti insieme da sottili pellicole di materiale dielettrico. Il cubo I trasmetteva la luce polarizzata nel piano di incidenza attraverso l'ipotenusa attiva (polarizzazione parallela ad \vec{a}), mentre rifletteva la componente ortogonale (polarizzazione perpendicolare). Il cubo II lavorava alla stessa maniera. Quindi, i coefficienti di trasmissione e riflessione alla luce parallela (\parallel) o perpendicolare (\perp) che indichiamo con T^{\parallel} , R^{\perp} , T^{\perp} e R^{\parallel} furono misurati, ottenendo i risultati:

$$T_1^{\parallel} = R_1^{\perp} = 0,950 \quad T_1^{\perp} = R_1^{\parallel} = 0,007 \quad (3.5)$$

$$T_2^{\parallel} = R_2^{\perp} = 0,930 \quad T_2^{\perp} = R_2^{\parallel} = 0,007 \quad (3.6)$$

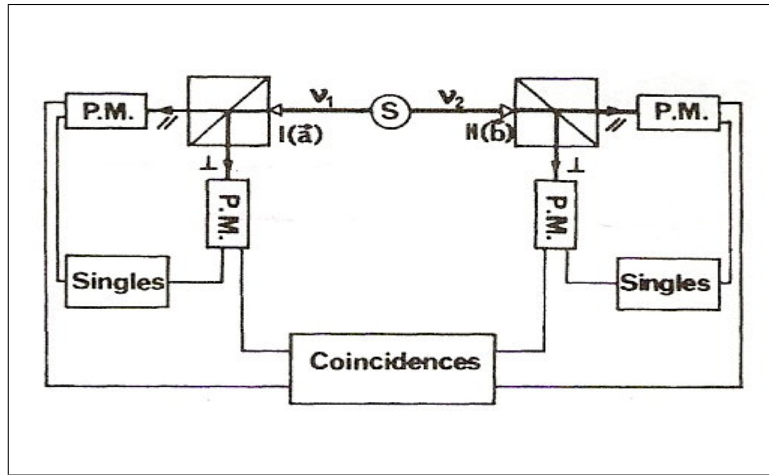


Figura 3.8: *Apparato del secondo esperimento*

Ogni polarizzatore era inoltre montato su un meccanismo rotante connesso ad un fotomoltiplicatore; essi, insieme, costituiscono un apparecchio chiamato polarimetro. Inoltre, i guadagni dei fotomoltiplicatori furono stabiliti per eguagliare le efficienze di rivelazione nei due canali (2×10^{-3} a $422nm$, 10^{-3} a $551nm$) e le correnti di buio erano di due ordini di grandezze inferiori alle correnti anodiche. L'altro innesto fondamentale era costituito dal modulo elettronico di coincidenza quadrupla, che includeva quattro circuiti di coincidenza overlap-type, uno per ogni possibile combinazione di risultati. Le coincidenze accidentali furono invece ricavate da conteggi singoli effettuati con due moduli elettronici aggiuntivi come nella figura, metodo giustificato dalla grande stabilità della sorgente. Sottraendo le accidentali alle totali, si ottenevano i quattro rates di coincidenze reali. Dunque, attraverso la tecnica di coincidenza quadrupla, Aspect e collaboratori poterono calcolare in una singola misura, di durata $100s$, i rates delle quattro possibili coincidenze $R_{\pm\pm}(\vec{a}, \vec{b})$, ottenendo *direttamente* il coefficiente di correlazione per le misure lungo \vec{a} e \vec{b} :

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{R_{++}(\vec{a}, \vec{b}) + R_{--}(\vec{a}, \vec{b}) - R_{+-}(\vec{a}, \vec{b}) - R_{-+}(\vec{a}, \vec{b})}{R_{++}(\vec{a}, \vec{b}) + R_{--}(\vec{a}, \vec{b}) + R_{+-}(\vec{a}, \vec{b}) + R_{-+}(\vec{a}, \vec{b})} \quad (3.7)$$

analogo al (2.31). Nel primo esperimento, invece, era stato misurato *indirettamente* attraverso misure ausiliarie. Allora bastava ripetere lo stesso calcolo per le altre orientazioni (a, b) , (a', b) e (a', b') e testare direttamente la disuguaglianza di Bell (2.38). Una tale procedura permise agli sperimentatori non solo di eliminare possibili errori sistematici (ad esempio nella rimozione dei polarizzatori per misure ausiliarie) ma anche di controllare più parametri sperimentali. Ad esempio, la somma delle quattro rates di coincidenze $R_{\pm\pm}(\vec{a}, \vec{b})$ fu misurata e risultò indipendente dall'orientazione dei polarizzatori, per cui la dimensione del campione selezionato fu trovata costante ($80s^{-1}$). Furono effettuate cinque serie di misure per le orientazioni di figura 3.5 ottenendo il risultato:

$$S_{\text{per}} = E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{b}') + E(\vec{a}', \vec{b}) + E(\vec{a}', \vec{b}') = 2,697 \pm 0,015 \quad (3.8)$$

dove l'incertezza indicata è la standard deviation che fu misurata tenendo conto della legge di Poisson nei conteggi dei fotoni. La violazione della disuguaglianza di Bell (2.38) attraverso il risultato (3.8) è pari all'83% della massima violazione prevista dalla M.Q. con polarizzatori ideali.

