

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA DI I LIVELLO IN FISICA

TESI DI LAUREA IN FISICA TEORICA

Modello a Quark:

**Simmetrie Unitarie e
Spettroscopia Mesonica**

Relatore:

Chiar.mo Prof. Giuseppe NARDULLI

Laureanda:

Maria Valentina CARLUCCI

ANNO ACCADEMICO 2006/2007

A Mamma e Papà

Indice

Introduzione	1
1 Cenni di Teoria dei Gruppi	9
1.1 Definizioni e proprietà generali	9
1.1.1 Gruppi e rappresentazioni	9
1.1.2 Gruppi di Lie	12
1.1.3 Sottogruppi e sottoalgebre	15
1.1.4 Pesì e radici	16
1.2 Gruppi di trasformazioni e simmetrie	17
1.2.1 Gruppi di trasformazioni	17
1.2.2 Gruppo di simmetria dell'Hamiltoniana	17
1.3 Il gruppo $SU(2)$	19
1.3.1 Rappresentazioni irriducibili	19
1.3.2 Operatori tensoriali	23
1.3.3 Applicazioni allo studio di una generica algebra	24
1.4 Il gruppo $SU(3)$	25
1.4.1 Rappresentazioni irriducibili	25
1.4.2 Tensori	32
1.4.3 Tabelle di Young	36
2 Il Modello a Quark	41
2.1 Simmetrie interne	41
2.1.1 Gruppi di simmetrie interne	41
2.1.2 Isospin	43
2.1.3 Stranezza ed ipercarica	49
2.2 Genesi del modello	51
2.2.1 Simmetria unitaria	51
2.2.2 Il modello di Sakata	53
2.2.3 The Eightfold Way	54
2.3 Il modello a quark	55
2.3.1 L'ipotesi dei quark	55
2.3.2 Mesoni	59
2.3.3 Barioni	63
2.4 Interazioni e dinamica	64
2.4.1 Spin	65

2.4.2	Massa	65
2.4.3	Colore	69
2.4.4	Modelli a quark costituenti	72
2.5	Conferme, applicazioni e sviluppi	75
2.5.1	Momento magnetico	75
2.5.2	Altre verifiche del modello	76
2.5.3	Evidenze sperimentali del colore	77
2.5.4	Il modello a partoni	78
2.5.5	I quark pesanti	79
3	Studio di un Modello a Quark non Relativistico	82
3.1	Il modello	83
3.1.1	L'equazione di Salpeter	83
3.1.2	Il potenziale di Cornell	84
3.1.3	Termine di spin	86
3.1.4	Correzione nell'origine	86
3.2	Risultati numerici	87
3.2.1	Spettro di massa	87
3.2.2	Potenziale	88
3.2.3	Funzioni d'onda	89
	Conclusioni	93
A	Soluzione dell'equazione di Salpeter	95
A.1	Rappresentazione spettrale dell'operatore radice	95
A.2	Soluzione dell'integrale in dk	96
A.3	Applicazione del metodo di Multhopp	98
A.4	Calcolo dell'integrale al valor principale	99
	Bibliografia	101
	Ringraziamenti	105

Introduzione

“Il fine della scienza è, da una parte, la comprensione più completa possibile della connessione fra le esperienze sensoriali nella loro totalità e, dall'altra, il raggiungimento di questo fine mediante l'uso minimo di concetti e relazioni primarie. Il fatto stesso che la totalità delle nostre esperienze sensoriali si possa ordinare col pensiero (operazioni con concetti astratti, creazione ed uso di relazioni funzionali ben definite fra di essi, e coordinazione delle esperienze sensoriali con tali concetti) ci lascia stupefatti, ed è qualcosa che non riusciremo mai a spiegarci. Si potrebbe dire che 'L'eterno mistero del mondo è la sua comprensibilità'.” [1]

Il Modello a Quark può essere considerato la concretizzazione delle parole di Albert Einstein. Esso parte dalle esperienze sensoriali, ovvero dall'osservazione della varietà delle particelle; le ordina con il pensiero, ovvero riconosce in essa la presenza simmetrie; e raggiunge la comprensione di queste connessioni mediante l'uso minimo di concetti primari. In questo modo l'intera zoologia degli adroni leggeri viene descritta mediante tre soli costituenti elementari.

I fenomeni intorno a noi sono interconnessi. Essi possono ovviamente essere considerati come entità separate e studiati come tali, ma fa molta differenza se li vediamo come parte di qualcosa di più generale. Molti fatti diventano allora molto più che dati singoli da memorizzare: le loro interconnessioni ci permettono di usare una descrizione sintetica, uno schema per apprenderli e ricordarli. Essi cominciano ad acquistare un senso. Il mondo diventa più comprensibile.

Il riconoscimento di regolarità è qualcosa di naturale per noi esseri umani: noi stessi, dopo tutto, siamo sistemi complessi adattativi. È nella nostra natura, per eredità biologica ed anche trasmissione culturale, riconoscere strutture, identificare regolarità, elaborare schemi nella nostra mente. Tuttavia questi schemi vengono non di rado promossi o retrocessi, accettati o respinti, in risposta a pressioni selettive che nelle scienze derivano dall'accordo con l'osservazione.

In particolare, la fisica si propone di descrivere i risultati dell'osservazione dei fenomeni naturali per mezzo di un'insieme di postulati il più ristretto possibile e delle leggi che possono essere derivate da tali postulati attraverso la logica e l'inferenza matematica. Per raggiungere la coerenza logica tra insiemi di fenomeni apparentemente distinti, la fisica è forzata all'astrazione e alla generalizzazione. Più ampio è il campo di applicazione di un insieme di assiomi fisici, più astratto e semplice è il suo contenuto.

Un ruolo particolare tra questi postulati è giocato dalle *leggi di simmetria*. Essenzialmente, esse rappresentano l'idea di generalizzazione attraverso proposizioni di negazione: si tratta di "postulati di impotenza" [2], ovvero di impossibilità di distinguere tra alcuni fenomeni. La loro importanza in fisica deriva da noti teoremi di validità molto generale.

Il ruolo della simmetria è stato esaltato nello studio della fisica delle particelle elementari. Una ragione di ciò è il fatto che non si è mai avuta a disposizione una teoria dinamica del tutto soddisfacente per descriverne le interazioni [3]. Nonostante questa mancanza di una conoscenza dettagliata della dinamica, dallo studio della proprietà di simmetria delle interazioni tra le particelle elementari si possono ricavare moltissime informazioni. Tuttavia, c'è un'altra ragione che spinge a studiare le proprietà di simmetria delle interazioni: la bellezza e la semplicità che l'uomo riconosce nelle simmetrie le rende "estheticamente" desiderabili, anche in quei casi in cui esiste una teoria dinamica. Molti risultati che possono essere calcolati solo con difficoltà da una teoria dinamica seguono molto semplicemente dall'esplicitazione delle proprietà di simmetria di un sistema fisico.

La ricerca dei costituenti ultimi ed indivisibili della materia, iniziata dai filosofi greci, continua ininterrotta da oltre venti secoli. La maggior parte degli studiosi, infatti, oggi come allora è convinta (o almeno spera, perché è umano pensarlo) che ogni cosa che esiste in natura sia costituita da un limitato numero di "mattoni fondamentali".

Una delle primi tentativi di soluzione a questo rompicapo proviene da Anassimene di Mileto: tutte le forme di materia, Terra, Acqua e Fuoco, sono ottenute condensando o rarefacendo Aria. Tutti conosciamo inoltre la risposta che invece Mendeleev diede 25 secoli dopo: la tavola periodica, che oggi contiene ben più di 100 elementi. Il modello di Anassimene della struttura fondamentale della materia è chiaramente concettualmente superiore in merito alla sua semplicità ed economia nel numero di mattoni fondamentali. Presenta però un fatale problema: è sbagliato! Viceversa, il modello di Mendeleev è corretto, ma è troppo complesso per rappresentare la soluzione ultima e fondamentale desiderata. La proliferazione di elementi e l'apparente sistematica nell'organizzazione della tavola suggerisce fortemente l'esistenza di una sottostruttura. Lo studio di queste regolarità portò infatti ad ipotizzare che gli elementi della tavola di Mendeleev fossero costituiti dai più fondamentali elettroni e nuclei.

Nello sviluppo storico del pensiero scientifico ci sono quindi dei momenti in cui ci si illude di aver trovato questi costituenti ultimi della materia, soggetti a leggi semplici, capaci di spiegare la complessità del mondo fisico. Altri esempi noti sono gli atomi nell'Ottocento o l'elettrone, il protone e il neutrone negli anni Trenta. All'inizio questi mattoni fondamentali sono relativamente pochi e si è condotti a credere di aver raggiunto l'ordine e la semplicità; poi il quadro si complica via via che questi costituenti si moltiplicano in modo inatteso e vengono sondati più in profondità con la comparsa di una sottostruttura.

"Prendi metà di un bastoncino lungo un piede ogni giorno: non finirai in un milione di anni."

L'"esperimento" descritto da questo antico proverbio cinese può essere in ultima analisi un'allegoria di ciò che i fisici realmente hanno fatto e continuano a fare, nella loro ricerca dei costituenti ultimi della materia. Durante i tre secoli a partire dalla nascita della fisica

moderna, abbiamo raggiunto il risultato corrispondente a circa 60 giorni di questo “dimezzamento” (fino a 10^{-16} cm). Intorno al trentesimo giorno (a 10^{-8} cm), ci siamo imbattuti nella prima evidenza di struttura granulare della materia: gli atomi, che sembravano inizialmente indivisibili. Come sappiamo, essi si rivelarono invece essere divisibili in elettroni e nuclei; e poi i nuclei ancora in nucleoni e i nucleoni in quark.

Verso la fine dell'Ottocento si credette quindi di essere riusciti a trovare questi mattoni fondamentali all'interno delle molecole e proprio per questo motivo furono chiamati *atomi* (dal greco *ατομος*, “indivisibile”). Subito però si vide che questi corpuscoli non meritavano un tale nome.

In seguito infatti, l'elementarietà fu trasferita alle prime e sempre più numerose particelle che via via venivano scoperte nei laboratori. Considerate inizialmente le più piccole e le più semplici unità di materia fisicamente concepite, molte di queste particelle si sono poi rivelate caratterizzate da una struttura interna. Ogni qual volta, nel corso degli anni, una microscopica entità materiale veniva considerata corrispondente all'atomo di Democrito, nuove conoscenze, nuove scoperte e nuove teorie hanno mostrato che l'oggetto, ritenuto elementare, in realtà era formato da qualche cosa di ancora più fondamentale e ancora più semplice.

Poiché l'elementarietà rappresenta un concetto in continua evoluzione, essa non soltanto deve essere considerata in relazione ai limiti delle nostre conoscenze, ma deve essere attribuita ad ogni elemento di materia di cui al momento attuale non si conosce la struttura.

Anche il concetto di particella, inteso come qualche cosa di indivisibile e non modificabile in senso democriteo, dovette essere modificato: le particelle infatti si trasformavano una nell'altra e soprattutto potevano essere create l'una dall'altra.

Fin dall'inizio degli Anni Trenta tutta la materia conosciuta poteva essere descritta mediante quattro particelle considerate elementari e a simmetria sferica: l'elettrone, il protone, il neutrone e il fotone. Questo schema, estremamente semplice ed attraente, incominciò lentamente a mutare con l'introduzione dello spin, con la teoria della relatività e con le antiparticelle di Dirac. Lo spin, dapprima, fece perdere la perfetta simmetria geometrica dei corpuscoli; la scoperta dell'antimateria fece poi mutare la concezione materialistica della natura; la relatività, infine, fornì la possibilità teorica di creare, per così dire, una particella dalle altre, disponendo di sufficiente energia.

Per tradurre questi sviluppi concettuali in uno schema quantitativo era necessaria una nuova cornice teorica. Chiaramente, l'equazione di Schrödinger non poteva spiegare la creazione e distruzione di particelle, né descrivere particelle relativistiche. All'inizio degli anni Trenta era stata formulata l'Elettrodinamica Quantistica (QED), che era una teoria quantizzata e relativisticamente invariante; essa costituì il prototipo della teoria quantistica relativistica dei campi, con la speciale classe delle teorie di gauge. Oggi sappiamo che per descrivere adeguatamente le particelle elementari non si può prescindere dalla cornice della teoria quantistica dei campi, basata sulla validità della meccanica quantistica e del principio di relatività.

La fiducia nell'apparente semplicità della materia fu poi ulteriormente scossa dall'introduzione del neutrino (ufficialmente trovato nel 1953), dalla scoperta (1932) del positrone che confermava la teoria di Dirac sulle antiparticelle, dai primi muoni (1936) prodotti dai raggi cosmici e soprattutto dalla comparsa di numerose altre particelle nelle collisioni dei sempre

più potenti acceleratori che dilatarono in modo non previsto la famiglia di protone e neutrone, ovvero degli *adroni* (dal greco $\alpha\delta\rho\omicron\varsigma$, “forte”).

Questo era il quadro che si presentava all’inizio degli anni Sessanta, quando il numero dei nuovi adroni scoperti era già dell’ordine di qualche decina. Questa proliferazione rese chiaro che gli adroni non potevano essere le particelle fondamentali.

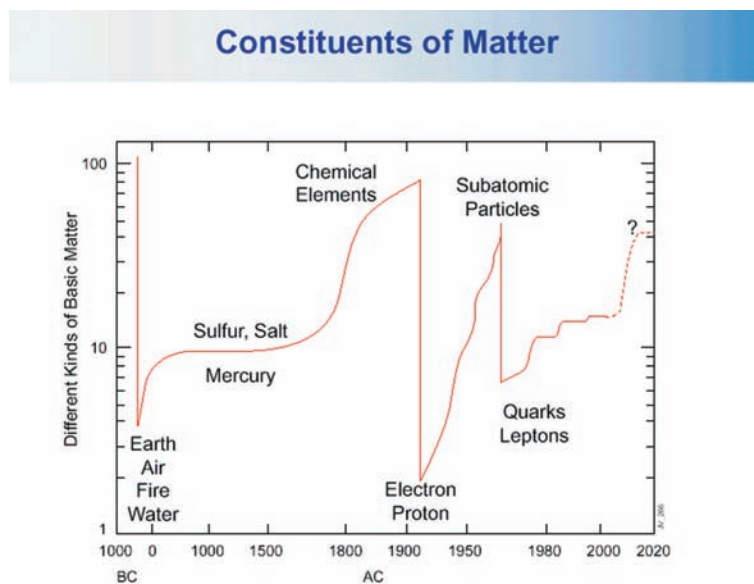


Figura 1: “Andamento” del numero di costituenti elementari nel corso della storia.

D’altra parte, l’aver a disposizione un numero tanto grande di particelle aveva un aspetto positivo in quanto permetteva uno studio sistematico. Questo era accaduto più volte nella storia della fisica [4]. Ad esempio, nel caso della struttura atomica, la grande quantità di dati disponibili sugli spettri di emissione si rivelò un supporto decisivo nella nascita della meccanica quantistica. Andando indietro nel tempo, potremmo dire che, poiché ci sono più pianeti nel sistema solare, Copernico costruì il suo modello del sistema solare, Keplero scoprì le sue leggi basate sui dati delle osservazioni di Tycho Brahe, e tutto ciò portò alle leggi della meccanica di Newton. Altri esempi sono la già citata tavola degli elementi di Mendeleev o il modello a shell del nucleo di Mayer, Jensen e Seuss.

Dagli anni Trenta agli anni Sessanta si sviluppò quindi il percorso che portò ad una nuova evoluzione dell’elementarietà, che troverà il suo compimento nel Modello a Quark.

Negli anni a partire dal 1936, quando Breit e i suoi collaboratori postularono che le forze nucleari fossero indipendenti dalla carica, l’invarianza per rotazioni nello spazio di isospin si affermò come simmetria approssimata degli adroni. Tuttavia, dopo la scoperta degli iperoni e dei mesoni pesanti, i fisici cominciarono a cercare una simmetria approssimata più larga.

Il primo importante passo in questa direzione fu fatto da Gell-Mann e indipendentemente da Nishijima nel 1952, quando questi scienziati postularono l’esistenza del numero quantico della stranezza. Un altro importante contributo fu dato nel 1956 da Sakata e i suoi collaboratori, con un modello basato sull’elementarietà di protone, neutrone ed iperone Λ . Altri autori,

seguendo Sakata, inserirono nel 1959 questo modello nella cornice del gruppo di simmetria unitaria $SU(3)$. In seguito, nel 1961, fu la volta del lavoro fondamentale di Gell-Mann e Ne'eman che indipendentemente proposero una classificazione degli adroni basata sugli ottetti della simmetria unitaria. Nel 1964 Murray Gell-Mann e, indipendentemente, George Zweig proposero infine il Modello a Quark.

*“Quando chiamai quark queste particelle, mi venne dapprima in mente il suono di una parola che avrebbe potuto essere quo:k. Poi, in una delle mie occasionali letture di *Finnegans Wake* di James Joyce, mi imbattei nella parola quark nella frase “Three quarks for Muster Mark”. Poiché quark (che significa anche grido di un gabbiano) doveva chiaramente far rima con Mark, oltre che con bark e altre parole simili, dovevo trovare una scusa per pronunciarlo quo:k. Il libro descrive il sogno del proprietario di un pub, il signor Humphrey Chimpden Earwicker, e in esso ricorrono, di tanto in tanto, espressioni collegabili a ordinazioni di bevande al bar. Com'è tipico di Joyce, le parole hanno talvolta molteplici riferimenti (un po' come le parole portmanteau in *Attraverso lo specchio* di Lewis Carroll). Ragionai perciò che una delle molte fonti del grido “Three quarks for Mister Mark” poteva essere “Three quarts for Muster Mark”, dove la pronuncia quo:ts di quarts poteva giustificare la pronuncia quo:k di quark. In ogni caso il numero tre si conciliava perfettamente con il modo in cui i quark si presentano in natura.” [5]*

Il modello a quark postula l'esistenza di tre sole particelle elementari: quark *up*, quark *down* e quark *strange*¹. Esse, combinate in tutti i modi possibili, costituiscono gli adroni.