3.2.4 Timing-experiment

Sebbene altamente ragionevole, la condizione di località non è espressa esplicitamente da alcuna legge fisica. Pertanto, come abbiamo visto nel primo paragrafo, John Bell insistette sull'importanza di effettuare un esperimento in cui le orientazioni degli apparati di misura (Stern-Gerlach o polarizzatori) fossero modificati *casualmente* e *con ritardo* durante il volo delle particelle. Infatti, in un tale schema sperimentale, chiamato "timing-experiment", si evita ogni possibile influenza più rapida della luce fra i due apparati di misura e la condizione di località equivale alla causalità einsteniana.

Il terzo esperimento di Alain Aspect fu progettato con l'obiettivo di soddisfare questa richiesta. Riportiamo di seguito l'apparato sperimentale.

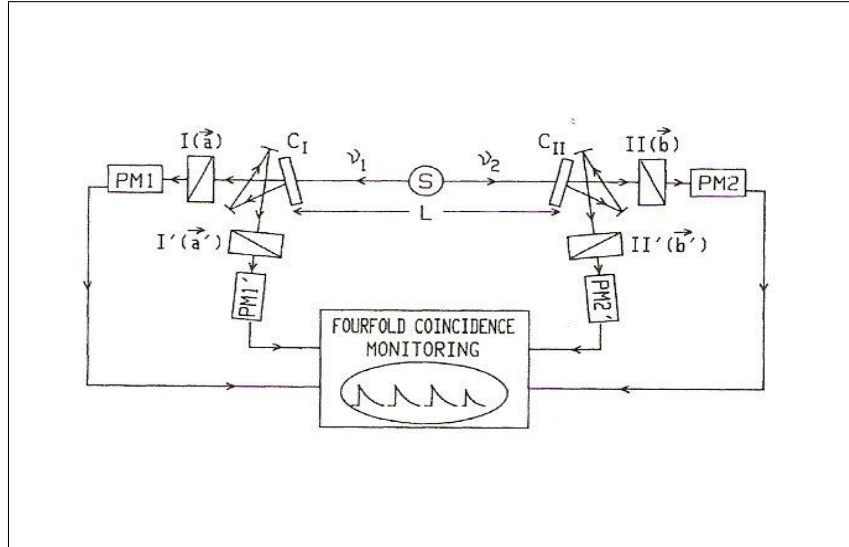


Figura 3.9: *Apparato del terzo esperimento*

Rispetto agli esperimenti precedenti, i polarizzatori furono sostituiti da due apparati che comprendevano uno strumento di deviazione del fascio incidente e due polarizzatori a canale singolo in differenti orientazioni: \vec{a} e \vec{a}' sul lato I, \vec{b} e \vec{b}' sul lato II. La sorgente era sempre la stessa (cascata radiativa) ed emetteva i fotoni entangled ν_1 e ν_2 . La deviazione dei fotoni verso uno dei due polarizzatori su entrambi i lati avveniva grazie a strumenti basati sull'interazione ottica-acustica della luce con un'onda ultrasonica stazionaria in acqua. Come mostrato nella figura seguente, l'angolo di incidenza era uguale all'angolo di Bragg, $\theta_b = 5 \times 10^{-3} rad$. Dunque, la luce veniva completamente trasmessa quando l'ampiezza dell'onda stazionaria era nulla e ciò avveniva due volte in un periodo acustico. Un quarto di periodo successivo, l'ampiezza dell'onda era massima e la luce veniva deflessa di $2\theta_b$. Inoltre, l'onda stazionaria si otteneva dall'interferenza di due onde acustiche prodotte da due trasduttori elettro-acustici pilotati in fase con frequenze diverse nei due

sottosistemi. Allora, il cambiamento di orientazione dei due fasci emessi avveniva dopo intervalli di tempo differenti, pari a 6, 7ns e 13, 33ns per i lati I e II rispettivamente. Questi intervalli, così come il tempo di vita media del livello intermedio della cascata(5ns), sono piccoli rispetto a L/c (43 ns) dove $L = 13m$ è la distanza tra gli strumenti di deviazione e $c = 3 \times 10^8 m/s$ è la velocità della luce. Dunque, un evento di rivelazione su un lato ed il corrispondente cambio di orientazione sull'altro lato risultavano causalmente ovvero spazio-temporalmente disconnessi, assicurando la validità di base del principio di località. L'unico aspetto divergente dalle condizioni poste da Bell consisteva nel carattere *quasi-periodico* e non *casuale* della deviazione dei due fasci luminosi ovvero della variazione dell'orientazione dei polarizzatori. Il sistema di monitoraggio era nuovamente costituito da un apparato di conteggio quadruplo, da un convertitore tempo-ampiezza e da un analizzatore multicanale, che (figura 3.3), stavolta, produceva quattro singoli spettri time-delay. Allora, in queste nuove condizioni sperimentali, era possibile applicare il teorema di Bell generalizzato con una disuguaglianza nella forma simile alla (3.3) $-1 \leq S \leq 0$ dove:

$$S = \frac{N(\vec{a}, \vec{b})}{N(\infty, \infty)} - \frac{N(\vec{a}, \vec{b}')}{N(\infty, \infty')} + \frac{N(\vec{a}', \vec{b})}{N(\infty', \infty)} + \frac{N(\vec{a}', \vec{b}')}{N(\infty', \infty')} - \frac{N(\vec{a}', \infty)}{N(\infty', \infty)} - \frac{N(\infty, \vec{b})}{N(\infty, \infty)}. \quad (3.9)$$

Dunque, la quantità misurabile S , comprendeva:

- le quattro rates di coincidenza $[N(\vec{a}, \vec{b}), N(\vec{a}', \vec{b}), \text{etc.} \dots]$ ottenute in una singola misura;
- le quattro rates di coincidenza $[N(\infty, \infty), N(\infty', \infty), \text{etc.} \dots]$ ottenute con tutti i polarizzatori rimossi;
- le due rates di coincidenza $[N(\vec{a}', \infty), N(\infty, \vec{b})]$ ottenute con un polarizzatore rimosso da un lato o dall'altro.

Gli ultimi due gruppi di misura furono effettuati in misure ausiliarie come nel primo esperimento. Dunque, come si evince dall'articolo originale del dicembre 1982 [8], un processo di misura totale durava tipicamente 12000s, comprendendo un totale di 4000s con i quattro polarizzatori stabili, 4000s con i polarizzatori rimossi ed altri 4000s con un polarizzatore rimosso su ogni lato. Inoltre, per ridurre gli errori sistematici, l'accumulazione dei dati era alternata tra queste tre configurazioni ogni 400s circa. Le serie di misura furono allora effettuate per le ormai solite angolazioni di 22,5 e 67,5 (figura 3.5) e fu ottenuto un valor medio della quantità S pari a :

$$S_{\text{per}} = 0,101 \pm 0,020 \quad (3.10)$$

che violava la disuguaglianza (3.9) di 5 deviazioni standard ed in ottimo accordo, per gli angoli e le efficienze in gioco, con il valore teorico di 0,112.

Dunque, dopo la terza violazione della disuguaglianza di Bell, augurandosi la realizzazione di un esperimento in cui la variazione delle orientazioni dei polarizzatori fosse davvero casuale e non semiperiodica, Aspect concluse l'articolo [13] con le seguenti parole: *tuttavia, le violazioni delle disuguaglianze di Bell osservate indicano che l'accuratezza sperimentale era abbastanza buona per manifestare una ipotetica discrepanza con le predizioni della meccanica quantistica. Nessun effetto del genere è stato osservato.* Pertanto, la terza serie di esperimenti presentava una componente dinamica di notevole importanza, che andava ad aggiungersi alla potenza dell'intera serie di risultati positivi fin lì ottenuti a favore della teoria dei quanti e dava il suo importante contributo a stabilire che l'*entanglement* non locale è un fenomeno quantistico reale e viene "preservato" anche ad una distanza di 13 metri.

A partire dalla fine degli anni '80, si sono sviluppate nuove tecniche di produzione di particelle entangled e migliori tecnologie di trasporto ottico, che hanno permesso l'esecuzione di

nuovi esperimenti con maggiori estensioni spaziali (decine di Km) e migliore accuratezza. Tuttavia, tralasciamo la descrizione analitica di questi esperimenti di terza generazione, limitandoci a dire che il susseguirsi di esiti sperimentali concordi con la M.Q. ha portato a ritenere definitivamente l'entanglement come un fenomeno non descrivibile in termini di realismo locale: *una coppia di particelle entangled deve essere vista come un oggetto globale singolo, che non possiamo suddividere spazio-temporalmente in sottosistemi con proprietà ben definite.*

3.3 L'utilità dell'inutile

L'entanglement è una delle proprietà dei sistemi quantistici individuate principalmente, per la prima volta, sulla base di considerazioni matematiche. Pertanto, rappresenta un esempio del potente ruolo che assumono la matematica e la fisica teorica nella nostra comprensione del mondo. Abbiamo visto come John Bell sia pervenuto, attraverso dimostrazioni matematiche, alla formulazione di disuguaglianze testabili sperimentalmente, che hanno permesso di verificare direttamente la natura delle leggi cui obbediscono i sistemi quantistici. Gli esperimenti condotti sino ad oggi hanno verificato accuratamente la natura non locale del mondo quantistico, l'esistenza e le conseguenze sperimentali dell'entanglement. Tuttavia, fino all'inizio degli anni '90, tutti gli scienziati erano convinti che queste ricerche fossero lontane da qualsiasi utilizzo pratico, che si trattasse solo di attività concernenti i fondamenti della fisica, apparentemente "inutili", seppur intellettualmente pregevoli e di grande interesse. Il fisico Anton Zeilinger, uno dei pionieri in questo settore, scrive [15] che, a chi gli chiedeva a cosa servissero le sue ricerche, rispondeva: "da un punto di vista pratico, questi lavori non servono a niente, non hanno senso,