Molti di questi adroni erano già stati osservati, ma alcune delle caselle generate da questo schema combinatorio erano ancora vuote, esattamente come era successo cento anni prima con la tavola periodica degli elementi costruita da Mendeleev. Fu così prevista l'esistenza di nuove particelle con le proprietà corrispondenti alle caselle vuote, che furono poi osservate in laboratorio nell'arco di un paio d'anni.

Nonostante questi indubbi successi, il modello a quark fu accolto con grande diffidenza nella comunità dei fisici [6]: ancora nel 1971 ad una conferenza il vecchio Heisenberg interrompeva bruscamente un oratore esclamando: *“Ma il modello a quark non è fisica!”*².

Eppure a quell'epoca si erano già sviluppate delle tecniche sperimentali che consentivano di “vedere” i quark. Tra il 1968 e il 1972 al CERN e allo SLAC si utilizzarono fasci di elettroni di alta energia che nell'urtare protoni e neutroni subivano talora collisioni violente con deviazione delle traiettorie anche di 180°, che suggerivano la presenza di costituenti apparentemente puntiformi all'interno del nucleone, identificabili con i quark.

Per molti aspetti questi esperimenti ricordano molto quelli di Rutherford che mezzo secolo prima avevano rivelato la presenza di un nucleo apparentemente puntiforme all'interno dell'atomo. C'è tuttavia un differenza cruciale. Mentre utilizzando radiazioni sufficientemente energetiche è sempre possibile estrarre elettroni dall'atomo o nucleoni dal nucleo, un risultato

¹Nell'articolo originale, Zweig battezzò invece *aces* le tre particelle.

²Episodio ricordato da D.I. Olive alla *Dirac Centenary Conference*, Baylor University (Texas), Ottobre 2002.

analogo non è stato ancora raggiunto a livello dei quark. Quark liberi, isolati, non sono mai stati visti e i fisici di oggi ritengono che le leggi che descrivono le interazioni tra quark proibiscano la loro esistenza come particelle libere. Si esprime questo risultato dicendo che i quark sono permanentemente *confinati*.

Alla fine degli anni Sessanta il confinamento dei quark appariva in stridente contrasto con i risultati degli esperimenti con il fascio di elettroni, che indicavano chiaramente che i quark si comportano come particelle libere all'interno dei nucleoni. La maggioranza dei fisici riteneva che nessuna teoria quantistica di campo potesse spiegare un comportamento così bizzarro. Fiorirono perciò decine di teorie che con grande ingegnosità tentavano di descrivere questi fenomeni, ma nessuna resse alla critica e al cimento sperimentale; tra queste spicca la Teoria delle Stringhe, che risorgerà a nuova vita molto tempo dopo.

Dopo i fondamentali lavori di 't Hooft del 1971 sorse in molti il sospetto che le teorie di Yang e Mills fossero in qualche modo implicate nelle interazioni tra i quark. Finalmente nel 1973 David Politzer dell'università di Harvard e David Gross e Frank Wilczek dell'Institute for Advanced Study di Princeton scoprirono una proprietà generale delle teorie di gauge non Abeliane che si rivelò poi essere la chiave del mistero: il vuoto nell'intorno di una sorgente del campo di Yang e Mills si polarizza in maniera opposta rispetto a quanto accade in QED, per cui più una particella-sonda si avvicina alla sorgente più l'intensità della sorgente appare diminuire fino a comportarsi come una particella libera, disaccoppiata dal campo, nel limite in cui la sonda riuscisse a raggiungerla (il che potrebbe succedere solo con energia infinita). Questa proprietà delle sorgenti del campo di Yang e Mills va sotto il nome di *libertà asintotica*; per la fondamentale scoperta, Gross, Politzer e Wilczek saranno insigniti del Premio Nobel per la Fisica nel 2004.

Ecco spiegato l'arcano: se i quark sono le sorgenti di un campo di gauge, quando si avvicinano l'un l'altro o quando interagiscono con il fascio di elettroni energetici (quindi in grado di avvicinarsi molto alle sorgenti) si comportano come particelle debolmente interagenti, ma quando tendono ad allontanarsi fra di loro la forza di interazione aumenta. Se i quark sono le sorgenti di un campo di Yang e Mills, oltre alla carica elettrica devono avere un'altra carica che si accoppia ai campi di gauge, detti *gluoni*, così come la carica elettrica si accoppia al fotone. Il nuovo tipo di carica viene chiamato, senza nessuna ragione profonda, *colore* e la corrispondente teoria che descrive l'interazione tra quark *Cromodinamica Quantistica* o in breve QCD. Dal momento che ci sono tre tipi di cariche di colore, le regole del gioco sono più complesse di quanto non avvenga per la QED. Il gruppo di simmetria di gauge che fissa queste regole è $SU(3)$. Esso dipende da otto parametri e dunque implica l'esistenza di otto diversi tipi di bosoni di gauge o gluoni che costituiscono i mediatori delle interazioni tra i quark. Anche i gluoni non possono esistere come particelle libere, però, a differenza dei fotoni, interagiscono tra loro dando origine a degli agglomerati che i fisici chiamano *glueballs*. Dal punto di vista sperimentale non è facile distinguere una glueball da un mesone ordinario, tuttavia è tuttora aperto un dibattito su alcune particelle che sembrano svolgere questo ruolo.

Grazie alla libertà asintotica si ottiene una descrizione molto accurata e soddisfacente dei fenomeni che dipendono dall'interazione tra quark a corta distanza, dove si comportano come particelle che interagiscono debolmente. Il rovescio della medaglia è che quando i quark si allontanano l'uno dall'altro la costante di accoppiamento della teoria diventa troppo grande: i metodi perturbativi della teoria di campo non sono più applicabili e la QCD diventa analiticamente intrattabile. Nel decennio a cavallo tra gli anni Settanta e Ottanta la ricerca di una

comprensione soddisfacente del meccanismo di confinamento dei quark divenne uno dei temi centrali della ricerca nella fisica delle particelle elementari. Una prima indicazione a favore del confinamento dei quarks venne nel 1974 da un'idea di Kenneth Wilson. Egli riformulò la teoria di Yang e Mills anziché nel continuo spazio-temporale, su un reticolo cristallino quadridimensionale. In questo modo era possibile verificare la natura confinante dell'attrazione tra quark nell'intorno del valore infinito della costante di accoppiamento, ma tale valore era troppo grande per un confronto con il mondo reale.

All'inizio degli anni Ottanta 't Hooft e l'americano Stanley Mandelstam avanzarono l'ipotesi, sostenuta da argomenti euristici di forte plausibilità, che il vuoto delle teorie di Yang e Mills non Abeliane contenesse un condensato di monopoli magnetici. Come nei superconduttori il condensato di coppie di Cooper espelle il campo magnetico, così in QCD il condensato di monopoli espelle il campo cromoelettrico. Il flusso del campo generato da un quark è convogliato in un vortice di Abrikosov. L'energia posseduta dal vortice è proporzionale alla sua lunghezza, dunque se il quark fosse isolato la sua energia sarebbe infinita. Viceversa un antiquark può riassorbire questo vortice e l'energia di questa coppia è proporzionale alla reciproca distanza. Ecco spiegato il confinamento, ma come provare la congettura di 't Hooft e Mandelstam?

Un breve articolo del 1979 degli americani Michael Creutz, Laurence Jacobs e dell'italiano Claudio Rebbi colse di sorpresa la comunità scientifica. Esso mostrava che era possibile simulare numericamente al calcolatore il modello di Wilson, ottenendo preziose informazioni per i valori fisici delle costanti di accoppiamento, proprio dove nessun metodo analitico poteva funzionare. Era la prima formulazione del principio della fisica computazionale: le simulazioni numeriche sono una sorta di esperimento in cui si impone al calcolatore di far evolvere un sistema virtuale secondo determinate leggi, dopodiché si confrontano le proprietà del sistema virtuale così ottenuto con quelle del mondo reale; in questo modo si può controllare la fondatezza di un'ipotesi o predire il comportamento di un sistema anche quando le leggi che reggono un fenomeno sono troppo complesse per essere studiate con metodi analitici. Con l'impetuoso sviluppo di calcolatori sempre più potenti, le simulazioni numeriche e più in generale la fisica computazionale sono diventate uno strumento prezioso e molto potente in tutti i rami della fisica. Grazie a questo metodo la teoria di gauge su reticolo ha ormai raggiunto un grado di precisione tale da poter verificare la congettura di 't Hooft e Mandelstam e riprodurre con accuratezza lo spettro degli adroni. Ma le simulazioni numeriche, per quanto accurate, contengono sempre un margine di errore, possono quindi rendere plausibile una congettura ma non possono sostituire una dimostrazione matematica. Tuttavia, in assenza di queste prove, si è soliti accettare le dimostrazioni euristiche basate sulle simulazioni di QCD su reticolo e ritenere il problema del confinamento, se non risolto, quanto meno messo tra parentesi.

La Tesi è organizzata nel modo seguente.

La Teoria dei Gruppi è lo strumento matematico utilizzato per studiare i sistemi fisici che presentano proprietà di simmetria. Nel primo capitolo ho esposto i concetti di teoria dei gruppi necessari per lo studio del modello a quark. In particolare, nel primo paragrafo ho esposto le nozioni generali; nel secondo paragrafo ho descritto i legami con i sistemi fisici; negli ultimi due paragrafi ho presentato le proprietà dei due gruppi utilizzati nel modello.

Il Modello a Quark è presentato in dettaglio nel secondo capitolo. Nei primi due paragrafi ho descritto le conoscenze e le teorie precedenti alla formulazione del modello e le prime ipotesi e tentativi che hanno portato alla costruzione della teoria completa; nei successivi due paragrafi ho studiato il modello prima dal punto di vista puramente matematico e poi dal punto di vista fisico; nell'ultimo paragrafo ne ho esposto gli aspetti più applicativi e sperimentali.

Nell'ultimo capitolo ho studiato teoricamente e numericamente un particolare modello a quark costituenti non relativistico. Il modello fisico è esposto nel primo paragrafo, i risultati del calcolo computazionale sono presentati nel secondo paragrafo. Per rendere più agevole la presentazione, i calcoli espliciti sono riportati in appendice.

Capitolo 1

Cenni di Teoria dei Gruppi

1.1 Definizioni e proprietà generali

1.1.1 Gruppi e rappresentazioni

Un **gruppo** \mathcal{G} è un insieme dotato di una legge di composizione interna che assegna ad ogni coppia ordinata di suoi elementi un terzo elemento. Tale legge deve soddisfare le seguenti proprietà:

1. Chiusura:

$$\forall f, g \in \mathcal{G} : \quad h = fg \in \mathcal{G} \quad (1.1a)$$

2. Associatività:

$$\forall f, g, h \in \mathcal{G} : \quad f(gh) = (fg)h \quad (1.1b)$$

3. Esistenza dell'elemento neutro:

$$\exists e \in \mathcal{G} \ni' \forall f \in \mathcal{G} : \quad ef = fe = f \quad (1.1c)$$

4. Esistenza dell'inverso:

$$\forall f \in \mathcal{G} \quad \exists f^{-1} \in \mathcal{G} \ni' ff^{-1} = f^{-1}f = e \quad (1.1d)$$

Un gruppo è **finito** se contiene un numero finito di elementi; altrimenti è **infinito**.

Il numero di elementi di un gruppo finito \mathcal{G} è detto **ordine** di \mathcal{G} .

Un gruppo è **Abeliano** se la legge di composizione è commutativa.

Un gruppo \mathcal{H} i cui elementi sono tutti elementi di un gruppo \mathcal{G} è detto **sottogruppo** di \mathcal{G} .

Un sottoinsieme \mathcal{S} di \mathcal{G} è detto **classe di coniugazione** se e solo se $\forall g \in \mathcal{G} : g^{-1}\mathcal{S}g = \mathcal{S}$.

La funzione $\mathcal{G} \rightarrow g\mathcal{G}g^{-1}$ per un fissato g è un **automorfismo interno**: un automorfismo è una corrispondenza biunivoca del gruppo in se stesso che preserva la legge di composizione, ed è interno se g è un elemento del gruppo \mathcal{G} stesso.

Una **rappresentazione** D del gruppo \mathcal{G} è una funzione degli elementi di \mathcal{G} in un insieme di operatori lineari che deve soddisfare le seguenti proprietà:

1. Rispetto all'identità:

$$D(e) = \mathbf{1} \quad (1.2a)$$

dove $\mathbf{1}$ è l'operatore identità nello spazio su cui agiscono gli operatori lineari.

2. Rispetto alla legge di composizione:

$$D(g_1) D(g_2) = D(g_1 g_2) \quad (1.2b)$$

ovvero la legge di composizione del gruppo diventa la legge di composizione naturale dello spazio su cui agiscono gli operatori lineari.

La **dimensione** di una rappresentazione è la dimensione dello spazio su cui agiscono i suoi operatori.

Le rappresentazioni dei gruppi sono uno strumento di grande utilità nella semplificazione dell'analisi dei gruppi proprio per il fatto che esse "vivono" in spazi lineari, in cui si è liberi di rappresentare gli stati nel modo più conveniente operando opportune trasformazioni lineari S ; se tali trasformazioni sono invertibili, gli stati trasformati sono equivalenti ai precedenti. Queste trasformazioni sugli stati inducono una trasformazione sugli operatori che genera una nuova rappresentazione della forma

$$D(g) \rightarrow D'(g) = S^{-1} D(g) S \quad (1.3)$$

che obbedisce alla stessa legge di composizione della precedente. D e D' sono dette rappresentazioni **equivalenti** perché differiscono solo per una scelta della base.

Una rappresentazione è detta **unitaria** se per qualunque elemento g del gruppo i suoi operatori $D(g)$ sono unitari, ovvero se

$$D^\dagger(g) = D^{-1}(g) \quad . \quad (1.4)$$

Una rappresentazione è **riducibile** se nello spazio su cui agisce esiste un sottospazio invariante, ovvero se ogni vettore del sottospazio è trasformato da qualsiasi operatore della rappresentazione in un vettore dello stesso sottospazio. Una rappresentazione è **irriducibile** se non è riducibile.

Una rappresentazione è **completamente riducibile** se esiste una rappresentazione ad essa equivalente i cui elementi di matrice hanno la forma

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 & \dots \\ 0 & D_2(g) & \dots \\ \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix}$$

dove $D_j(g)$ è irriducibile $\forall j$; essa è detta **forma diagonale a blocchi** e ciascun blocco agisce su un sottospazio invariante.

Una rappresentazione in forma diagonale a blocchi è detta **somma diretta** delle sotto-rappresentazioni irriducibili $D_j(g) : D_1 \oplus D_2 \oplus \dots$. La base dello spazio su cui agisce una rappresentazione irriducibile è nota come **multipletto**. Combinando le due definizioni si può affermare che una rappresentazione completamente riducibile può essere decomposta nella somma diretta di rappresentazioni irriducibili.

Viceversa, più rappresentazioni possono essere composte a formarne una più vasta. Se D_1 è una rappresentazione a m dimensioni su uno spazio di base $|j\rangle$ e D_2 è una rappresentazione a n dimensioni su uno spazio di base $|x\rangle$, si può costruire uno spazio a $m \times n$ dimensioni, detto **spazio prodotto tensoriale**, che ha per base vettori dati da j e x in coppie ordinate: $|j, x\rangle$. In questo spazio si può definire la **rappresentazione prodotto tensoriale** $D_1 \otimes D_2$ moltiplicando le due rappresentazioni; ovvero, gli elementi di matrice di $D_{D_1 \otimes D_2}(g)$ sono i prodotti di quelli di $D_1(g)$ e $D_2(g)$:

$$\langle j, x | D_{D_1 \otimes D_2}(g) | k, y \rangle \equiv \langle j | D_1(g) | k \rangle \langle x | D_2(g) | y \rangle \quad . \quad (1.5)$$

Si possono provare le seguenti notevoli proprietà [8]:

- Ogni rappresentazione di un gruppo finito è equivalente ad una rappresentazione unitaria.
- Ogni rappresentazione di un gruppo finito è completamente riducibile.

Di fondamentale importanza sono i seguenti risultati [9], qui presentati senza dimostrazione; il primo è noto come *lemma di Schur*, il secondo ne è un immediato corollario.

- Se $D_1(g)$ e $D_2(g)$ sono due rappresentazioni irriducibili di dimensione n_1 e n_2 di \mathcal{G} e se esiste S tale che $\forall g \in \mathcal{G} : D_1(g) S = S D_2(g)$, allora

$$S = 0 \quad \vee \quad S \neq 0, \quad \det S \neq 0, \quad n_1 = n_2$$

ovvero le due rappresentazioni sono equivalenti.

- Se $D(g)$ è una rappresentazione irriducibile di dimensione n di \mathcal{G} , e se $\forall g \in \mathcal{G} : D(g) S = S D(g)$ allora

$$S = \alpha \cdot \mathbf{1}$$

con $\alpha \in \mathbb{C}$.

La conseguenza cruciale è data dal fatto che la forma della base di una rappresentazione irriducibile è unica. Infatti, il corollario può essere riscritto nella forma

$$\forall g \in \mathcal{G} : \quad S^{-1} D(g) S = D(g) \Rightarrow S \propto \mathbf{1}$$

per ogni rappresentazione irriducibile D ; questo significa che fissata la forma di D , non è data ulteriore libertà di operare sugli stati una trasformazione che non sia banale.

1.1.2 Gruppi di Lie

Supponiamo che gli elementi g del gruppo \mathcal{G} dipendano in modo continuo da un insieme di parametri continui α ; con questo si intende che se due elementi sono “vicini” nello spazio degli elementi del gruppo, i parametri da cui dipendono sono anch’essi “vicini”.