proprio come una tragedia di Shakespeare o la nona sinfonia di Beethoven, che allo stesso modo non sono certo giustificabili per la loro utilità tecnica. Eppure l'uomo fa queste cose. C'è chi compone musica, chi scrive drammi e poesie e, per l'appunto, chi fa esperimenti per verificare i principi della fisica quantistica". Tuttavia, negli anni '90 sono subentrate nuove prospettive per l'utilizzo pratico di queste ricerche, soprattutto nel campo della trasmissione e dell'elaborazione delle informazioni. L'entanglement, insieme ad alcuni postulati quantistici, è diventato una risorsa da utilizzare al fine di superare le capacità classiche in diversi campi di applicazione. Tra questi, i principali sono la *comunicazione* e la *computazione quantistica*. La prima consiste nella trasmissione di messaggi con metodi che utilizzano le proprietà quantistiche dei sistemi ed il campo tecnicamente più avanzato in questo settore è la *crittografia quantistica*, nella quale si utilizzano particolari stati, anche entangled, per trasmettere messaggi a prova di intercettazione. La *computazione o informazione quantistica*, invece, comprende lo studio e l'applicazione delle tecniche di calcolo che utilizzano i quanti per memorizzare ed elaborare le informazioni. Molte sono le differenze con l'informatica classica, soprattutto nei principi fondamentali. Tuttavia, nella nostra trattazione, ci limitiamo a descrivere alcuni tratti della *crittografia quantistica*.

3.4 La crittografia quantistica

La crittografia è quel complesso di tecniche che servono a creare e trasmettere messaggi in codice in modo tale che un lettore non autorizzato non li possa decifrare. Oltre alle note applicazioni belliche, al giorno d'oggi è soprattutto il mondo dell'economia e della finanza a fare uso di messaggi in codice; ogni banca è interessata ad evitare, ad esempio, che le proprie transazioni siano note alla concorrenza. È possibile trovare numerose esigenze

del genere e sarebbe parecchio dannoso che documenti importanti di ogni tipo fossero accessibili a tutti. Le origini della crittografia risalgono a più di 2000 anni fa; un primo esempio si ritrova nella guerra di Gallia condotta da Giulio Cesare che utilizzò il noto “codice di Cesare” in cui, nei messaggi segreti, ogni lettera dell’alfabeto era traslata di un numero fisso di salti. Ad esempio, se stabiliamo uno spostamento di quattro posizioni ($A \rightarrow E$, $B \rightarrow F$, $C \rightarrow G$, ecc. . . .) la frase “SONO AL MARE” in codice diventa “ZSRS EP QEVI”. Oggi si tratta di un codice ovviamente molto semplice da decifrare. Bisogna arrivare ai primi del novecento per trovare il primo ed unico cifrario perfetto (di cui quindi è stata dimostrata matematicamente l’indecifrabilità), realizzato da Vernam. La meccanica quantistica si inserisce in questo campo permettendo, grazie ai suoi principi (quali il principio di indeterminazione), la totale indecifrabilità dei codici o, per lo meno, la scoperta semplice e diretta di eventuali intercettazioni.

3.4.1 Il codice di Vernam

Nel 1917 Gilbert Vernam inventò il primo codice indecifrabile, anche se la dimostrazione matematica di tale indecifrabilità fu eseguita solo trent’anni più tardi da Shannon. Il protocollo di Vernam, ovvero l’insieme delle fasi da seguire per la creazione del codice, è il seguente:

- (i) il testo del messaggio che si vuole inviare va scritto attraverso una sequenza di cifre binarie 0 ed 1;
- (ii) la *chiave segreta* è una sequenza totalmente casuale di cifre binarie della stessa lunghezza del messaggio;

(iii) il testo in codice è ottenuto sommando la chiave segreta al testo del messaggio.

Consideriamo il semplice esempio:

$$\begin{array}{ll} 001010011 & \text{testo del messaggio} \\ 100111010 & \text{chiave segreta} \\ 101101001 & \text{testo in codice} \end{array} \quad (3.11)$$

Il codice è indecifrabile poiché, essendo la chiave segreta completamente casuale, risulta tale anche il testo cifrato: quest'ultimo non fornisce alcuna informazione sul testo del messaggio. Solo il destinatario del testo cifrato, che condivide la chiave segreta con il mittente, può ricavare il testo del messaggio attraverso un'operazione inversa alla (3.11), cioè sottraendo la chiave segreta al testo in codice. Un'altra condizione fondamentale del cifrario di Vernam consiste nella non riutilizzabilità della chiave segreta, che va sfruttata una sola volta. Infatti, se si utilizza la stessa chiave per mandare due messaggi diversi, un abile intercettatore potrebbe sommare i due testi cifrati, ottenendo un risultato pari alla somma dei messaggi originari. Poiché questi sono costituiti da sequenze binarie non casuali, il codice potrebbe essere decifrato sfruttando le eventuali ridondanze. Quindi, assicurandosi che la chiave sia sempre diversa, il problema principale della crittografia non è la trasmissione del testo cifrato, ma la distribuzione della chiave segreta. Da un punto di vista classico, un intercettatore potrebbe trovare il modo di copiare la chiave senza lasciare alcuna traccia della sua azione. Dunque, mittente e destinatario del messaggio che, sulla scia delle analisi dei precedenti capitoli, chiamiamo Alice e Bob, non potranno mai essere sicuri della segretezza della loro chiave. Grazie alle proprietà della M.Q., la *crittografia quantistica* risolve il problema ed offre diverse tecniche (o protocolli) per trasmettere e memorizzare una chiave segreta con sicurezza assoluta.

3.4.2 Il teorema di no-cloning

Un bit di informazione classico gode di una proprietà ben nota: può essere copiato (macchine fotocopiatrici, ecc...). Diversamente, gli stati quantistici (qubits) godono di una proprietà fondamentale che consiste nell'impossibilità di essere clonati e che è alla base della crittografia quantistica. Il postulato 3 (riduzione del vettore di stato), enunciato nel primo capitolo, evidenzia il carattere prettamente probabilistico della meccanica quantistica e dei processi di misura. Quando viene misurata l'osservabile di un sistema fisico, indicato dal generico ket $|\psi\rangle$, questo collassa in uno degli autostati corrispondenti agli autovalori a_n , ottenibili con probabilità date dalla (1.52). Ora, se il sistema quantistico rappresenta la chiave crittografica, questa non può essere decodificata se non attraverso un processo di misura, che, come abbiamo visto, modificherebbe inevitabilmente il sistema ovvero la chiave, peraltro in maniera del tutto casuale ed incontrollabile. Un'eventuale intercettazione sarebbe certamente rilevata. Su questa considerazione si basa il *teorema di no-cloning* di Dieks, Wootters e Zurek, per cui l'informazione quantistica non può essere copiata con fedeltà assoluta. Tralasciamo la dimostrazione ma consideriamo un esempio pratico in cui lo stato quantistico è lo stato di polarizzazione di un fotone. Indichiamo gli stati di base con $|0\rangle$ per polarizzazione orizzontale e $|1\rangle$ per polarizzazione verticale. Un fotone può essere polarizzato anche lungo una generica direzione che forma un angolo β con l'orizzontale. In figura 3.10 indichiamo con x l'asse orizzontale, con y l'asse verticale e con z la direzione di propagazione del fotone.

In questo caso, lo stato di polarizzazione è indicato dal ket:

$$|\psi\rangle = \cos \beta |0\rangle + \sin \beta |1\rangle \quad (3.12)$$

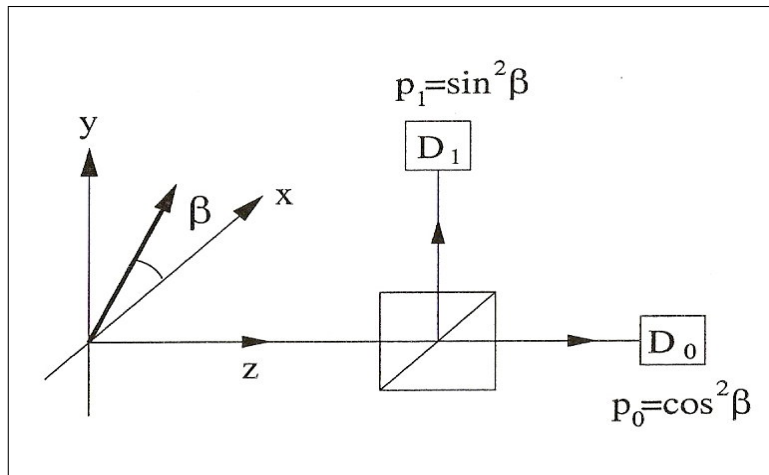


Figura 3.10: *Misura dello stato di polarizzazione di un fotone*

Se il fotone è inviato verso un polarizzatore, come un cristallo di calcite, allora emerge dall'analizzatore con polarizzazione orizzontale o verticale; nel primo caso esso è trasmesso lungo la direzione di incidenza, nel secondo è deflesso di 90. Questi risultati mutuamente esclusivi, si ottengono con probabilità $p_0 = |\langle 0 | \psi \rangle|^2 = \cos^2 \beta$ e $p_1 = |\langle 1 | \psi \rangle|^2 = \sin^2 \beta$ rispettivamente. Pertanto, una misura del fotone incidente fornisce un singolo stato di polarizzazione ($|0\rangle$ o $|1\rangle$). Una eventuale macchina di clonazione dello stato $|\psi\rangle$ potrebbe acquisire numerose copie dello stato in questione in modo da ottenere l'angolo β con accuratezza arbitrariamente piccola. Abbiamo visto, però, che dal processo di misura possiamo ottenere solo un singolo "bit" di informazione, ma non riprodurre interamente lo stato $|\psi\rangle$. Dobbiamo concludere, sulla base del terzo postulato della M.Q., che *non è possibile clonare uno stato quantistico*. Tuttavia, è essenziale considerare uno stato generico come $|\psi\rangle$, sovrapposizione degli stati $|0\rangle$ ed $|1\rangle$; infatti, se un fotone venisse preparato appositamente in uno dei due stati ortogonali, allora potremmo misurare con certezza tale stato e crearne quante copie volessimo. Tuttavia una chiave quantistica di stati generici risulta praticamente indecifrabile ed ogni tentativo di intrusione porterebbe

alla distruzione della chiave stessa.