Data la rilevanza dell’identità tra gli elementi del gruppo, è utile parametrizzare gli elementi del gruppo (almeno quelli prossimi all’identità stessa) in modo che $\alpha = 0$ corrisponda ad essa. Pertanto assumiamo che in un certo intorno dell’identità gli elementi del gruppo possano essere descritti da una funzione di N parametri reali α_a con $a = 1 \dots N$ in modo che

$$g(\alpha)|_{\alpha=0} = e \quad .$$

Di conseguenza, se si costruisce una rappresentazione $D(g) \equiv D(g(\alpha)) \equiv D(\alpha)$ del gruppo, gli operatori della rappresentazione saranno parametrizzati nello stesso modo, e si avrà quindi

$$D(\alpha)|_{\alpha=0} = \mathbf{1} \quad .$$

Nello stesso intorno (al limite infinitesimo) è possibile effettuare uno sviluppo di Taylor arrestandosi al prim’ordine:

$$D(d\alpha) = \mathbf{1} + id\alpha_a X_a + \dots \quad .$$

Si ha

$$X_a \equiv -i \frac{\partial}{\partial \alpha} D(\alpha)|_{\alpha=0} \quad ; \quad (1.6)$$

essi, per $a = 1 \dots N$, sono detti **generatori** del gruppo. Se tutti i parametri sono realmente necessari per distinguere gli elementi del gruppo, le X_a sono indipendenti; l’unità immaginaria è utilizzata nella definizione in modo che se la rappresentazione è unitaria le X_a sono operatori hermitiani.

Gruppi con queste caratteristiche sono chiamati **gruppi di Lie**; Sophus Lie mostrò che la caratterizzazione dei generatori di un gruppo equivale alla caratterizzazione del gruppo stesso indipendentemente dalla rappresentazione.

La parametrizzazione è ovviamente libera, ma può essere scelta in modo da ottenere leggi di composizione opportune per il gruppo e le sue rappresentazioni. In particolare, ci si può “allontanare” dall’identità in una determinata direzione semplicemente incrementando più volte di un elemento infinitesimo; per la proprietà (1.1a) di chiusura dei gruppi, questo procedimento restituisce ancora un elemento del gruppo. Di conseguenza, la rappresentazione del gruppo per α finito soddisfa la proprietà

$$D(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + i \frac{\alpha_a X_a}{k} \right)^k = e^{i\alpha_a X_a} \quad . \quad (1.7)$$

Al limite, questa deve essere una rappresentazione di un elemento del gruppo in quanto $1 + i \frac{\alpha_a X_a}{k}$ diventa la rappresentazione dell’elemento del gruppo $D(d\alpha)$ al crescere di k . Questo procedimento definisce la **parametrizzazione esponenziale** del gruppo e quindi la legge di composizione stessa. In particolare, ciò significa che è possibile scrivere gli elementi del gruppo (almeno in un intorno dell’identità) in termini dei generatori; tale proprietà risulta particolarmente utile in quanto, a differenza degli elementi del gruppo, i generatori agiscono su spazi vettoriali.

Ora, in una specifica direzione la legge di composizione del gruppo è particolarmente semplice. Esiste un'unica famiglia di parametri degli elementi del gruppo della forma

$$U(\lambda) = e^{i\lambda\alpha_a X_a}$$

e la legge di composizione è semplicemente

$$U(\lambda_1)U(\lambda_2) = U(\lambda_1 + \lambda_2) \quad .$$

Se invece si compongono elementi del gruppo generati da due diverse combinazioni lineari dei generatori, la derivazione non è così immediata. In generale,

$$e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} \neq e^{i(\alpha_a + \beta_b) X_a} \quad ,$$

ma d'altra parte poiché almeno in un intorno dell'identità gli esponenziali formano una rappresentazione del gruppo, deve valere

$$e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} = e^{i\delta_a X_a} \quad (1.8)$$

per alcuni δ . Poiché tutte queste dipendenze sono continue, δ_a può essere determinato espandendo ambo i membri ed eguagliando la appropriate potenze di α e β . Applicando questo procedimento si trova un vincolo di cruciale importanza [8]: la (1.8) può essere verificata se e solo se per i generatori vale la relazione

$$[X_a, X_b] = i f_{abc} X_c \quad (1.9)$$

con

$$f_{abc} = -f_{bac} \quad ; \quad (1.10)$$

ovvero se i generatori formano un'algebra di Lie con la commutazione quale prodotto di Lie.

Le f_{abc} sono chiamate **costanti di struttura** del gruppo, e sono caratteristiche dell'algebra in quanto sintetizzano l'intera legge di composizione del gruppo. La relazione di commutazione costituisce un esempio di **algebra di Lie** perché anticommutativa e perché vale l'identità di Jacobi. L'algebra è completamente determinata dalle costanti di struttura. Ogni rappresentazione del gruppo fornisce una rappresentazione dell'algebra in modo banale, e le costanti di struttura sono le stesse per tutte le rappresentazioni poiché essere sono determinate solo dalla legge di composizione e dalla continuità. Equivalenza e riducibilità sono così trasferite dal gruppo all'algebra.

Si prova [8] che se esiste una rappresentazione unitaria del gruppo, le f_{abc} sono reali.

Funzioni non lineari dei generatori che commutano con tutti i generatori sono chiamate **operatori di Casimir**.

Le stesse costanti di struttura generano una rappresentazione del gruppo detta **rappresentazione aggiunta**. Definiamo l'insieme di matrici

$$[T_a]_{bc} = -i f_{abc} \quad . \quad (1.11)$$

Poiché dall'identità di Jacobi risulta che

$$f_{bcd} f_{ade} + f_{abd} f_{cde} + f_{cad} f_{bde} = 0 \quad , \quad (1.12)$$

allora si ha che

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c$$

e dunque la (1.11) definisce una rappresentazione. Una definizione equivalente, ma importante per le sue applicazioni, è la seguente: la rappresentazione aggiunta di un elemento g del gruppo \mathcal{G} è la matrice $D(g)$ che agisce su ogni stato $|C\rangle$ dello spazio vettoriale \mathbb{C}^{n^2-1} secondo

$$D(g) |C\rangle = |gCg^\dagger\rangle \quad . \quad (1.13)$$

Si vede subito che la dimensione della rappresentazione aggiunta è data dal numero di generatori indipendenti, che è proprio il numero di parametri reali richiesti per descrivere un elemento del gruppo. Poiché le f_{abc} sono reali, i generatori della rappresentazione aggiunta sono immaginari puri.

Risulta utile definire un prodotto scalare nello spazio dei generatori della rappresentazione aggiunta; un prodotto scalare opportuno è $\text{Tr}(T_a T_b)$. Esso è una matrice reale e simmetrica e può essere posto in una forma canonica molto semplice effettuando una trasformazione lineare sulle X_a che induce una trasformazione lineare sulle costanti di struttura. Si prova infatti [8] che restringendosi ad una particolare classe di algebre (che sono poi quelle di interesse fisico) dette algebre di Lie **compatte**, esiste sempre una base opportuna in cui si ha

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \lambda \delta_{ab} \quad (1.14)$$

con λ positivo. In questa base, si può provare che le costanti di struttura sono completamente antisimmetriche e di conseguenza la rappresentazione aggiunta è unitaria.

I generatori di una rappresentazione (così come gli elementi della rappresentazione che generano) possono essere pensati sia come operatori che come matrici:

$$X_a |i\rangle = |j\rangle \langle j| X_a |i\rangle = |j\rangle [X_a]_{ji} \quad . \quad (1.15)$$

Nello spazio di Hilbert su cui la rappresentazione agisce, gli elementi del gruppo possono essere pensati come trasformazioni sugli stati. L'elemento del gruppo $e^{i\alpha_a X_a}$ trasforma i ket secondo:

$$|i\rangle \rightarrow |i'\rangle = e^{i\alpha_a X_a} |i\rangle$$

e bra secondo:

$$\langle i| \rightarrow \langle i'| = \langle i| e^{-i\alpha_a X_a} \quad .$$

Preso un operatore O , si ha

$$O |i\rangle \rightarrow e^{i\alpha_a X_a} O |i\rangle = e^{i\alpha_a X_a} O e^{-i\alpha_a X_a} e^{i\alpha_a X_a} |i\rangle = O' |i'\rangle$$

e quindi O si trasforma secondo

$$O \rightarrow O' = e^{i\alpha_a X_a} O e^{-i\alpha_a X_a} \quad . \quad (1.16)$$

Si prova [8] che la trasformazione lascia invariati tutti gli elementi di matrice $\langle i| O |i\rangle$.

1.1.3 Sottogruppi e sottoalgebre

Una **sottoalgebra invariante** è un insieme di generatori chiuso rispetto alla commutazione con ogni elemento dell'algebra. Una sottoalgebra invariante genera un **sottogruppo invariante**. L'intera algebra e $\mathbf{0}$ sono sottoalgebre invarianti banali. Un'algebra che non ha sottoalgebre invarianti non banali è chiamata **semplice**. Un'algebra semplice genera un gruppo semplice. Si prova [8] che la rappresentazione aggiunta di un'algebra di Lie semplice nella base canonica è irriducibile.

Una particolare sottoalgebra invariante Abeliana è costituita da un singolo generatore che commuta con tutti i generatori del gruppo o di un suo sottogruppo. Essa è chiamata $U(1)$ ed è il gruppo delle trasformazioni di fase. Si ha che se X_a è il generatore di $U(1)$, allora $f_{abc} = 0$ per ogni b e c e quindi le costanti di struttura non dicono nulla su $U(1)$.

Algebre che non hanno sottoalgebre invarianti Abeliane sono dette **semisemplici**. In ultima analisi, esse sono costruite mettendo insieme algebre semplici; in esse ogni generatore ha commutatore non nullo con alcuni altri generatori e quindi, per la proprietà (1.12) di ciclicità delle costanti di struttura, ogni generatore è una combinazione lineare di commutatori di generatori. In questo caso quindi le costanti di struttura racchiudono tutte le informazioni e possono essere usate per determinare l'intera struttura dell'algebra e delle sue rappresentazioni.

L'insieme $M(n)$ delle matrici complesse $n \times n$ forma un'algebra di Lie rispetto al prodotto di Lie

$$[a, b] \equiv ab - ba$$

con $a, b \in M(n)$. Il corrispondente gruppo di Lie è il **gruppo lineare generale** in n dimensioni, denotato con $GL(n, \mathbb{C})$, ed è definito come l'insieme di trasformazioni lineari che agiscono sullo spazio lineare complesso n -dimensionale \mathbb{C}^n . Ad ogni elemento di $GL(n, \mathbb{C})$ possiamo associare una matrice g in modo da poter definire il gruppo $GL(n, \mathbb{C})$ in termini della sua rappresentazione matriciale

$$GL(n, \mathbb{C}) = \{g | g \in M(n), \det(g) \neq 0\}$$

con legge di composizione interna il prodotto matriciale.

Le applicazioni fisiche della teoria dei gruppi a cui siamo interessati riguardano particolari sottogruppi di $GL(n, \mathbb{C})$:

- il **gruppo lineare speciale** $SL(n, \mathbb{C}) = \{g | g \in GL(n, \mathbb{C}), \det(g) = 1\}$
- il **gruppo unitario** $U(n) = \{g | g \in GL(n, \mathbb{C}), g^\dagger g = e\}$
- il **gruppo speciale unitario** $SU(n) = \{g | g \in SL(n, \mathbb{C}), g^\dagger g = e\} = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$

Un'arbitraria matrice complessa $n \times n$ ha $2n^2$ parametri reali. Per $SU(n)$ quindi, la richiesta di unitarietà impone n^2 condizioni, e la richiesta di determinante 1 impone un'altra condizione; quindi restano $n^2 - 1$ parametri liberi, a cui corrispondono gli $n^2 - 1$ generatori dell'algebra.

1.1.4 Pesì e radici

Per ragioni che saranno chiarite nel par. 1.2.2 è utile individuare l'insieme di generatori reciprocamente commutanti il più largo possibile per poterli diagonalizzare. Il più ampio sottoinsieme di generatori hermitiani che commutano tra loro è detto **algebra di Cartan**; essa è essenzialmente unica poiché qualsiasi scelta è equivalente.

Pertanto, fissata una rappresentazione D esisteranno m generatori di Cartan H_i che soddisfano

$$H_i = H_i^\dagger, \quad [H_i, H_j] = 0$$

e si potrà scegliere una base in modo che

$$\text{Tr}(H_i H_j) = k_D \delta_{ij}$$

per $i, j = 1 \dots m$; m è detto **rango** dell'algebra. Si prova [10] che il numero di operatori di Casimir è uguale al rango dell'algebra.

Dopo la diagonalizzazione gli stati della rappresentazione D saranno $|\mu, x, D\rangle$ con

$$H_i |\mu, x, D\rangle = \mu_i |\mu, x, D\rangle$$

e x altro parametro che determina lo stato.

Gli autovalori μ_i sono chiamati **pesi**. Il vettore degli m μ_i è detto **vettore peso**. In una base arbitraria della sottoalgebra di Cartan, le componenti $\mu_1, \mu_2 \dots$ di un vettore peso sono fissate; di conseguenza, si può definire un vettore peso **positivo** se la sua prima componente non nulla è positiva, altrimenti **negativo**.

Per la definizione (1.13), gli stati su cui agisce la rappresentazione aggiunta corrispondono ai generatori stessi. Denotati come $|X_a\rangle$, essi costituiscono uno spazio vettoriale con prodotto scalare

$$\langle X_a | X_b \rangle = \lambda^{-1} \text{Tr} \left(X_a^\dagger X_b \right)$$

e l'azione di un generatore su tali stati risulta immediatamente [8] essere

$$X_a |X_b\rangle = |[X_a, X_b]\rangle \quad .$$

Si vede subito [8] che gli stati corrispondenti ai generatori di Cartan hanno peso nullo e sono ortonormali. Gli altri stati della rappresentazione aggiunta hanno in generale peso non nullo:

$$H_i |E_\alpha\rangle = \alpha_i |E_\alpha\rangle \quad (1.17)$$

e quindi i corrispondenti generatori soddisfano

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha \quad .$$

In generale gli E_α non sono hermitiani, e prendendo l'aggiunta della precedente si trova subito

$$E_\alpha^\dagger = E_{-\alpha} \quad .$$

I pesi α_i sono chiamati **radici** e il vettore α di componenti α_i è il **vettore radice**.

Un vettore radice è **semplice** se non può essere scritto come somma di altri vettori radice.

Gli $E_{\pm\alpha}$ sono chiamati rispettivamente operatori di **innalzamento** e di **abbassamento** per i pesi, in quanto si ha

$$H_i E_{\pm\alpha} |\mu, D\rangle = [H_i, E_{\pm\alpha}] |\mu, D\rangle + E_{\pm\alpha} H_i |\mu, D\rangle = (\mu \pm \alpha)_i E_{\pm\alpha} |\mu, D\rangle \quad . \quad (1.18)$$

Si trova l'importante risultato [8]

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha \cdot H \quad .$$

Questi concetti sono particolarmente utili in quanto si può provare [8] che se un vettore peso può essere abbassato dai generatori di tutte le radici semplici, esso è il peso più alto di una rappresentazione irriducibile, e vedremo quale sia appunto l'importanza di determinare quest'ultimo. Inoltre, dalla geometria delle radici semplici è possibile ricostruire l'intera algebra.

1.2 Gruppi di trasformazioni e simmetrie

1.2.1 Gruppi di trasformazioni

Per trasformazione di un sistema fisico si intende un'operazione fisica su di esso effettuata. In un sistema fisico esiste una legge di composizione "naturale" per le trasformazioni: se g_1 e g_2 sono due trasformazioni, con $g_1 g_2$ si intende la successione delle due trasformazioni g_1 e g_2 . E' per questo che la teoria dei gruppi è il linguaggio più adatto per la formalizzazione matematica delle trasformazioni fisiche, giacché le proprietà gruppali sono verificate per le operazioni di interesse fisico che si effettuano sul sistema; in particolare, in questo contesto ci soffermiamo sui sistemi quantistici.

Una trasformazione è una **simmetria** per un sistema fisico se essa trasforma ogni sottospazio relativo ad un dato autovalore dell'Hamiltoniana in se stesso. In questo senso, diciamo che per ogni elemento g del gruppo di tali trasformazioni esiste un operatore $D(g)$ sullo spazio di Hilbert che trasforma uno stato in uno equivalente. Tali operatori costituiscono una rappresentazione del gruppo di trasformazioni in quanto gli stati trasformati rappresentano il sistema fisico trasformato. Così per ogni insieme di simmetrie esiste una rappresentazione di un gruppo di trasformazioni sullo spazio di Hilbert, ovvero lo spazio di Hilbert si trasforma secondo una rappresentazione del gruppo.

1.2.2 Gruppo di simmetria dell'Hamiltoniana

In termini matematici, si ha

$$H |\psi\rangle = E |\psi\rangle \Rightarrow D(g) H |\psi\rangle = D(g) E |\psi\rangle \Rightarrow [D(g) H D^{-1}(g)] D(g) |\psi\rangle = E D(g) |\psi\rangle \quad .$$

$D(g)$ trasforma lo spazio di Hilbert in uno equivalente se $|\psi\rangle$ e $D(g) |\psi\rangle$ soddisfano la stessa equazione, quindi se $H = D(g) H D^{-1}(g)$ ovvero se e solo se

$$[H, D(g)] = 0 \quad . \quad (1.19)$$

Quindi possiamo concludere che un gruppo di trasformazioni è una simmetria per un sistema fisico se le sue rappresentazioni commutano con l'Hamiltoniana.

Da questo possiamo dedurre tre importanti conseguenze:

- Per quanto visto gli stati equivalenti $|\psi\rangle$ e $D(g)|\psi\rangle$ hanno la stessa energia; inoltre, poiché H e $D(g)$ commutano, essi ammettono un sistema di autostati comune. Queste due proprietà implicano che se \mathcal{G} è il gruppo di simmetria dell'Hamiltoniana H , allora ogni sottospazio degenere di H è invariante per trasformazioni di \mathcal{G} e quindi costituisce una rappresentazione del gruppo.