Riportiamo di seguito due protocolli che permettono a due comunicatori, Alice e Bob, di creare una sicura chiave quantistica usando le regole della M.Q. e soddisfacendo i criteri di Vernam.

3.4.3 Il protocollo BB84

Il protocollo BB84, ideato da Bennett e Brassard nel 1984, richiede *quattro stati quantistici e due alfabeti binari*:

$$\begin{aligned} & |0\rangle \quad |1\rangle \quad (\text{alfabeto } z) \quad (3.13) \\ |0_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad |1_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \quad (\text{alfabeto } x) \end{aligned}$$

Ovviamente questi ket rappresentano gli autostati delle matrici di Pauli σ_z e σ_x già incontrate. Seguono le istruzioni per creare una chiave sicura (*raw key*):

1. Alice genera una sequenza casuale di cifre binarie (0 ed 1);
2. Alice trasforma ogni bit in un qubit (bit quantistico), $|0\rangle$ o $|0_x\rangle$ in corrispondenza del bit 0, $|1\rangle$ o $|1_x\rangle$ in corrispondenza del bit 1. Per ogni bit, la scelta tra alfabeto x o alfabeto z è del tutto casuale (ad esempio attraverso il lancio di una moneta);
3. la stringa di qubit risultanti viene inviata da Alice a Bob;
4. per ogni qubit, Bob decide casualmente quale asse (alfabeto) utilizzare per la misura, x o z . Nel primo caso misura la componente di spin lungo la direzione x , nel secondo lungo z . Se l'asse scelto coincide con l'alfabeto selezionato da Alice, allora Alice e Bob condividono lo stesso bit; viceversa, se Bob sceglie l'asse corrispondente

all'alfabeto scartato da Alice, il bit risultante coincide nella metà dei casi. Per esempio, se Bob riceve il qubit $|1_x\rangle$ e misura σ_z , può ottenere con pari probabilità 0 o 1;

5. Bob comunica su un canale pubblico quale alfabeto ha utilizzato per ogni qubit misurato; ovviamente non comunica i risultati di queste misure;
6. allo stesso modo Alice comunica a Bob l'alfabeto scelto per ogni qubit trasmesso;
7. Alice e Bob cancellano tutti i bit corrispondenti alla scelta di alfabeti differenti ed ottengono in questo modo una chiave quantistica sicura.

Riportiamo in tabella un esempio dei passaggi fondamentali:

Bits Alice	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1
Alfabeti Alice	x	z	x	z	x	x	x	z	z	x
Qubits trasmessi	$ 1_x\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0_x\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1_x\rangle$	$ 1_x\rangle$	$ 0_x\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1_x\rangle$
Alfabeti Bob	x	z	x	x	z	x	z	x	z	z
Risultati misure	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
Bits Bob	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
Raw Key	1	0	0			1			0	

Notiamo che la validità del protocollo BB84 è basata sul principio di indeterminazione di Heisenberg (1.64) e sul teorema di no-cloning esposto precedentemente. Il primo influisce sulla scelta di osservabili non commutative quali le matrici di Pauli σ_z e σ_x (1.61), per cui un eventuale intruso non potrebbe misurare insieme le polarizzazioni lungo x e z . Il secondo fa sì che tali misure modifichino irreversibilmente gli stati inviati da Alice.

3.4.4 Il protocollo E91

Discutiamo ora il protocollo E91, ideato da Ekert nel 1991, che utilizza stati quantistici entangled.

1. Una sorgente S emette coppie di particelle di spin $1/2$ (qubits) nello stato di singoletto o EPR:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle). \quad (3.14)$$

I qubits sono inviati in opposte direzioni; il primo è ricevuto da Alice, il secondo da Bob come è mostrato schematicamente in figura.

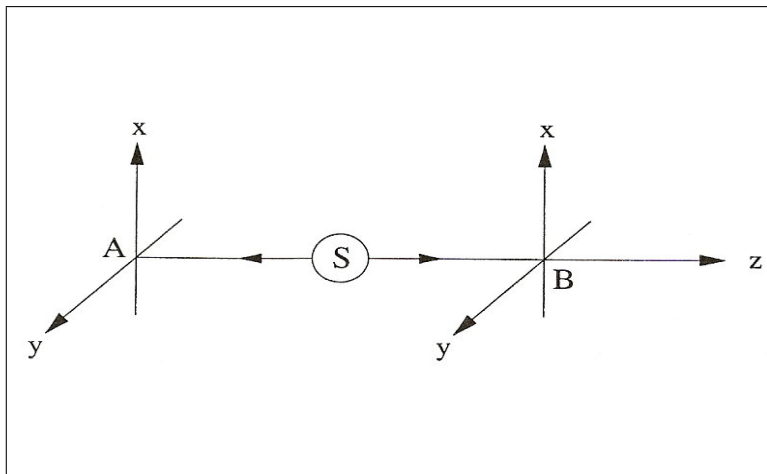


Figura 3.11: *Immagine schematica del protocollo E91*

Una terza parte non è strettamente necessaria, infatti Alice stessa può produrre lo stato EPR ed inviare una delle particelle di ogni coppia a Bob;