Si può quindi applicare il lemma di Schur e affermare che tutte le rappresentazioni irriducibili del gruppo di simmetria \mathcal{G} dell'Hamiltoniana H corrispondono a sottospazi degeneri di H ; in altre parole, la rappresentazione è completamente riducibile in ciascun sottospazio. Più in generale si può affermare che se un operatore hermitiano H commuta con tutti gli elementi $D(g)$ di un gruppo \mathcal{G} , ovvero se il sistema fisico è simmetrico rispetto al gruppo di trasformazioni \mathcal{G} , gli autostati di H possono essere scelti in modo che essi si trasformino secondo le rappresentazioni irriducibili di \mathcal{G} .

Poiché la degenerazione dell'energia è dovuta alla simmetria del sistema, si parla di **degenerazione essenziale** (in contrapposizione alla **degenerazione accidentale** [11]).

- E' ovvio che la fisica del fenomeno non deve essere modificata da un'operazione di simmetria. In particolare, esse devono lasciare invariate le probabilità di transizione del sistema. Quindi, se rispetto al gruppo \mathcal{G} gli stati del sistema si trasformano come $|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = D(g)|\psi\rangle$, allora la probabilità che il sistema descritto da $|\psi\rangle$ sia trovato nello stato $|\phi\rangle$ non deve essere cambiata da $D(g)$:

$$|\langle\phi|\psi\rangle|^2 = |\langle\phi'|\psi'\rangle|^2 = |\langle\phi|D^\dagger(g)D(g)|\psi\rangle|^2$$

e quindi \mathcal{G} deve essere un gruppo unitario.

- La rappresentazione della trasformazione $D(g)$ non ha dipendenza temporale esplicita, e l'equazione del moto

$$i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$$

non è modificata da un'operazione di simmetria. Di conseguenza, il valore di aspettazione di $D(g)$ è una costante del moto:

$$i\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|D(g)|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t)|D(g)H - HD(g)|\psi(t)\rangle = 0 \quad .$$

Inoltre, se \mathcal{G} è un gruppo di Lie, essendo unitario, i suoi generatori saranno hermitiani e quindi osservabili quantomeccaniche. Di conseguenza, anche gli autovalori di tali osservabili saranno costanti del moto, e quindi buoni numeri quantici: la simmetria del sistema dà luogo a leggi di conservazione.

In teoria delle perturbazioni [33] si ipotizza che si possano distinguere nell'Hamiltoniana due contributi: il primo, detto Hamiltoniana **non perturbata** H_0 , relativamente semplice e tale che quindi si possa risolvere esattamente il relativo problema agli autovalori; il secondo $H_1 = \lambda V$ che possiamo chiamare **perturbazione**, proporzionale ad un parametro reale λ reale e piccolo. In questo contesto si usa dire che la simmetria è **rotta** dalla perturbazione. Ne segue che autostati di H_0 degeneri possono dividersi in livelli distinti in presenza della perturbazione eliminando la degenerazione.

L'uso delle proprietà di simmetria di un sistema fisico è spesso l'unico modo di ottenere informazioni nei casi in cui la diagonalizzazione di H è particolarmente complessa, ovvero quando l'equazione di Schrödinger non è risolvibile analiticamente.

1.3 Il gruppo $SU(2)$

1.3.1 Rappresentazioni irriducibili

L'algebra di $SU(2)$ è

$$[J_j, J_k] = i\epsilon_{jkl}J_l \quad . \quad (1.20)$$

Essa è la più semplice delle algebre di Lie compatte in quanto ϵ_{ijk} con $i, j, k = 1, 2, 3$ è l'oggetto antisimmetrico a tre indici più semplice possibile.

L'obiettivo dello studio di un gruppo è di ridurre lo spazio di Hilbert degli stati del sistema in esame in forma diagonale a blocchi, ovvero costruirne le rappresentazioni irriducibili.

Supponiamo che questo spazio abbia dimensione N e si trasformi secondo una certa rappresentazione irriducibile dell'algebra. Ovviamente vogliamo diagonalizzare più elementi possibile dell'algebra, ma poiché non vi sono operatori che commutano, questo è possibile solo per uno di essi. Scegliamo J_3 e prendiamo gli autostati con il più alto valore di J_3 , j . Abbiamo così un insieme di stati tali che

$$J_3 |j, \alpha\rangle = j |j, \alpha\rangle$$

dove α è un indice necessario nel caso in cui ci siano più autostati con J_3 massimo. Ovviamente si ha

$$\langle j, \alpha | j, \beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad .$$

Ora definiamo gli operatori di innalzamento e abbassamento

$$J^\pm = \frac{(J_1 \pm iJ_2)}{\sqrt{2}} \quad (1.21)$$

che soddisfano

$$[J_3, J^\pm] = \pm J^\pm \quad (1.22a)$$

$$[J^+, J^-] = J_3 \quad . \quad (1.22b)$$

Infatti si ha che se

$$J_3 |m\rangle = m |m\rangle$$

allora

$$J_3 J^\pm |m\rangle = J^\pm J_3 |m\rangle \pm J^\pm |m\rangle = (m \pm 1) J^\pm |m\rangle \quad .$$

Vedremo ora la loro utilità nella costruzione delle rappresentazioni irriducibili.

Per definizione di j si avrà

$$J^+ |j, \alpha\rangle = 0 \quad \forall \alpha \quad ,$$

mentre in generale

$$J^- |j, \alpha\rangle \equiv N_j(\alpha) |j-1, \alpha\rangle$$

e imponendo l'ortonormalizzazione degli stati con diversi α si trova [8]

$$N_j(\alpha) = \sqrt{j} \equiv N_j \quad .$$

Analogamente si ha

$$J^+ |j-i, \alpha\rangle = \frac{1}{N_j} J^+ J^- |j, \alpha\rangle = \frac{1}{N_j} [J^+, J^-] |j, \alpha\rangle = \frac{j}{N_j} |j, \alpha\rangle = N_j |j, \alpha\rangle \quad .$$

Quindi come conseguenza dell'algebra si possono definire gli autostati in modo che gli operatori di innalzamento e abbassamento agiscano senza modificare α . Il procedimento si può reiterare per $|j-2, \alpha\rangle$ e così via, ottenendo infine [8] l'intera serie di stati ortonormali $|j-k, \alpha\rangle$ che soddisfano

$$J^- |j-k, \alpha\rangle = N_{j-k} |j-k-1, \alpha\rangle \quad (1.23a)$$

$$J^+ |j-k-1, \alpha\rangle = N_{j-k} |j-k, \alpha\rangle \quad (1.23b)$$

con, posto $k = j - m$,

$$N_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \quad . \quad (1.24)$$

Poiché abbiamo assunto che lo spazio sia finitodimensionale, il processo non potrà continuare indefinitamente, ovvero deve esistere un intero l tale che

$$J^- |j-l, \alpha\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{j-l} = \sqrt{(2j-l)(l+1)} = 0$$

il che implica

$$j = \frac{l}{2} \quad . \quad (1.25)$$

Quindi lo spazio è stato suddiviso in sottospazi invarianti rispetto all'algebra, uno per ogni valore di α , perché i generatori non modificano α . Ma poiché abbiamo assunto l'irriducibilità, deve esistere un unico valore di α , che quindi può essere eliminato nella caratterizzazione degli stati. Inoltre non possono esistere altri autostati, altrimenti il sottospazio costruito sarebbe non banale (e invariante). In conclusione abbiamo esplicitato come i generatori agiscono sulle rappresentazioni irriducibili finitodimensionali.

Dalle relazioni di commutazione si trova che la quantità

$$(J^+ J^- + J^- J^+) + J_3^2 \equiv J^2 \quad (1.26)$$

commuta con tutti e tre i generatori; essa è quindi un operatore di Casimir. Poiché si vede [13] che

$$J^2 J^\pm |j, m\rangle = J^\pm J^2 |j, m\rangle$$

segue che tutti gli stati generati da uno particolare con l'applicazione ripetuta degli operatori di innalzamento e abbassamento hanno lo stesso valore di J^2 ; pertanto, rappresentazioni diverse possono essere individuate dall'autovalore di J^2 che si trova subito essere $j(j+1)$, o in modo equivalente con il massimo valore j di J_3 .

Introduciamo ora la notazione standard in cui gli autostati sono individuati dal massimo valore di J_3 nella rappresentazione e dallo specifico autovalore di J_3 :

$$|j, m\rangle \quad .$$

Gli elementi di matrice dei generatori sono determinati a partire dagli elementi di matrice di J_3 e di J^\pm :

$$\langle j, m' | J_3 |j, m\rangle = m \delta_{m'm} \quad (1.27a)$$

$$\langle j, m' | J^+ |j, m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \delta_{m',m+1} \quad (1.27b)$$

$$\langle j, m' | J^- |j, m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \delta_{m',m-1} \quad . \quad (1.27c)$$

Questi elementi di matrice definiscono la **rappresentazione spin j** dell'algebra $SU(2)$ (Figura 1.1):

$$[J_a^j]_{m'm} = \langle j, m' | J_a |j, m\rangle \quad (1.28)$$

con $m, m' = -j \dots j$. Poiché gli autostati sono quindi $2j+1$, questa è la dimensione della rappresentazione.

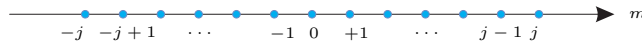


Figura 1.1: Grafico della rappresentazione di spin j .

Costruiamo esplicitamente le prime rappresentazioni.

• $j=1/2$

$$J_1^{1/2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_1 \quad (1.29a)$$

$$J_2^{1/2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_2 \quad (1.29b)$$

$$J_3^{1/2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_3 \quad (1.29c)$$

dove le σ sono le **matrici di Pauli**

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

La rappresentazione di spin $1/2$ è la più semplice rappresentazione non banale di $SU(2)$, che proprio è la rappresentazione fondamentale che sarà definita in seguito.

- $j=1$

$$J_1^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.31a)$$

$$J_2^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (1.31b)$$

$$J_3^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.31c)$$

Si vede che essa è proprio la rappresentazione aggiunta.

- In modo analogo si costruiscono le rappresentazioni di dimensione superiore.

Il procedimento per la costruzione delle rappresentazioni irriducibili attuata può essere generalizzato per qualsiasi algebra di Lie compatta. Poiché gli autovalori di J_3 sono i pesi, essa è detta **costruzione del massimo peso** e fornisce una procedura sistematica per ridurre una qualsiasi rappresentazione finitodimensionale in forma diagonale a blocchi:

1. Diagonalizzare J_3 ;
2. Individuare gli stati di valore j di J_3 massimo;
3. Per ognuno di essi costruire esplicitamente gli stati della rappresentazione irriducibile di spin j applicando gli operatori di abbassamento allo stato con massimo J_3 ;
4. Poiché ora il sottospazio generato da queste rappresentazioni è in forma canonica, considerare il sottospazio ad esso ortogonale.
5. Applicare ad esso la procedura dal punto 2.

Il risultato finale è la costruzione di una base per lo spazio di Hilbert nella forma

$$|j, m, \alpha\rangle$$

dove j si riferisce alla rappresentazione, m al valore di J_3 e α alle altre eventuali osservabili che possono essere diagonalizzate per caratterizzare gli stati. Gli stati con uguale j e tutti i possibili diversi valori di m si trasformano tra loro rispetto all'azione del gruppo (Figura 1.2); essi formano una base della rappresentazione irriducibile $(2j + 1)$ -dimensionale del gruppo, ovvero un multipletto.

Ovviamente si ha

$$\langle j', m', \alpha' | j, m, \alpha \rangle = \delta_{m'm} \delta_{j'j} \delta_{\alpha'\alpha} \quad .$$

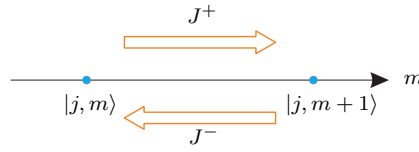


Figura 1.2: Azione degli operatori di innalzamento e abbassamento sugli stati delle rappresentazioni fondamentali di $SU(2)$.

Per quanto visto sui prodotti tensoriali, un sistema composto formato dai due sistemi caratterizzati da j_A e j_B può essere descritto in termini della base

$$|j_A j_B m_A m_B\rangle \equiv |j_A, m_A\rangle |j_B, m_B\rangle \quad .$$

L'operatore combinato

$$J = J_A + J_B$$

soddisfa la stessa algebra di Lie e ha autovalori $J(J+1)$, M di J^2 , J_3 ; infatti [10], il prodotto delle due rappresentazioni irriducibili di dimensione $2j_A + 1$ e $2j_B + 1$ può essere decomposto nella somma di rappresentazioni riducibili di dimensione $2J+1$ con $J = |j_A - j_B|, |j_A - j_B| + 1, \dots, j_A + j_B$ e base

$$|j_A j_B J M\rangle$$

dove $M = m_A + m_B$. Una base può essere espressa in termini dell'altra da

$$|j_A j_B J M\rangle = \sum_{m_A, m_B} C(m_A m_B; J M) |j_A j_B m_A m_B\rangle \quad (1.32)$$

dove i coefficienti C sono chiamati **coefficienti di Clebsh-Gordan**.

1.3.2 Operatori tensoriali

Un **operatore tensoriale** è un operatore che rispetto alla commutazione con i generatori di un'algebra di Lie si trasforma secondo una rappresentazione irriducibile di essa. In questo contesto è utile lo studio degli operatori tensoriali dell'algebra $SU(2)$. Un operatore tensoriale che si trasforma secondo la rappresentazione di spin s di $SU(2)$ consiste di un insieme di operatori O_l^s con $l = -s \dots s$ tale che

$$[J_a, O_l^s] = O_m^s [J_a^s]_{ml} \quad . \quad (1.33)$$

Si prova [8] che ogni rappresentazione irriducibile ha dimensione finita ed è equivalente ad una delle rappresentazioni ottenute mediante la costruzione del massimo peso. Per semplificare l'uso degli operatori tensoriali, conviene scegliere la base dell'operatore in modo che nella relazione di commutazione compaia proprio la rappresentazione di spin s .

Per gli elementi di matrice degli operatori tensoriali si dimostra [8] il fondamentale *teorema di Wigner-Eckart*:

$$\langle J, m', \beta | O_l^s | j, m, \alpha \rangle = \delta_{m', l+m} \langle J, l+m | s, j, l, m \rangle \cdot \langle J, \beta | O^s | j, \alpha \rangle \quad . \quad (1.34)$$

1.3.3 Applicazioni allo studio di una generica algebra

Oltre che per le specifiche applicazioni proprie, l'algebra $SU(2)$ è particolarmente utile nell'analisi di una qualsiasi algebra di Lie semplice. Infatti, come anticipato, quest'ultima può essere studiata mediante la costruzione del massimo peso: prima si individua il massimo insieme di osservabili hermitiane e se ne determinano gli autostati comuni etichettandoli con i rispettivi autovalori; queste osservabili saranno a loro volta il più ampio insieme di generatori che commutano tra loro, mentre gli altri si comporteranno come gli operatori di innalzamento e abbassamento.

Ora, il risultato fondamentale [8] è che ad ogni operatore di innalzamento corrisponde un sottogruppo $SU(2)$ dell'intera algebra. In particolare, per ogni coppia non nulla di vettori radice $\pm\alpha$, esiste una sottoalgebra $SU(2)$ del gruppo con generatori

$$E^\pm \equiv |\alpha|^{-1} E_{\pm\alpha} \quad (1.35a)$$

$$E_3 \equiv |\alpha|^{-2} \alpha \cdot H \quad . \quad (1.35b)$$

In generale, gli stati di ogni rappresentazione irriducibile dell'intera algebra possono essere decomposti in rappresentazioni irriducibili di ognuna di queste sottoalgebre $SU(2)$. Questo impone dei vincoli sulle radici, per esempio si prova [8] che esiste una corrispondenza biunivoca tra vettori radice e generatori.

Più in generale, si prova [8] che per ogni vettore peso μ di una rappresentazione D , l'autovalore di E_3 è

$$E_3 |\mu, x, D\rangle = \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} |\mu, x, D\rangle$$

e quindi

$$\frac{2\alpha \cdot \mu}{\alpha^2}$$

è un intero.

Il generico autostato $|\mu, x, D\rangle$ può anche essere scritto come combinazione lineare di stati che si trasformano secondo le rappresentazioni delle sottoalgebre $SU(2)$. Supponiamo che il massimo spin che compare nella combinazione lineare sia j . Allora deve esistere un intero non negativo p tale che, se il peso $\mu + p\alpha$ è il massimo valore di E_3 nella rappresentazione spin j , si abbia

$$(E^+)^{p+1} |\mu, x, D\rangle = 0$$

e quindi

$$\frac{\alpha \cdot (\mu + p\alpha)}{\alpha^2} = \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} + p = j \quad . \quad (1.36a)$$

Analogamente deve esistere un intero non negativo q tale che

$$(E^-)^{q+1} |\mu, x, D\rangle = 0$$

e quindi

$$\frac{\alpha \cdot (\mu - q\alpha)}{\alpha^2} = \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} - q = -j \quad . \quad (1.36b)$$

Sommando la (1.36a) e la (1.36b) si ottiene

$$\frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}(p - q) \quad , \quad (1.37)$$

relazione nota come *master formula*. Essa è di grande utilità poiché permette di costruire una classificazione geometrica di tutte le algebre di Lie compatte. Per esempio, da essa si ricava [8] che l'angolo tra due radici α e β è dato da

$$\cos^2 \theta_{\alpha\beta} = \frac{(\alpha \cdot \beta)^2}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{(p - q)(p' - q')}{4} \quad .$$

Inoltre, sottraendo le due stesse relazioni si trova

$$p + q = 2j \quad , \quad (1.38)$$

ovvero noti p e q è nota la rappresentazione di massimo spin.

Se le radici semplici di un'algebra di Lie semplice sono α^j con $j = 1 \dots m$ e μ è il vettore peso più alto, allora $p = 0$ e quindi

$$\frac{2\alpha_j \cdot \mu}{\alpha_j^2} = l^j \quad (1.39)$$

dove gli l^j sono interi non negativi che specificano completamente μ chiamati **coefficienti di Dynkin**.

È utile considerare i vettori peso μ^j che soddisfano

$$\frac{2\alpha_j \cdot \mu^k}{\alpha_j^2} = \delta_{jk}$$

e quindi ogni massimo peso μ può essere scritto in modo unico come

$$\mu = \sum_{j=1}^m l^j m^j \quad . \quad (1.40)$$

I vettori μ^j sono chiamati **pesi fondamentali** e le m rappresentazioni irriducibili che hanno questi come massimi pesi sono chiamate **rappresentazioni fondamentali** D^j .

1.4 Il gruppo $SU(3)$

1.4.1 Rappresentazioni irriducibili

$SU(3)$ è generato da matrici 3×3 hermitiane a traccia nulla. Quest'ultima condizione è necessaria affinché il determinante della matrice della rappresentazione sia 1. La forma standard storicamente scelta per queste matrici è costituita da una generalizzazione delle matrici di

Pauli, le **matrici di Gell-Mann**:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{1.41}$$

infatti le prime tre contengono le matrici di Pauli agenti su un sottospazio:

$$\lambda_a = \begin{pmatrix} \sigma_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a = 1, 2, 3 \quad .$$

abc	f_{abc}	abc	d_{abc}
123	1	118	$1/\sqrt{3}$
147	1/2	146	1/2
156	-1/2	157	1/2
246	1/2	228	$1/\sqrt{3}$
257	1/2	247	-1/2
345	1/2	256	1/2
367	-1/2	338	$1/\sqrt{3}$
458	$\sqrt{3}/2$	344	1/2
678	$\sqrt{3}/2$	355	1/2
		366	-1/2
		377	-1/2
		448	$-1/2\sqrt{3}$
		558	$-1/2\sqrt{3}$
		668	$-1/2\sqrt{3}$
		778	$-1/2\sqrt{3}$
		888	$-1/\sqrt{3}$

Tabella 1.1: Costanti di struttura di $SU(3)$.

I generatori di $SU(3)$ sono convenzionalmente definiti da

$$T_a = \frac{1}{2} \lambda_a \tag{1.42}$$

e soddisfano

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}$$

e

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c \quad . \tag{1.43}$$

Le costanti di struttura possono essere determinate esplicitamente dalle regole di commutazione delle T_a (Tabella 1.1).

Si prova inoltre [9] che l'anticommutatore è dato dalla formula

$$\{T_a, T_b\} = \frac{1}{3}\delta_{ab} + d_{abc}T_c$$

dove le costanti d_{abc} sono invece totalmente simmetriche.

Evidentemente, per $a = 1, 2, 3$ le T_a generano un sottogruppo $SU(2)$ di $SU(3)$. Osserviamo inoltre che anche le coppie $\lambda_4 - \lambda_5$ e $\lambda_6 - \lambda_7$ possono essere pensate come membri di un insieme di matrici di Pauli generalizzate, prendendo come terzo elemento un'opportuna combinazione lineare di λ_3 e λ_8 ; pertanto, l'insieme originale di generatori può essere sostituito da altri due insiemi equivalenti noti con il nome di U -spin e V -spin per analogia con l' I -spin (Tabella 1.2).

(1)	$\underbrace{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}_{2(I\text{-spin})}, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8 (= \sqrt{3}Y)$
(2)	$\lambda_1, \lambda_2, \underbrace{\rho, \lambda_4, \lambda_5}_{2(U\text{-spin})}, \lambda_6, \lambda_7, \rho' = (\sqrt{3}Q)$
	$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\lambda_3 + \sqrt{3}\lambda_8) = I_3 + \frac{3}{2}Y$ $\rho' = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\lambda_3 + \lambda_8) = \sqrt{3}(I_3 + \frac{1}{2}Y) = \sqrt{3}Q$
(3)	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \underbrace{\epsilon, \lambda_6, \lambda_7}_{2(V\text{-spin})}, \epsilon' = (\sqrt{3}(\frac{1}{2}Y - I_3))$
	$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\lambda_3 - \lambda_8) = \frac{3}{2}Y - I_3$ $\epsilon' = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\lambda_8 - \sqrt{3}\lambda_3) = \sqrt{3}(\frac{1}{2}Y - I_3)$

Tabella 1.2: Insiemi equivalenti di generatori di $SU(3)$.

Si conviene nell'inserire T_3 nella sottoalgebra di Cartan, e si vede che esiste uno ed un solo generatore, T_8 , che commuta con T_3 , che quindi va a completare la sottoalgebra di Cartan:

$$H_1 \equiv T_3 \quad H_2 \equiv T_8 \quad .$$

Poiché H_1 e H_2 sono già diagonali, autostati e pesi associati sono:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \quad (1.44a)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \quad (1.44b)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad (1.44c)$$

I vettori peso possono essere riportati in un grafico H_1 - H_2 detto **diagramma dei pesi**, e vanno a disporsi ai vertici di un triangolo equilatero (Figura 1.3)

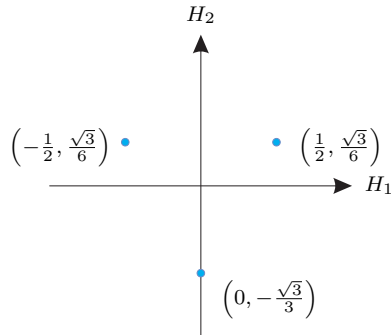


Figura 1.3: Diagramma dei pesi di **3**.

In analogia con quanto già fatto per $SU(2)$ definiamo gli operatori di innalzamento e abbassamento in relazione ai quali si trovano i vettori radice:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (T_1 \pm iT_2) = E_{(\pm 1, 0)} \quad (1.45a)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (T_4 \pm iT_5) = E_{(\pm 1/2, \pm \sqrt{3}/2)} \quad (1.45b)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (T_6 \pm iT_7) = E_{(\mp 1/2, \pm \sqrt{3}/2)} \quad (1.45c)$$

Esse si dispongono ai vertici di un esagono regolare nel diagramma dei pesi, e si vede che ciascuna coppia forma una sottoalgebra $SU(2)$ (Figura 1.4).

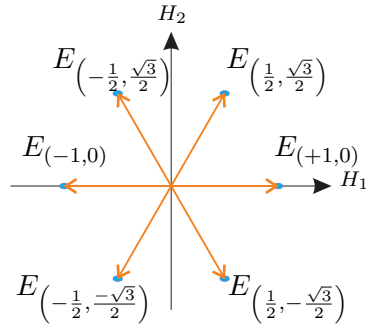


Figura 1.4: Operatori di innalzamento e abbassamento di $SU(3)$.

Le tre globalmente permettono di passare da uno stato all'altro qualsiasi nella rappresentazione irriducibile (Figura 1.5).

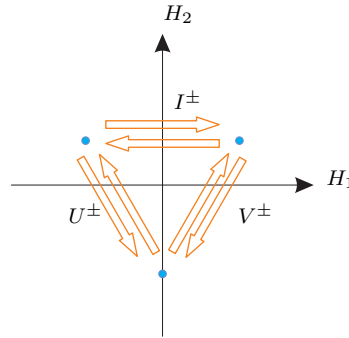


Figura 1.5: Azione degli operatori di innalzamento e di abbassamento sugli stati delle rappresentazioni irriducibili di $SU(3)$.

Le radici semplici di $SU(3)$ sono

$$\alpha^1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \tag{1.46a}$$

$$\alpha^2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \tag{1.46b}$$

e imponendo $\mu^i \cdot \alpha^j = 0$ per $i \neq j$ si trova che i massimi pesi delle due rappresentazioni fondamentali sono

$$\mu^1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \tag{1.47a}$$

$$\mu^2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right) \tag{1.47b}$$

La prima corrisponde proprio a quella generata dalle matrici di Gell-Mann, mentre per la seconda, avendo a disposizione massimo peso e operatori di innalzamento e di abbassamento, si può applicare la costruzione dei massimi pesi e si trova [8] che i pesi sono

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right) \quad (1.48a)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad (1.48b)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right) \quad (1.48c)$$

e il relativo diagramma dei pesi è quindi quello mostrato in Figura 1.6.

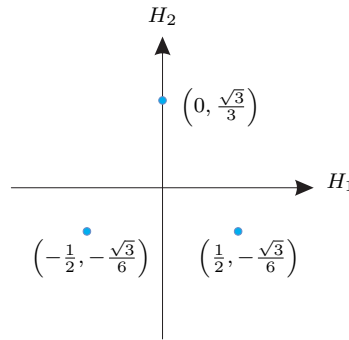


Figura 1.6: Diagramma dei pesi di $\bar{\mathbf{3}}$.

Tramite le leggi di commutazione si ricava che gli elementi di matrice degli operatori di innalzamento e abbassamento tra due stati qualsiasi di entrambe le rappresentazioni fondamentali valgono tutti $+1$ o -1 , quindi i due triangoli sono equilateri e hanno lato unitario.

Si osservi che i pesi della seconda rappresentazione fondamentale sono proprio gli opposti di quelli della prima, e questo significa che le due rappresentazioni sono legate da un'operazione di coniugazione complessa. Infatti, se T_a sono i generatori di una rappresentazione D di una certa algebra di Lie, gli oggetti $-T_a^*$ soddisfano le stesse relazioni di commutazione in quanto la costante di struttura è reale. Essa è chiamata **complessa coniugata** della rappresentazione D ed è denotata con \bar{D} . D è detta rappresentazione **reale** se coincide con la sua complessa coniugata, altrimenti è **complessa**. I generatori di Cartan della rappresentazione complessa coniugata sono $-H_i^*$; poiché H_i è hermitiano, H_i^* ha gli stessi autovalori di H_i , quindi se μ è un peso in D , $-\mu$ è un peso in \bar{D} e in particolare il massimo peso in D è l'opposto del minimo peso di \bar{D} .

Procediamo quindi con la costruzione delle rappresentazioni di dimensione superiore. Ci sono diverse notazioni per individuare le rappresentazioni di $SU(3)$.

Poiché abbiamo visto che i coefficienti di Dynkin specificano completamente il massimo peso, una notazione consiste appunto nella coppia dei coefficienti di Dynkin $(l^1, l^2) = (n, m)$. Essa ha massimo peso $n\mu^1 + m\mu^2$. Da quanto visto riguardo ai massimi pesi, è chiaro che la rappresentazione complessa coniugata di (n, m) è (m, n) ; rappresentazioni del tipo (n, n) sono quindi reali. Con metodi di calcolo combinatorio o di calcolo tensoriale si prova [14] che la dimensione della rappresentazione (n, m) è

$$D(n, m) = \frac{(n+1)(m+1)(n+m+2)}{2} .$$

Un'altra comune notazione è di individuare una rappresentazione con la sua dimensione e la sua complessa coniugata con la dimensione barrata.

Quindi le rappresentazioni fondamentali di $SU(3)$ sono $(1, 0) = \mathbf{3}$ e $(0, 1) = \bar{\mathbf{3}}$.

Così come per $SU(2)$ possiamo continuare a costruire rappresentazioni di massimo peso superiore applicando la procedura standard. Pertanto in generale, tutti gli stati di una rappresentazione irriducibile possono essere generati da ripetute applicazioni degli operatori di innalzamento e abbassamento e andranno ad occupare determinati siti nel diagramma dei pesi. Per le rappresentazioni finitodimensionali, solo un numero finito di siti può essere occupato, e la natura della rappresentazione sarà determinata una volta che siano determinati i siti occupati e la loro molteplicità. Mediante queste tecniche algebriche si ottengono [13] le seguenti proprietà geometriche generali delle rappresentazioni irriducibili di $SU(3)$ (Figura 1.7):

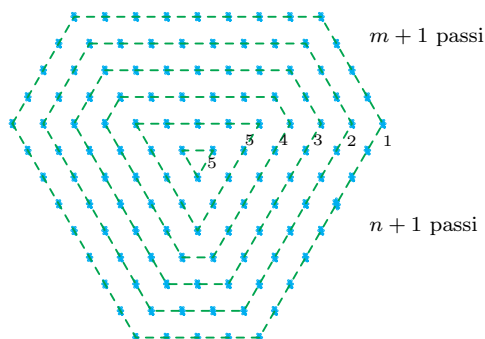
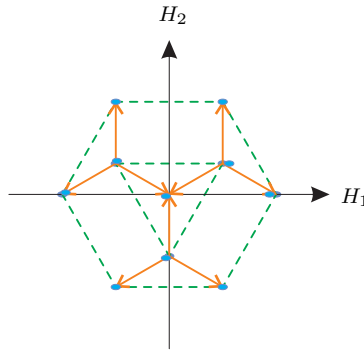


Figura 1.7: Rappresentazione grafica di (n, m) .

- Il contorno della rappresentazione è convesso.
- Tutte le rappresentazioni irriducibili (n, m) di $SU(3)$ hanno forma esagonale, con lati costituiti da $n + 1$ e $m + 1$ passi.
- L'esagono è simmetrico rispetto all'asse H_2 .
- Passando da una cornice all'altra verso l'interno, la degenerazione dei pesi aumenta di uno ogni volta fino ad incontrare una cornice triangolare da cui la degenerazione resta costante.

- In generale ci sono più stati per un dato valore di (H_1, H_2) , pertanto è necessario un altro parametro per distinguerli. Una possibilità è fornita dall'operatore di Casimir dell'algebra $SU(2)$ di T_1 , T_2 e T_3 .
- Utilizzando gli stati delle rappresentazioni fondamentali come vettori, è possibile ricavare in modo grafico la decomposizione dei prodotti tensoriali nelle loro rappresentazioni irriducibili (Figura 1.8).


 Figura 1.8: Metodo grafico per la costruzione di $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$.

Le rappresentazioni successive sono mostrate in Figura 1.9.

La proprietà fondamentale delle rappresentazioni (n, m) è che esse formano un insieme completo di rappresentazioni irriducibili non equivalenti [15].

1.4.2 Tensori

I tensori sono strumenti di grande utilità nei calcoli in $SU(3)$ e in molti altri gruppi; inoltre, l'idea di tensore è strettamente connessa a quella di funzione d'onda in meccanica quantistica.

Denotiamo gli stati di $\mathbf{3}$ come

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right\rangle \equiv |1\rangle \quad (1.49a)$$

$$\left| -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right\rangle \equiv |2\rangle \quad (1.49b)$$

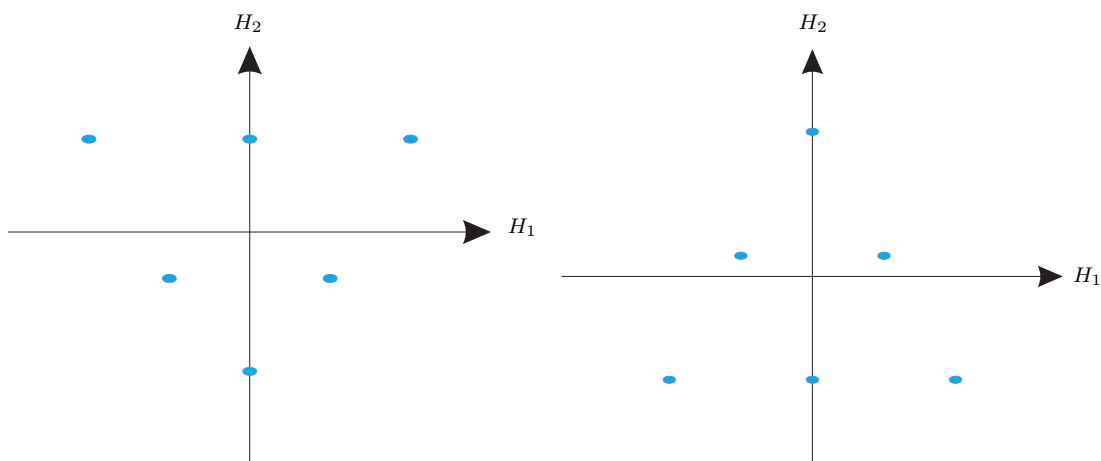
$$\left| 0, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle \equiv |3\rangle \quad (1.49c)$$

Se si definisce un insieme di matrici con un indice superiore e uno inferiore

$$[T_a]^i_j = \frac{1}{2}[\lambda_a]_{ij}$$

$$(2, 0) = \mathbf{6}$$

$$(0, 2) = \bar{\mathbf{6}}$$



$$(1, 1) = \mathbf{8} = \bar{\mathbf{8}}$$

$$(3, 0) = \mathbf{10}$$

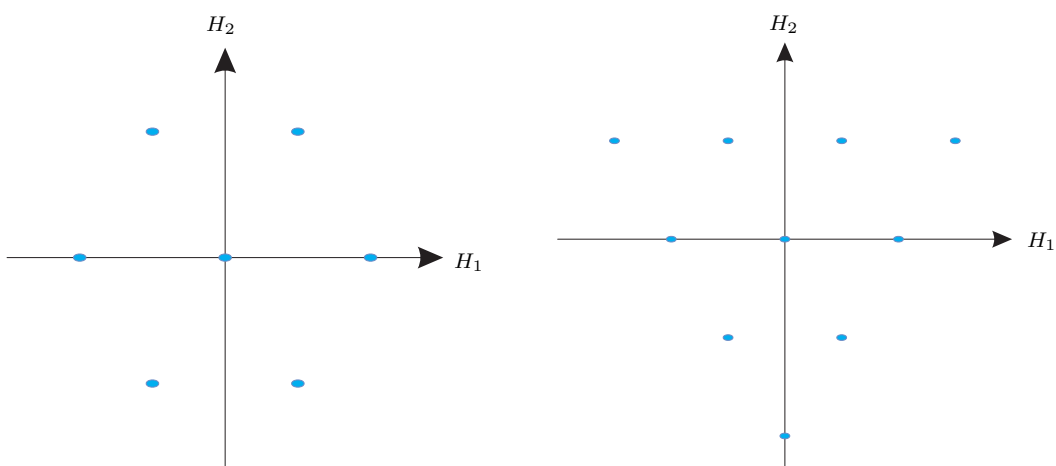


Figura 1.9: Rappresentazioni irriducibili di dimensione superiore di $SU(3)$.