2. Alice e Bob possono scoprire se qualcuno ha intercettato la trasmissione delle particelle sfruttando l'entanglement e la correlazione quantistica. Essi misurano le componenti di spin lungo una fra tre direzioni: a_1, a_2, a_3 per Alice e b_1, b_2, b_3 per

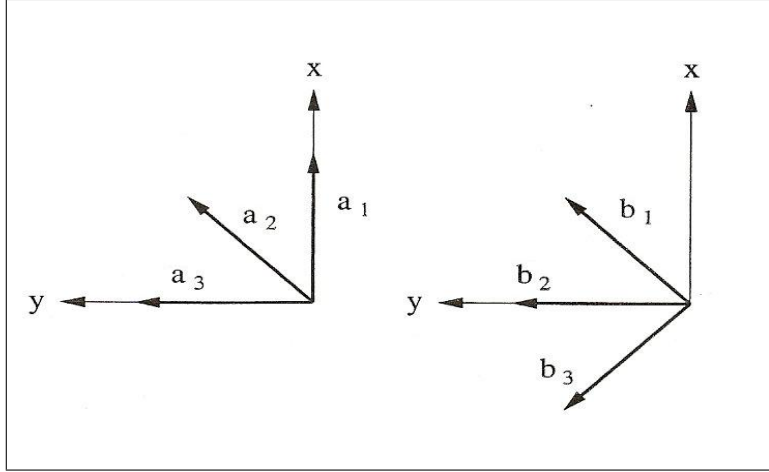


Figura 3.12: *Direzioni di misura per Alice e Bob. Gli angoli tra queste direzioni e l'asse x sono $0, \pi/4, \pi/2$ per a_1, a_2, a_3 e $\pi/4, \pi/2, 3\pi/4$ per b_1, b_2, b_3*

Bob (Figura).

La scelta avviene in maniera casuale per entrambi. Denotiamo con $p_{\pm\pm}(a_i, b_j)$ la probabilità che il risultato della misura di Alice lungo a_i sia ± 1 e che quello di Bob lungo b_j sia ± 1 ($i, j = 1, 2, 3$). Definiamo i coefficienti di correlazione:

$$E(a_i, b_j) = p_{++}(a_i, b_j) + p_{--}(a_i, b_j) - p_{+-}(a_i, b_j) - p_{-+}(a_i, b_j). \quad (3.15)$$

Dalla discussione sulla disuguaglianza di Bell nel secondo capitolo, abbiamo che:

$$C \equiv E(a_1, b_1) - E(a_1, b_3) + E(a_3, b_1) + E(a_3, b_3) = -2\sqrt{2}, \quad (3.16)$$

ovvero la M.Q. conduce alla violazione, in questo caso, di $|C| \leq 2$.

3. Alice e Bob confrontano i risultati e verificano che la disuguaglianza di Bell è violata. Se ciò non avviene allora capiscono che le particelle sono state intercettate o si sono verificati effetti di rumore. In assenza di tali effetti, cioè per $C \simeq -2\sqrt{2}$, le misure di Alice e Bob effettuate lungo gli stessi assi, sono perfettamente anticorrelate e

quindi:

$$E(a_2, b_1) = E(a_3, b_2) = -1. \quad (3.17)$$

Considerando gli autovalori di queste misure, Alice trasforma i $+1$ ed i -1 nei bit 0 ed 1 e BOB effettua il contrario; quindi entrambi condividono una sicura chiave quantistica data da una sequenza casuale di bit.

Inoltre la chiave risulta indeterminata fino a quando sia Alice sia Bob effettuano le misure sulle rispettive particelle. La chiave segreta si ottiene da un processo totalmente casuale, la misura di un sistema quantistico.

3.4.5 Commenti finali

Dunque, sfruttando alcune proprietà basilari come il principio di indeterminazione di Heisenberg, il teorema di no-cloning e l'entanglement, la meccanica quantistica permette ad Alice e Bob di condividere una chiave intrinsecamente sicura costituita da una sequenza casuale di cifre binarie e lunga a piacere. Con questa chiave è allora possibile inviare messaggi seguendo i criteri di Vernam (paragrafo 3.4.1) attraverso un codice assolutamente indecifrabile.

Conclusioni

L'entanglement, come abbiamo visto, rappresenta un fenomeno molto singolare, privo di analogo classico, previsto matematicamente e poi diventato, attraverso la disuguaglianza di Bell, uno strumento utile per la verifica sperimentale di alcune proprietà molto peculiari della meccanica quantistica. Tre generazioni di esperimenti hanno violato la disuguaglianza, verificando l'incompatibilità del mondo quantistico con una descrizione basata sui principi di realtà e località, come quella proposta da EPR. I risultati di Alain Aspect sono particolarmente emblematici in questo senso. Quindi, questa stretta correlazione fra particelle, l'entanglement, non permette di descrivere separatamente i due sottosistemi e rappresenta un fenomeno fisico reale. Pertanto, misure effettuate su una particella, influiscono sui risultati di misure eseguite sulla seconda particella. Per uno stato di singoletto, ad esempio, se Alice misura la componente di spin della sua particella lungo una certa direzione, Bob otterrà certamente il risultato opposto, eseguendo la misura sulla sua particella lungo la stessa direzione. Questa interazione istantanea, fra particelle entangled, sembrerebbe violare anche lo spirito della relatività ristretta. In realtà, come abbiamo visto anche nelle applicazioni in crittografia, *solo dopo* aver messo a confronto i loro risultati (utilizzando un metodo classico di comunicazione, che non può inviare messaggi a velocità maggiore di quella della luce) i due sperimentatori, Alice e