allora gli stati $|i\rangle$ si trasformano rispetto all'algebra secondo

$$T_a |i\rangle = |j\rangle [T_a]_i^j .$$

Denotando gli stati di $\bar{\mathbf{3}}$ come

$$\left| -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right\rangle \equiv |^1\rangle \quad (1.50a)$$

$$\left| \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right\rangle \equiv |^2\rangle \quad (1.50b)$$

$$\left| 0, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle \equiv |^3\rangle \quad (1.50c)$$

allora si ha

$$T_a |^i\rangle = -|^j\rangle [T_a]_j^i .$$

Ora si può definire uno stato nello spazio prodotto tensoriale di $n \mathbf{3}$ e $m \bar{\mathbf{3}}$

$$\left| \begin{smallmatrix} i_1 \dots i_m \\ j_1 \dots j_n \end{smallmatrix} \right\rangle = |^i_1\rangle \dots |^i_n\rangle |_{j_1}\rangle \dots |_{j_n}\rangle \quad (1.51)$$

che si trasforma secondo

$$T_a \left| \begin{smallmatrix} i_1 \dots i_m \\ j_1 \dots j_m \end{smallmatrix} \right\rangle = \sum_{l=1}^n \left| \begin{smallmatrix} i_1 \dots i_m \\ j_1 \dots j_{l-1} k j_{l+1} \dots j_n \end{smallmatrix} \right\rangle [T_a]_{j_l}^k - \sum_{l=1}^m \left| \begin{smallmatrix} i_1 \dots i_{l-1} k i_{l+1} \dots i_m \\ j_1 \dots j_m \end{smallmatrix} \right\rangle [T_a]_k^{i_l} .$$

Consideriamo uno stato arbitrario in questo spazio prodotto tensoriale

$$|v\rangle = \left| \begin{smallmatrix} i_1 \dots i_m \\ j_1 \dots j_n \end{smallmatrix} \right\rangle v_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} . \quad (1.52)$$

v è chiamato **tensore** ; esso è proprio una “funzione d’onda” in quanto

$$v_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} = \left\langle \begin{smallmatrix} i_1 \dots i_m \\ j_1 \dots j_n \end{smallmatrix} \middle| v \right\rangle .$$

Il tensore v è caratterizzato dalle sue **componenti tensoriali** $v_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n}$.

Pertanto si può pensare all’azione dei generatori su $|v\rangle$ come ad un’azione sulle componenti tensoriali:

$$T_a |v\rangle = |T_a v\rangle$$

dove

$$T_a v_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} = \sum_{l=1}^n [T_a]_k^{j_l} v_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots k \dots j_n} - \sum_{l=1}^m [T_a]_{i_l}^k v_{i_1 \dots k \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} .$$

Adesso possiamo usare la costruzione del massimo peso per costruire gli stati del prodotto tensoriale corrispondente alla rappresentazione (n, m) .

Poiché $|^1_1\rangle$ è lo stato di massimo peso di $(1, 0)$ e $|^2\rangle$ di $(0, 1)$, allora lo stato di massimo peso di (n, m) è $\left| \begin{smallmatrix} 222 \dots \\ 111 \dots \end{smallmatrix} \right\rangle$. Esso corrisponde al tensore v_H di componenti

$$v_H_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} = N \delta_{j_1 1} \dots \delta_{j_n 1} \delta_{i_1 2} \delta_{i_m 2} .$$

Ora possiamo costruire tutti gli stati di (n, m) agendo su v_H con gli operatori di abbassamento.

L'importante è notare che v_H ha due proprietà che sono mantenute dalla trasformazione $v_H \rightarrow T_a v_H$:

- v_H è simmetrico negli indici superiori e inferiori;
- v_H soddisfa $\delta_{j_1}^{i_1} v_H^{j_1 \dots j_n}_{i_1 \dots i_m} = 0$;

quindi tutti gli stati di (n, m) corrispondono a tensori simmetrici in entrambi gli indici e a traccia nulla.

Più un generale si dimostrano i seguenti importanti risultati [8]:

- Tensori di data simmetria formano un sottospazio invariante irriducibile; quindi la rappresentazione del gruppo indotta in questo sottospazio dalla rappresentazione fondamentale è irriducibile.
- Le rappresentazioni irriducibili generate da tutte le classi di simmetria sono esaustive.

Un tensore è **invariante** se non cambia sotto una trasformazione di un gruppo. I tensori invarianti di $SU(3)$ sono $\delta_j^i, \epsilon^{ijk}, \epsilon_{ijk}$.

I tensori sono di grande utilità nel decomporre esplicitamente i prodotti tensoriali.

Dati due tensori u ad n indici superiori e m indici inferiori e v a p indici superiori e q indici inferiori, il tensore $u \otimes v$ è definito dal prodotto delle componenti tensoriali:

$$[u \otimes v]_{j_1 \dots j_m j'_1 \dots j'_q}^{i_1 \dots i_n i'_1 \dots i'_p} = u_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n} v_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p} \quad (1.53)$$

che descrive lo stato di prodotto tensoriale $|u\rangle \otimes |v\rangle$. Quindi i prodotti tensoriali possono essere analizzati studiando i relativi tensori. Il procedimento consiste in generale nel costruire rappresentazioni irriducibili a partire dai prodotti tensoriali, esprimendo questi ultimi come somma di termini proporzionali alle varie combinazioni irriducibili.

Come esempio consideriamo $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$. Possiamo scrivere

$$u^i v^j = \frac{1}{2} (u^i v^j + u^j v^i) + \frac{1}{2} (\epsilon^{ijk} \epsilon_{klm} u^l v^m) \quad .$$

Il primo termine si trasforma secondo **6** e contiene lo stato di peso massimo $u^1 v^1$; $u^j v^i$ è stato aggiunto per renderlo completamente simmetrico nei due indici superiori e quindi irriducibile. L'oggetto $\epsilon_{klm} u^l v^m$ ha solo un indice inferiore e quindi si trasforma secondo $\bar{\mathbf{3}}$. Quindi possiamo concludere

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} \oplus \bar{\mathbf{3}} \quad .$$

Questo procedimento può essere applicato a qualsiasi prodotto tensoriale.

Si noti che la quantità $(n - m) \bmod 3$ è conservata in tutte queste decomposizioni, in quanto i tensori invarianti hanno tutti $(n - m) \bmod 3 = 0$, quindi non c'è modo di cambiare questa quantità. Questa proprietà è nota come *trialità*.

Lo stato di bra è

$$\langle v| = v_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} \left\langle i_1 \dots i_m \middle| j_1 \dots j_n \right. \quad (1.54)$$

che si trasforma sotto l'algebra in modo simile a quello di ket ma a meno del segno. Quindi il bra con un indice inferiore si trasforma come se avesse un ket con un indice superiore in quanto bra e ket sono legati da operazioni di coniugazione complessa. Questo suggerisce che si può definire il tensore corrispondente ad uno stato di bra con gli indici invertiti; pertanto le componenti tensoriali del tensore $\langle v|$ sono

$$\bar{v}_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} \equiv v_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n *} \quad (1.55)$$

e quindi la (1.54) diventa

$$\langle v| = \bar{v}_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} \left\langle i_1 \dots i_m \middle| j_1 \dots j_n \right\rangle .$$

Allora quando lo stato $\langle v|$ si trasforma secondo $-\langle v|T_a$, il tensore \bar{v} è trasformato da $T_a \bar{v}$.

Per esempio si ha

$$\langle u|v\rangle = \bar{u}_{l_1 \dots l_n}^{k_1 \dots k_m} v_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} \left\langle k_1 \dots k_m \middle| i_1 \dots i_m \right\rangle = \bar{u}_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} v_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n}$$

e come corollario si trova che se lo stato $|v\rangle$ è normalizzato, le componenti tensoriali soddisfano la condizione di normalizzazione

$$\sum_{\substack{i_1 \dots i_m \\ j_1 \dots j_m}} v_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n}{}^2 = 1 \quad . \quad (1.56)$$

Tramite l'uso dei tensori possiamo generalizzare ad $SU(3)$ il teorema di Wigner-Eckart [8].

Consideriamo l'elemento di matrice dell'operatore tensoriale tra gli stati tensoriali $\langle u|W|v\rangle$. Esso sarà proporzionale alle componenti tensoriali di $|v\rangle$, W e $\langle u|$ e deve essere invariante, cioè deve avere tutti gli indici contratti tra loro o con un tensore invariante.

Formalmente, l'elemento di matrice

$$\left\langle i'_1 \dots i'_{n'} \middle| O_{k_1 \dots k_a}^{l_1 \dots l_b} \middle| j_1 \dots j_m \right\rangle = \Gamma_{i_1 \dots i_n k_1 \dots k_a i'_i \dots i'_{n'}}^{l_1 \dots l_b j_1 \dots j_m j'_1 \dots j'_{m'}}$$

deve essere esso stesso un tensore invariante e quindi una somma di δ ed ϵ .

1.4.3 Tabelle di Young

Consideriamo il gruppo S_n delle permutazioni di n oggetti. Ciascuno dei suoi elementi può essere scritto in termini di **cicli**, dove un j -ciclo è una permutazione ciclica di un sottoinsieme di j oggetti; ogni elemento di S_n ha k_j j -cicli con $\sum_{j=1}^n j k_j = n$; la struttura a cicli riflette le classi di coniugazione del gruppo.

Rappresentiamo ogni j -ciclo con una colonna di j quadratini; in totale ci saranno n quadratini. Questi grafici sono chiamati **tabelle di Young**. Ogni diversa tabella rappresenta una diversa classe di coniugazione e quindi le tabelle sono in corrispondenza biunivoca con le rappresentazioni irriducibili.

Vediamo quindi come da una tabella di Young si possa costruire esplicitamente la rappresentazione irriducibile associata identificando un opportuno sottospazio della rappresentazione regolare di S_n . Inseriamo gli interi da 1 a n nei quadratini in tutti gli $n!$ modi possibili;

stabilendo un ordine, ad ogni assegnazione è associato uno stato nella rappresentazione regolare di S_n . Ora per una particolare tabella simmetrizziamo gli stati negli indici in ogni riga e antisimmetrizziamo in quelli di colonna. Gli insiemi di stati costruiti in questo modo individuano un sottospazio della rappresentazione regolare; possiamo costruire gli stati esplicitamente e sappiamo come le permutazioni agiscono su questi stati. Questo sottospazio è una rappresentazione di S_n in quanto una permutazione corrisponde a cominciare con una diversa assegnazione, quindi agendo con la permutazione su qualsiasi stato del sottospazio restituisce un altro stato nel sottospazio; infatti, questa rappresentazione è la rappresentazione irriducibile associata alla tabella di Young.

Le tabelle di Young sono utili nello studio delle rappresentazioni irriducibili di $SU(3)$ in quanto abbiamo osservato che $\mathbf{3}$ è una combinazione antisimmetrica di due $\mathbf{3}$, quindi non c'è un'effettiva necessità della seconda rappresentazione fondamentale per costruire le rappresentazioni superiori: esse possono essere scritte come prodotto tensoriale di più $\mathbf{3}$ con simmetria opportuna. Ora, le tabelle di Young corrispondono a rappresentazioni irriducibili del gruppo di permutazioni, e il legame con le rappresentazioni irriducibili di $SU(3)$ è che le rappresentazioni irriducibili di $SU(3)$ si trasformano in modo irriducibile sotto permutazione degli indici. In altri termini, per decomporre una rappresentazione riducibile prodotto tensoriale di $\mathbf{3}$ per se stesso un numero arbitrario di volte nelle sue rappresentazioni irriducibili, è sufficiente decomporre il corrispondente spazio prodotto tensoriale in sottospazi invarianti, il che equivale a decomporre il relativo tensore in tensori di simmetria opportuna; allora, le rappresentazioni indotte dalla rappresentazione fondamentale in questo sottospazio saranno irriducibili. Vedremo ora che la struttura di una tabella di Young caratterizza una classe di simmetria.

Consideriamo una rappresentazione (n, m) . Ad essa è associato un tensore di componenti $A_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n}$ separatamente simmetrico negli indici superiori e inferiori e a traccia nulla. Possiamo innalzare tutti gli indici inferiori ponendo

$$a^{i_1 \dots i_n k_1 l_1 \dots k_m l_m} = \epsilon^{j_1 k_1 l_1} \dots \epsilon^{j_m k_m l_m} A_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n} \quad . \quad (1.57)$$

Questo oggetto è chiaramente antisimmetrico in ogni coppia $k_i \leftrightarrow l_i$ e simmetrico per lo scambio delle coppie $k_i, l_i \leftrightarrow k_j, l_j$. Ora ad ognuno di questi tensori possiamo associare una tabella di Young:

k_1	\dots	k_m	i_1	\dots	i_n
k_1	\dots	k_m			

se determiniamo la regola per associarla alla specifica simmetria del tensore a . Consideriamo il massimo peso della rappresentazione, (n, m) ; poiché gli operatori di abbassamento preservano la simmetria, è sufficiente stabilire la simmetria di quest'ultimo. Il massimo peso è associato alle componenti in cui i vale 1 e tutte le coppie k, l hanno valore 1, 3; esse possono essere ottenute antisimmetrizzando le coppie k, l dalla componente in cui tutte le k valgono 1 e tutte le l valgono 3; ma questa componente è simmetrica per permutazioni di i e k e separatamente simmetrica per permutazione delle l . Quindi otteniamo un tensore con la giusta simmetria se cominciamo con un arbitrario tensore con $n + 2m$ componenti, prima simmetrizzando tutte le i e le k e separatamente le l , poi antisimmetrizzando in tutte le coppie k, l .
















(n, m)	$D(n, m)$	Tableau	Tensore
	1		1
(0, 1)	3		x_i
(1, 0)	$\bar{\mathbf{3}}$		x^i
(0, 2)	6		x_{ij}
(2, 0)	$\bar{\mathbf{6}}$		x^{ij}
(1, 1)	$\mathbf{8} = \bar{\mathbf{8}}$		$x_j^i \left(\sum_{i=1}^3 x_i^i = 0 \right)$
(0, 3)	10		x_{ijk}
(3, 0)	$\bar{\mathbf{10}}$		x^{ijk}
(1, 2)	15		$x_{jk}^i \left(\sum_{i=1}^3 x_{ik}^i = 0 \right)$
(2, 1)	$\bar{\mathbf{15}}$		$x_k^{ij} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^{ij} = 0 \right)$
(0, 4)	$\mathbf{15}'$		x_{ijkl}
(4, 0)	$\bar{\mathbf{15}}'$		x^{ijkl}
(1, 3)	24		$x_{jkl}^i \left(\sum_{i=1}^3 x_{ikl}^i = 0 \right)$
(3, 1)	$\bar{\mathbf{24}}$		$x_l^{ijk} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^{ijk} = 0 \right)$
(2, 2)	$\mathbf{27} = \bar{\mathbf{27}}$		$x_{kl}^{ij} \left(\sum_{i=1}^3 x_{il}^{ij} = 0 \right)$

Tabella 1.3: Rappresentazioni irriducibili (IRRs) di $SU(3)$.

In termini di tabelle di Young, questo corrisponde semplicemente a simmetrizzare nelle componenti delle righe e poi antisimmetrizzare nelle componenti delle colonne; il risultato è simmetrico nelle i e nelle coppie k, l come il tensore a deve essere, ed è facile vedere che esso ha anche traccia nulla. Quindi una tabella di Young è in pratica una regola per simmetrizzare un tensore secondo una specifica rappresentazione irriducibile (Tabella 1.3).

Il procedimento può essere esteso a più righe, ma in $SU(3)$ il tensore corrispondente a tabelle di Young con più di tre righe si annulla poiché nessun tensore può essere completamente antisimmetrico in quattro o più indici che possono assumere solo tre valori; inoltre, ogni colonna con tre quadratini può essere eliminata in quanto corrisponde ad un fattore ϵ .

L'utilità delle tabelle di Young in $SU(3)$ è nell'esistenza di un algoritmo [8] che semplifica fortemente la decomposizione del prodotto tensoriale.

Supponiamo di voler decomporre il prodotto tensoriale di due rappresentazioni irriducibili α e β di tabelle A e B . Si inseriscono delle α nella prima riga di B e delle β nella seconda riga; si prendono i quadratini dalla prima riga di B e si inseriscono in A verso destra e poi verso il basso ricostruendone la struttura, senza due α nella stessa colonna; si prende poi la seconda riga e si aggiungono i quadratini ad ognuna delle tabelle risultanti con la condizione che leggendo lungo le righe a partire dalla prima da destra a sinistra, il numero di α deve essere maggiore o uguale a quello delle β per evitare conteggi doppi. Le tabelle risultanti da questo procedimento corrispondono alle rappresentazioni irriducibili in $\alpha \otimes \beta$ (Tabella 1.4).

Un'altra applicazione delle tabelle di Young consiste nel determinare come una rappresentazione di $SU(3)$ possa essere decomposta nelle rappresentazioni dei suoi sottogruppi. Il caso di importanza fisica più rilevante è la decomposizione delle rappresentazioni di $SU(3)$ nelle rappresentazioni di $SU(2) \times U(1)$.