Bob, possono notare le correlazioni fra i loro risultati e scambiarsi informazioni. Forse, un modo per capire cosa sia davvero l'entanglement è quello di evitare di riferirsi alla relatività e di non pensare a due particelle entangled come a entità separate che si inviano messaggi bensì a parti di un unico sistema che trascende lo spazio, che non viene influenzato dalla distanza fisica che separa i suoi componenti. In questa interpretazione, proposta dal fisico Yanuha Shih, non ci può essere nemmeno un'apparente violazione del principio di indeterminazione, come era invece suggerito nell'articolo EPR. Si tratta comunque di questioni tutt'oggi dibattute. Tuttavia, come notava Aspect nell'articolo [12], non ci sono stati esperimenti condotti con maggiore accuratezza che hanno dimostrato risultati contrari alla meccanica quantistica. Lo sviluppo della comunicazione e della computazione quantistica si muove in questa direzione, considerando l'entanglement come una reale e potente risorsa da sfruttare. Concludiamo dicendo che, senza dubbio, l'entanglement ci insegna il carattere *aleatorio* del mondo quantistico, in cui le misure effettuate su un sistema fisico lo convertono in un particolare stato con una certa probabilità, lo costringono a saltare fuori dalla "nebbia" quantistica per atterrare su un punto specifico. Quando Alice misura lo spin della particella che possiede, lungo una direzione arbitraria, *non può scegliere* il risultato, che non può essere previsto deterministicamente ma solo in maniera probabilistica. Per questo in [9] Anton Zeilinger scrive: all'inizio del noto *Tractatus Logico Philosophicus*, Ludwig Wittgenstein affermò che il mondo è tutto ciò che accade. Abbiamo visto che questa posizione è troppo limitata. Nella meccanica quantistica possiamo fare affermazioni non solo su ciò che *accade*, ma anche su tutto ciò che *può accadere*. Quindi il mondo è più di quanto pensasse Wittgenstein. *il mondo è tutto ciò che accade, e anche tutto ciò che può accadere.*

Bibliografia

- [1] G. Benenti, G. Casati and G. Strini, *Principles of quantum computation and information, Volume 1: Basic concepts* (World Scientific, 2004)
- [2] M.A. Nielsen and I.L. Chuang, *Quantum computation and quantum information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000)
- [3] G. Nardulli, *Meccanica Quantistica I, Principi* (Franco Angeli, 2001)
- [4] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?* (Phys. Rev. 47 777, 1935)
- [5] N. Bohr, *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?* (Phys. Rev. 48 696, 1935)
- [6] D. Bohm, *Quantum theory* (Prentice-Hall, Englewoods Cliffs, 1951)
- [7] J. Bell, *On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox* (Physics 1 195, 1964)
- [8] J. Clauser, M. Horne, A. Shimony and R. Holt, *Proposed Experiment to test local hidden-variable theories* (Phys. Rev. Lett. 23 880, 1969)
- [9] J. Freedman and J. Clauser, *Experimental test of local hidden-variable theories* (Phys. Rev. Lett. 28 938, 1972)

- [10] E. Fry and C. Thompson, *Experimental test of local hidden-variable theories* (Phys. Rev. Lett. 37 465, 1976)
- [11] A. Aspect, P. Grangier and G. Roger, *Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem* (Phys. Rev. Lett. 47 460, 1981)
- [12] A. Aspect, P. Grangier and G. Roger, *Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm gedankenexperiment: a new violation of Bell's inequalities* (Phys. Rev. Lett. 49 91, 1982)
- [13] A. Aspect, J. Dalibard and G. Roger, *Experimental tests of Bell's inequalities using time-varying analyzers* (Phys. Rev. Lett. 49 1804, 1982)
- [14] Amir D. Aczel, *Entanglement: il più grande mistero della fisica* (Raffaello Cortina, 2004)
- [15] A. Zeilinger, *Il velo di Einstein* (Einaudi, 2006)

Ringraziamenti

Questa tesi rappresenta la conclusione di tre anni molto impegnativi. Nell'affrontare questo percorso insidioso ed appassionato non mi sono mai ritrovato da solo, per questo desidero ringraziare:

- il Chiar.mo Prof. Saverio Pascazio per la costante disponibilità, i numerosi consigli ed il rigore dimostratomi nello svolgimento della tesi;
- mia madre per l'amore e la pazienza(reciproca), mio padre per i consigli ed i valori che mi ha insegnato, mia sorella per la non separabile interazione a distanza che ci lega;
- tutti i miei amici per le più o meno lunghe distrazioni ed i colleghi del corso di laurea in fisica per la compagnia ed il sostegno reciproco durante questi tre lunghi anni.