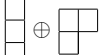



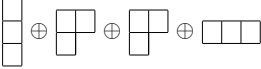

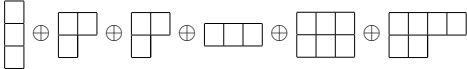
	Prodotto	Somma diretta
(a)	$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$	$\bar{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{6}$
		
(b)	$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$	$\mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$
		
(c)	$\mathbf{6} \otimes \mathbf{3}$	$\mathbf{8} \oplus \mathbf{10}$
		
(d)	$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$	$(\bar{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{6}) \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10}$
		
(e)	$\mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$	$\mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10} \oplus \bar{\mathbf{10}} \oplus \mathbf{27}$
		

Tabella 1.4: Decomposizione di prodotti tensoriali.

Capitolo 2

Il Modello a Quark

Alla base della classificazione teorica delle particelle vi è l'assunzione che le leggi fisiche siano invarianti rispetto a trasformazioni di Poincarè, ovvero trasformazioni di Lorentz e traslazioni spazio-temporali.

Ora, una particella è definita come uno stato di un campo quantistico che si trasforma rispetto ad un elemento del gruppo di Poincarè secondo una rappresentazione irriducibile. Questo implica che ogni particella ha massa e spin definiti, che ad ogni particella è associata un'antiparticella con medesima massa e spin e che vale la ben nota relazione tra spin e statistica. Anche per le interazioni tra particelle è richiesta l'invarianza rispetto al gruppo di Poincarè, e questo impone condizioni non banali sulle possibili teorie quantistiche di campo locali.

Oltre all'invarianza di Poincarè, che è una simmetria spazio-temporale, possono esistere anche simmetrie interne, che sono legate a trasformazioni degli stati delle particelle indipendenti dallo spazio-tempo. L'invarianza delle interazioni rispetto ai gruppi di simmetrie interne dà origine ad ulteriori numeri quantici che caratterizzano gli stati delle particelle.

2.1 Simmetrie interne

2.1.1 Gruppi di simmetrie interne

Nel capitolo precedente è stato mostrato l'uso della teoria dei gruppi per lo studio dei sistemi fisici; applichiamo questo metodo allo studio delle particelle.

Se il sistema fisico da studiare è una singola particella isolata a riposo, in meccanica quantistica esso è descritto mediante l'equazione di Schrödinger; in questo caso particolare, l'Hamiltoniana è costituita dal solo termine di energia di massa nel sistema di quiete della particella. Pertanto, se $|a\rangle$ è il ket che descrive lo stato di una particella isolata A di massa a riposo m , esso è un autostato della suddetta Hamiltoniana:

$$H |a\rangle = m |a\rangle \quad .$$

Ora supponiamo che esista un'altra particella isolata B di massa a riposo m descritta dal ket $|b\rangle$: essa obbedirà alla stessa equazione di Schrödinger con lo stesso autovalore di H ; questo vuol dire che l'autovalore m è degenero e che $|a\rangle$ e $|b\rangle$ formano la base di un sottospazio degenero dello spazio di Hilbert.

Per quanto si è visto nel capitolo precedente, esiste quindi un gruppo di trasformazioni \mathcal{G} rispetto al quale tale sottospazio è invariante, ovvero:

- l'Hamiltoniana presenta una simmetria per trasformazioni del gruppo \mathcal{G} ;
- se D è una rappresentazione irriducibile di \mathcal{G} , allora esiste $g \in \mathcal{G}$ tale che $|b\rangle = D(g)|a\rangle$;
- gli stati $|a\rangle$ e $|b\rangle = D(g)|a\rangle$ sono equivalenti.

Quest'ultima affermazione è il risultato di maggiore rilevanza fisica: dire che gli stati $|a\rangle$ e $|b\rangle$ sono equivalenti può essere interpretato fisicamente come considerare le particelle A e B come *la stessa particella* P in due stati diversi.

Inoltre, come abbiamo visto nel par. 1.2.2, se \mathcal{G} è un gruppo di Lie, potremo scegliere un sistema di generatori $\{X_i\}$ tali che almeno uno, X_k , commuti con H in modo che $|a\rangle$ e $|b\rangle$ siano autostati comuni ad H e X_k e gli autovalori x di X_k possano assumere valori a e b :

$$\begin{aligned} X_k |a\rangle &= a |a\rangle \\ X_k |b\rangle &= b |b\rangle \quad . \end{aligned}$$

In conclusione quindi, a partire da due particelle A e B di massa uguale m abbiamo trovato che esse sono solo due stati diversi di un'unica particella P descritta dal ket $|m, x, j\rangle$, dove $x = a, b$ e j è un altro parametro eventualmente necessario per distinguere altri stati degeneri e che pertanto può essere utilizzato come indizio della presenza di ulteriori simmetrie interne, il che permetterebbe di ridurre ulteriormente il numero di particelle "elementari".

Consideriamo ora l'interazione tra le particelle A e B . Essa è espressa, in meccanica quantistica ordinaria, mediante un termine aggiuntivo V di energia potenziale nell'Hamiltoniana che descrive il sistema. Si possono verificare due casi:

1. Il termine V è invariante rispetto a trasformazioni del gruppo \mathcal{G} .

In questo caso l'interazione non distingue tra gli stati A e B della particella P , le quali si comportano appunto come la stessa particella rispetto all'interazione e si ha quindi $V_{AA} = V_{BB} = V_{AB}$.

2. Il termine V non è invariante rispetto a trasformazioni del gruppo \mathcal{G} .

In questo caso, si verifica una rottura di simmetria: non solo l'interazione distingue tra gli stati A e B della stessa particella P , ma poiché questa volta l'energia comprende anche un termine di interazione, questo si manifesterà come una differenza di massa tra A e B .

In generale, è possibile che le particelle interagiscano in più modi: in questo caso, il termine di interazione sarà somma di più termini di energia potenziale relativi alle singole interazioni, ciascuno dei quali potrà essere invariante o meno rispetto alle trasformazioni del gruppo di simmetria.

2.1.2 Isospin

La meccanica quantistica aveva appena affermato il suo successo nel portare ordine e nel comprendere il mondo atomico (almeno in principio) in termini di particelle interagenti elettromagneticamente governate dall'equazione di Schrödinger, quando la scoperta del neutrone (1930) portò nuovamente scompiglio. Evidentemente, nel nucleo doveva esserci una nuova forza, un'interazione il cui accoppiamento non poteva essere né la carica elettrica né la costante gravitazionale. Una teoria per spiegare queste nuove interazioni fu formulata nel 1935 da Yukawa [16]. Con l'affermazione della relatività e della meccanica quantistica l'azione a distanza era stata abbandonata, e si supposeva che le interazioni fossero mediate da particelle; Yukawa concepì un meccanismo di scambio di un mesone massivo per descrivere la nuova interazione.

All'inizio degli anni Trenta era chiaro dunque che il nucleo dell'atomo era composto da due tipi di particelle: protoni, di carica positiva uguale in modulo a quella dell'elettrone, e neutroni, di carica nulla; era chiaro inoltre che doveva esistere tra essi una forza di grande intensità, detta interazione nucleare forte, in grado di vincere la repulsione elettromagnetica tra i protoni affinché il nucleo restasse compatto.

Con questi presupposti, un tentativo di ridurre il numero di particelle fondamentali può essere fatto partendo dalle seguenti osservazioni sperimentali:

- La massa del protone ($m_p=938.3 \text{ MeV}/c^2$) e la massa del neutrone ($m_n=939.6 \text{ MeV}/c^2$) differiscono solo per poco più dell'1 per mille.
- I **nuclei speculari** sono i nuclei ottenuti mediante la sostituzione $p \leftrightarrow n$. L'energia di legame E_b di un nucleo (Z, A) costituito da Z protoni e $A - Z$ neutroni è

$$E_b \equiv (Zm_p + (A - Z)m_n - M) \quad ,$$

dove M è la massa del nucleo, mentre quella del suo nucleo speculare $(A - Z, A)$ è ovviamente

$$E_b \equiv ((A - Z)m_p + Zm_n - M) \quad .$$

Sperimentalmente si trova [12] che per tutte le coppie di nuclei speculari le energie di legame differiscono solo per una piccola percentuale (dell'ordine del 10%) attribuibile alla repulsione elettrostatica tra i protoni del nucleo con Z maggiore (notiamo esplicitamente che mentre le energie di legame tipiche dell'atomo e quindi dovute all'interazione elettromagnetica sono dell'ordine di qualche eV, le energie di legame dei nuclei dovute all'interazione forte sono dell'ordine del MeV). Questo è un chiaro indizio che l'interazione nucleare forte è invariante per scambio $p \leftrightarrow n$, ovvero $V_{pp} = V_{nn}$ (**simmetria di carica**).

- Considerazioni basate sullo studio dei parametri dello scattering nucleone-nucleone a basse energie [13] suggeriscono $V_{np} = V_{pp}$ (**indipendenza dalla carica**).

Per quanto esposto nel par. 2.1.1, queste sono le condizioni necessarie per ipotizzare che protone e neutrone siano in realtà la stessa particella, chiamata **nucleone**, in due differenti stati di carica elettrica, tali che l'interazione forte non distingua l'uno dall'altro mentre l'interazione elettromagnetica generi una rottura della simmetria.

Possiamo ora descrivere la simmetria di questo sistema fisico tramite il formalismo degli spazi di Hilbert e della teoria dei gruppi. Come abbiamo visto, gli stati che descrivono protone e neutrone formano la base di un sottospazio degenere a due dimensioni:

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

e il generico stato di nucleone sarà quindi esprimibile come

$$|N\rangle = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} = \psi_p |p\rangle + \psi_n |n\rangle$$

con $|\psi_p|^2 + \psi_n^2 = 1$ ¹.

Esisterà inoltre un gruppo di trasformazioni unitarie \mathcal{G} rispetto al quale sia il sottospazio che l'interazione forte siano invarianti; nella base ortonormale scelta di protone e neutrone, esso sarà rappresentato da matrici unitarie complesse 2×2 ; in generale esse hanno 4 parametri liberi, ma poiché c'è la libertà di un fattore di fase sugli stati, questi si riducono a tre e quindi le matrici possono essere scelte unimodulari. A questo punto è immediato identificare questo gruppo con $SU(2)$.

Gli stati di protone e neutrone sono pertanto la base della rappresentazione irriducibile di dimensione 2 di $SU(2)$; introduciamo quindi le matrici di Pauli σ_i e tre operatori I_1, I_2, I_3 con

$$I_i = \frac{\sigma_i}{2} \quad (2.2)$$

che quindi soddisfano

$$[I_i, I_j] = i\epsilon_{ijk} I_k$$

mentre commutano con tutti gli operatori che descrivono proprietà spazio-temporali ($\vec{r}, \vec{p}, \vec{L} \dots$). Essi saranno i generatori del gruppo di trasformazioni unitarie

$$U = e^{i\alpha_k I_k}$$

che agiscono sul generico stato: $\psi \rightarrow U\psi$.

L'operatore $\vec{I} = (I_1, I_2, I_3)$ è chiamato **isospin**².

Nella notazione standard si scriverà

$$|p\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \quad |n\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \quad .$$

Possiamo inoltre introdurre gli operatori di innalzamento e abbassamento

$$I^\pm = (I_1 \pm iI_2) \quad (2.3)$$

¹Storicamente, il primo ad introdurre la notazione in cui protone e neutrone erano trattati come un doppietto fu Heisenberg all'inizio degli anni Trenta. Questo era un modo matematicamente comodo per formalizzare la sua teoria delle forze nucleari: egli immaginava il neutrone come una sorta di stato legato protone-elettrone e le forze nucleari derivanti dallo scambio di elettroni. Ben presto si dimostrò che tale modello era inconsistente.

²Questo nome è la contrazione di *spin isotopico*. In realtà sarebbe più corretto chiamarlo *spin isobarico*, ma si utilizza il nome attribuito originariamente da Wigner.

che trasformano gli stati di protone e neutrone:

$$I^+ |n\rangle = |p\rangle \quad I^- |p\rangle = |n\rangle \quad .$$

Gli stati $|p\rangle$ ed $|n\rangle$ hanno carica elettrica definita $+1$ e 0 (in unità di $|e|$); sono quindi anche autostati dell'operatore **carica elettrica** che ha quindi la forma

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Osserviamo che si ha

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}\mathbf{1} \quad . \quad (2.4)$$

Il nucleone interagisce sia mediante interazioni forti che mediante interazioni elettromagnetiche. Poiché la sua carica elettrica è proporzionale ad una particolare componente della simmetria $SU(2)$ dell'interazione forte, gli accoppiamenti elettrici individuano una direzione privilegiata I_3 nello spazio dei generatori dell'algebra $SU(2)$: questo determina la rottura di simmetria che abbiamo ipotizzato; essa è abbastanza lieve, in quanto il rapporto tra le costanti di accoppiamento delle due forze è circa 10^{-3} , e quindi trattabile in modo perturbativo.

Come sappiamo, l'esistenza di questo gruppo di simmetria per l'Hamiltoniana d'interazione nucleare forte implica

$$[H, I_j] = 0 \quad ,$$

ovvero che gli stati fisici possono avere allo stesso tempo energia ed isospin definiti e che vale la legge di conservazione

$$\frac{dI_j}{dt} = 0 \quad (2.5)$$

ovvero l'isospin si conserva nelle interazioni nucleari forti.

Analogamente, si trova subito che

$$[Q, I_j] \neq 0 \quad i = 1, 2$$

ovvero che la carica viola la conservazione dell'isospin.

Nel 1947 la scoperta del *pione* confermava la teoria di Yukawa: questa particella presentava le seguenti caratteristiche: era massiva, a spin nullo ed esistente in tre stati di carica.

Se si assume che lo scambio di pioni sia responsabile della forza di interazione nucleare forte tra nucleoni, si può ipotizzare che l'anche l'interazione pione-nucleone sia l'interazione nucleare forte e sia quindi indipendente dalla carica; anche per questa interazione deve valere quindi la conservazione dell'isospin e il grande elemento di matrice per la reazione

$$N \rightarrow N + \pi$$

implica che l'isospin del pione debba valere 0 o 1 perché solo così l'isospin si conserva. Come abbiamo anticipato, esistono tre pioni: π^+ , π^0 , π^- ; essi hanno masse molto vicine: $m_{\pi^\pm} = 135 \text{ MeV}/c^2$, $m_{\pi^0} = 139 \text{ MeV}/c^2$, e quindi

$$\frac{m_{\pi^\pm} - m_{\pi^0}}{\bar{m}_\pi} \approx 3\%$$

(che comunque è considerevolmente maggiore della corrispondente quantità per il nucleone). Di conseguenza, si può ipotizzare che i tre pioni costituiscano la base di una rappresentazione di spin 1 (e dimensione $2j + 1 = 3$) del gruppo $SU(2)$ di isospin.

La conservazione dell'isospin permette di fare previsioni circa le sezioni d'urto di varie reazioni e di proibirne alcune, e l'accordo di queste con i risultati sperimentali costituisce quindi una conferma della conservazione dell'isospin per il pione.

Formalmente, si scriverà pertanto

$$|\pi^+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\pi^0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\pi^-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

e quindi

$$I^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (I^+ + I^-) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.8a)$$

$$I_2 = -i \frac{1}{\sqrt{2}} (I^+ - I^-) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.8b)$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.8c)$$

Questa volta si ha che l'operatore carica elettrica è

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e quindi la relazione analoga alla (2.4) è

$$Q = I_3 \quad . \quad (2.9)$$

Le due relazioni (2.4) e (2.9) possono essere sintetizzate nell'unica

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}B \quad (2.10)$$

dove B assume valore 1 per il nucleone e 0 per il pione; esso è chiamato **numero barionico**.

Per sistemi composti, l'isospin è determinato mediante le stesse note regole di somma del momento angolare; in particolare, I_3 è una grandezza additiva. Essendo anche la carica una grandezza additiva, ne segue che il numero barionico è anch'esso additivo.

L'isospin può essere trattato anche mediante il formalismo di seconda quantizzazione [8].

Se $|0\rangle$ è lo stato di vuoto, ovvero lo stato di minima energia, generalmente coincidente con lo stato in cui non c'è alcuna particella, introduciamo gli operatori

$$a_{N,\pm\frac{1}{2},\alpha}^\dagger \quad , \quad (2.11)$$

detti **operatori di creazione** rispettivamente per il protone e per il neutrone, tali che

$$|p, \alpha\rangle = a_{N,+\frac{1}{2},\alpha}^\dagger |0\rangle \quad |n, \alpha\rangle = a_{N,-\frac{1}{2},\alpha}^\dagger |0\rangle \quad .$$

Essi non sono operatori hermitiani; i loro aggiunti

$$a_{N,\pm\frac{1}{2},\alpha} \quad (2.12)$$

sono detti **operatori di distruzione** (distruggono un protone o un neutrone rispettivamente) e soddisfano

$$a_{N,\pm\frac{1}{2},\alpha} |0\rangle = 0 \quad .$$

Poiché protoni e neutroni sono fermioni, i relativi operatori di creazione e distruzione soddisfano le relazioni di anticommutazione

$$\{a_{N,m,\alpha}, a_{N,m',\beta}^\dagger\} = \delta_{mm'} \delta_{\alpha\beta} \quad (2.13a)$$

$$\{a_{N,m,\alpha}^\dagger, a_{N,m',\beta}^\dagger\} = \{a_{N,m,\alpha}, a_{N,m',\beta}\} = 0 \quad . \quad (2.13b)$$

Applicando ripetutamente gli operatori di creazione si possono costruire stati a molti protoni o molti neutroni, e le relazioni di anticommutazione garantiscono che lo stato si annulla se una coppia di α è uguale, così come richiesto dal principio di Pauli. Analogamente si possono costruire stati a molte particelle con protoni e neutroni insieme:

$$\overbrace{a_{N,m_1,\alpha_1}^\dagger \cdots a_{N,m_n,\alpha_n}^\dagger}^{n \text{ operatori di creazione di nucleone}} |0\rangle \propto |n \text{ nucleoni}; m_1, \alpha_1; \dots; m_n, \alpha_n\rangle \quad ,$$

e il fatto che anche i rispettivi operatori di creazione anticommutino è noto come **principio di esclusione generalizzato**.

Si possono costruire operatori che contano il numero di nucleoni:

$$a_{N,m,\alpha}^\dagger a_{N,m,\alpha} \quad .$$

Ora, per gli stati ad una particella, sappiamo già nella notazione del capitolo precedente che l'azione dei generatori di isospin è

$$I_a |m, \alpha\rangle = |m', \alpha\rangle \left[J_a^{1/2} \right]_{m'm}$$

e pertanto in termini di operatori di creazione e distruzione si ottiene

$$I_a a_{N,m,\alpha}^\dagger |0\rangle = a_{N,m',\alpha}^\dagger |0\rangle \left[J_a^{1/2} \right]_{m'm} \quad ;$$

inoltre, lo stato di vuoto deve trasformarsi ovviamente secondo la rappresentazione banale:

$$I_a |0\rangle = 0 \quad .$$

Di conseguenza, osserviamo che le corrette proprietà di trasformazione per lo stato ad una particella si ottengono se gli operatori di creazione e distruzione si trasformano come operatori tensoriali nella rappresentazione di spin $\frac{1}{2}$ dell'isospin:

$$\left[I_a, a_{N,m,\alpha}^\dagger \right] = a_{N,m',\alpha}^\dagger \left[J^{1/2} \right]_{am'm} \quad .$$

E' facile verificare che quindi si può scrivere

$$I_a = \frac{1}{2} a_{N,\alpha}^\dagger \sigma_a a_{N,\alpha} + \dots \quad (2.14)$$

dove i termini aggiuntivi commutano con gli operatori di creazione e distruzione per i nucleoni e annichilano il vuoto. Poiché gli stati a molte particelle sono costruiti applicando più operatori tensoriali (di creazione) al vuoto, ne consegue, come potevamo banalmente aspettarci, che gli stati a molte particelle si trasformano come prodotti tensoriali di stati di singola particella.

Analogamente, possiamo definire gli operatori di creazione e distruzione anche per il pione:

$$a_{\pi,m,\alpha}^\dagger \quad \text{per} \quad m = -1, 0, 1 \quad . \quad (2.15)$$

Poiché esso è un bosone, questi soddisferanno le relazioni di commutazione

$$\left[a_{\pi,m,\alpha}, a_{\pi,m',\beta}^\dagger \right] = \delta_{mm'} \delta_{\alpha\beta} \quad (2.16a)$$

$$\left[a_{\pi,m,\alpha}^\dagger, a_{\pi,m',\beta}^\dagger \right] = \left[a_{\pi,m,\alpha}, a_{\pi,m',\beta} \right] = 0 \quad (2.16b)$$

in modo che gli stati a più particelle siano simmetrici per scambio delle particelle. Questi operatori commutano inoltre con gli operatori di creazione e distruzione dei nucleoni.

In generale, possiamo estendere il formalismo ad eventuali altri tipi di particelle che interagiscano fortemente e quindi con isospin definito. La forma completa dei generatori agenti sugli stati di queste particelle sarà

$$I_a = \sum_{\substack{\text{particelle } x \\ \text{stati } \alpha \\ \text{valori di } I_3 \ m,m'}} a_{x,m,\alpha}^\dagger \left[J_a^{j_x} \right]_{mm'} a_{x,m',\alpha} \quad (2.17)$$

e le relazioni di commutazione o anticommutazione saranno

$$\left[a_{x,m,\alpha}, a_{x',m',\beta}^\dagger \right]_{\pm} = \delta_{mm'} \delta_{\alpha\beta} \delta_{xx'}, \quad (2.18a)$$

$$\left[a_{x,m,\alpha}^\dagger, a_{x',m',\beta}^\dagger \right]_{\pm} = \left[a_{x,m,\alpha}, a_{x',m',\beta} \right]_{\pm} = 0 \quad . \quad (2.18b)$$

2.1.3 Stranezza ed ipercarica

All'inizio degli anni '50, la costruzione di una nuova generazione di acceleratori di energie sempre maggiori portò alla scoperta di un grande numero di particelle soggette all'interazione nucleare forte. Esse furono chiamate *adroni*, e la loro abbondanza portò ancora una volta all'esigenza di ridurre il numero di possibili particelle "elementari". Il primo ovvio passo in questa direzione era l'estensione alle nuove particelle di quanto era stato fatto per nucleone e pione e quindi l'attribuzione dei numeri quantici di carica, numero barionico ed isospin.

Se la carica poteva facilmente essere attribuita mediante misure sperimentali, qualche ipotesi aggiuntiva è necessaria per il numero barionico.

Si assume che il numero barionico sia una grandezza additiva e conservata nelle interazioni forti che può assumere valore $+1$, -1 , 0 : esso è quindi assegnato agli adroni sulla base della sua conservazione nelle reazioni osservate e non conservazione nelle reazioni non osservate. Si trova quindi sperimentalmente [13] che tutte le particelle con $B = \pm 1$, dette **barioni**, condividono le seguenti proprietà: interagiscono fortemente, hanno spin semintero e appartengono ad una catena di reazioni che portano al protone, la più leggera di esse e che come abbiamo visto ha $B = +1$. Per ognuna di esse esiste in corrispondenza biunivoca un'antiparticella con $B = -1$. Alle restanti particelle è attribuito $B = 0$ e sono chiamate **mesoni**. Sperimentalmente, si trova che il numero barionico è conservato in tutti i tipi di interazione.

L'attribuzione dell'isospin alle nuove particelle è un capitolo particolarmente interessante della fisica delle particelle [13].

La prima di esse ad essere scoperta fu la Λ , una particella di massa 1116 MeV; essa presentava delle caratteristiche all'epoca inspiegabili poiché era prodotta abbondantemente con una grande sezione d'urto ma decadeva molto lentamente; tuttavia, poiché i due processi di produzione e decadimento potevano essere ottenuti l'uno dall'altro invertendo il verso di reazione, il principio del bilancio dettagliato prevedeva per questi lo stesso elemento di matrice. La soluzione di questa incongruenza fu trovata nel 1952 da Pais [17], il quale suggerì che la Λ doveva essere prodotta insieme ad un'altra particella mediante una interazione forte e responsabile del grande elemento di matrice, mentre in fase di decadimento quest'altra particella fosse già lontana in modo che la Λ decadesse con una velocità bassa, tipica dei decadimenti deboli. In altri termini la catena di reazioni è ad esempio

$$\pi^- p \rightarrow \Lambda K^0 \rightarrow \begin{cases} \Lambda \rightarrow p\pi^- \\ K^0 \rightarrow \pi^+\pi^- \end{cases} .$$

L'ipotesi di Pais è nota come *schema della produzione associata* e fu subito confermato sperimentalmente mediante studi più accurati del processo di produzione. In breve tempo furono scoperte altre particelle per le quali era richiesto il meccanismo della produzione associata: Σ^\pm , K^\pm , Ξ^- .

Una volta attribuiti ad esse carica e numero barionico, si cercò di attribuire anche l'isospin partendo dalla misura delle masse e dallo studio delle reazioni osservate, ma si trovò che i valori assegnati non erano consistenti con la relazione (2.10). Per esempio, non c'era alcuna particella di massa prossima alla Λ , pertanto essa poteva essere solo un singoletto di isospin ($I_3 = 0$), ma essendo la Λ un barione la relazione prevedeva una carica di $\frac{1}{2}$. La soluzione a

questo nuovo problema fu trovata da Gell-Mann [18] e indipendentemente Nishijima [19] nel 1953; essi postularono per queste particelle l'esistenza un nuovo numero quantico S , chiamato **stranezza**, additivo e conservato nelle interazioni forti ma non in quelle deboli e tale che la (2.10) diventasse

$$Q = I_3 + \frac{B + S}{2} \quad . \quad (2.19)$$

Questa è nota come *relazione di Gell-Mann e Nishijima*.

Ovviamente a nucleone e pioni è assegnata $S = 0$, mentre le particelle con $S \neq 0$ furono chiamate particelle **strane**³. La stranezza è un numero quantico del tutto indipendente da carica e numero barionico, proprio in quanto a differenza di questi ultimi è conservata solo nelle interazioni forti ed elettromagnetiche.

La grandezza

$$Y = B + S \quad (2.20)$$

è chiamata **ipercarica**; essa è ovviamente conservata nelle interazioni forti (in quanto la sua conservazione è equivalente a quella della stranezza).

La conservazione dell'ipercarica implica l'esistenza un altro gruppo di simmetria dell'Hamiltoniana di interazione forte; esso è ovviamente distinto dal gruppo di isospin.

I numeri quantici B , Q , S individuano rappresentazioni monodimensionali di gruppi isomorfi ad $U(1)$ che commutano tra loro. Come sappiamo, l'operazione di tale gruppo è la moltiplicazione dello stato della particella per un fattore di fase:

$$\begin{aligned} B : \quad & \psi \rightarrow e^{-i\alpha B} \psi \\ Q : \quad & \psi \rightarrow e^{-i\beta Q} \psi \\ S : \quad & \psi \rightarrow e^{-i\gamma S} \psi \end{aligned}$$

dove α , β , γ sono numeri reali arbitrari. La differenza tra essi è che S è un gruppo di simmetria solo per l'interazione forte, mentre B e Q lo sono, fino a prova contraria, per tutte le interazioni (Tabella 2.1).

Simbolo	Numero quantico	Gruppo di simmetria	Interazioni in cui è conservato
Q	Carica elettrica	$U(1)$	tutte
B	Numero barionico	$U(1)$	tutte
I	Isospin	$SU(2)$	nucleare forte
S	Stranezza	$U(1)$	nucleare forte elettromagnetica

Tabella 2.1: Simmetrie interne degli adroni.

³Questo proprio per l'iniziale scompiglio che aveva causato la non comprensione del meccanismo responsabile di produzione forte e decadimento debole.

2.2 Genesi del modello

2.2.1 Simmetria unitaria

Con l'esistenza di un secondo numero quantico additivo S in aggiunta ad I_3 , fu naturale cercare di estendere la simmetria di isospin ad un gruppo più largo di rango 2. Questo nuovo gruppo di simmetria doveva naturalmente raggruppare gli adroni con proprietà simili nei multipletti delle sue rappresentazioni. Tale compito era stato particolarmente semplice per il gruppo $SU(2)$ di isospin: il neutrone ed il protone, che hanno massa quasi identica, possono essere facilmente accomodati in un doppietto di $SU(2)$. Tuttavia, nessuna particella strana ha massa prossima a quella dei nucleoni, e quindi gli appropriati raggruppamenti sono difficili da identificare e la scelta del gruppo è decisamente non banale. $SU(3)$ fu originariamente proposta nel 1961 ma si affermò definitivamente solo nel 1964. La struttura a multipletti delle particelle all'epoca ritenute elementari ricordava in qualche modo le regolarità della tavola periodica degli elementi di Mendeleev e proprio come questa, la classificazione di $SU(3)$ suggeriva fortemente l'esistenza di una sottostruttura. Il ruolo del gruppo $SU(3)$ di isospin e stranezza è prevalentemente storico [10]: esso prepara la scena all'ingresso dei quark nella fisica delle particelle. Vediamo quindi come si è evoluta storicamente questa idea.

Con l'introduzione dell'iper carica, emerge un evidente parallelismo tra gli stati dei barioni e dei mesoni all'epoca conosciuti (Tabella 2.2).

Y	I	Barioni	Mesoni
+1	$\frac{1}{2}$	p n	K^+ K^0
0	1	Σ^+ Σ^{0*} Σ^-	π^+ π^0 π^-
0	0	Λ^0	η^{0*}
-1	$\frac{1}{2}$	Ξ^{0*} Ξ^-	\bar{K}^{0*} K^-

Tabella 2.2: Analogie tra barioni e mesoni. Le particelle con asterisco non erano state ancora scoperte nel 1953.

Esso è ancora più evidente se queste particelle vengono disposte in un grafico che tenga conto solo delle simmetrie interne delle interazioni forti, e che pertanto associ particelle con uguali proprietà spazio-temporali e altri numeri quantici (quindi spin, parità e numero barionico); le differenze di massa tra le particelle dello stesso grafico sono dell'ordine del 20% (Figura 2.1).

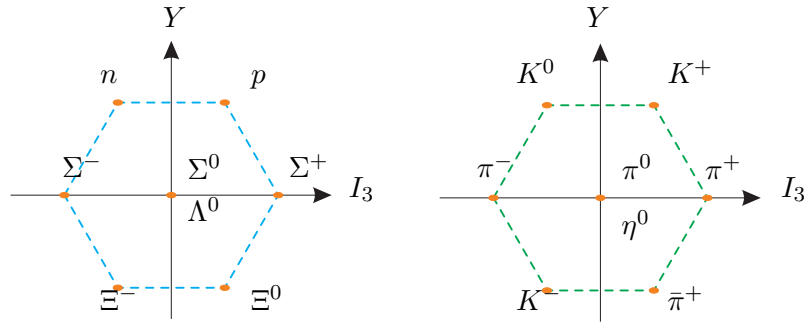


Figura 2.1: Disposizione di barioni e mesoni nel diagramma dei pesi.

Vediamo ora cosa le considerazioni finora effettuate possono suggerire circa un possibile gruppo di simmetria unitaria [15].

In primo luogo, possiamo fare delle assunzioni che anche se non sono direttamente richieste dal caso specifico, sono delle immediate generalizzazioni di ciò che è noto dalla simmetria di isospin e semplificano notevolmente il problema; pertanto, nel limite di simmetria esatta, assumiamo che:

1. Il gruppo commuti con il gruppo di Poincarè.
2. Il gruppo sia unitario.
3. Gli stati di particella singola formino un sottospazio invariante rispetto all'azione del gruppo, mentre gli stati a molte particelle si trasformino come prodotti tensoriali.
4. Il gruppo commuti con la matrice di scattering⁴.

Ricordiamo che queste sono proprio le condizioni necessarie affinché il gruppo sia un gruppo di simmetrie interne. A queste assunzioni, bisogna aggiungere alcune condizioni richieste dalla specifica natura del problema:

1. Data la disposizione delle particelle nei grafici, il gruppo deve poter avere una rappresentazione a otto dimensioni.
2. Nel limite di simmetria esatta, le masse degli ottetti sono uguali e quindi la rappresentazione ad otto dimensioni deve essere irriducibile.
3. La rappresentazione ad otto dimensioni deve essere chiusa, ovvero ogni matrice che è il limite di una sequenza di matrici di rappresentazione deve essere una matrice rappresentazione essa stessa. Poiché la matrice di scattering è continua, se la rappresentazione non fosse chiusa, sarebbe sempre possibile chiuderla ottenendo così un gruppo di simmetria interna ancora più largo.

⁴Per trattare i problemi di scattering in meccanica quantistica, si suppone che gli stati iniziali e finali in cui si trova il sistema siano autostati dell'hamiltoniana libera. In questa approssimazione (nota come approssimazione adiabatica) è possibile scrivere l'operatore che proietta lo stato iniziale su quello finale come una matrice, chiamata matrice di scattering o **S-matrix**.

4. La rappresentazione deve essere tale che ogni elemento del gruppo che agisca banalmente su uno stato dell'ottetto agisca banalmente su ogni altro possibile stato.

Queste condizioni implicano che il gruppo di simmetria unitaria sia un gruppo di Lie. Infine, l'ultima condizione richiesta dal problema è:

1. Il gruppo deve contenere un gruppo isomorfo al gruppo isospin-iper carica; inoltre, restringendosi a tale sottogruppo, la rappresentazione ad otto dimensioni deve riprodurre i corretti multipletti di isospin e valori di iper carica.

La teoria dei gruppi fornisce una lunga lista di gruppi che soddisfano tutte queste proprietà; tuttavia, si trova l'importante risultato che ognuno di questi gruppi contiene o $SU(3)$ oppure G_0 , un gruppo detto "parte connessa del gruppo minimo di simmetria globale" [15]; questi due gruppi sono minimi, ovvero se le loro predizioni sono errate, le predizioni di qualsiasi gruppo più ampio che li contiene sono anch'esse errate. Ora, si può dimostrare che utilizzando G_0 come gruppo di simmetria unitaria si giunge ad una serie di predizioni errate (ad esempio esistenza di particelle proibite o momenti magnetici diversi da quelli osservati). Di conseguenza, G_0 va eliminato e quindi, se esiste un gruppo di simmetria unitaria, deve necessariamente essere $SU(3)$.

Una volta determinato il gruppo di simmetria, esso può portare a ridurre il numero di particelle fondamentali in due modi [15]:

1. Delle particelle conosciute, solo alcune sono elementari, e le altre sono stati legati di queste ultime. Le simmetrie deriverebbero quindi dall'esistenza di una tale sottostruttura; le differenze di massa sono attribuite alle differenti masse delle particelle elementari.

Si tratta di un approccio *costruttivo*, una formulazione più moderna della concezione atomistica di Democrito.

2. L'interazione nucleare forte è invariante rispetto al gruppo di simmetria unitaria e pertanto i membri di ogni multipletto sono in realtà la stessa particella in stati diversi. Le differenze di massa sono dovute alla rottura di simmetria causata dai contributi delle altre interazioni.

Si tratta dunque di un approccio essenzialmente *algebrico*.

Storicamente, queste due ipotesi hanno portato alla formulazione di due diversi modelli dominanti. Esse rappresentano un po' i due metodi complementari delle scienze [20]: il primo che cerca strutture semplici ed idealizzate da cui derivare le proprietà delle strutture complesse, il secondo che astrae leggi generali che governano un'intera classe di strutture complesse.

2.2.2 Il modello di Sakata

Nel 1949, nel tentativo di ridurre il numero di entità fondamentali, Fermi e Yang [21] avevano proposto un modello secondo cui solo protone e neutrone erano particelle elementari, e che i pioni non erano altro che stati legati nucleone-antinucleone. Questo funzionava benissimo in quanto, poiché si ha $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{3} \oplus \mathbf{1}$, la combinazione nucleone-antinucleone genera proprio un tripletto di isospin; il singoletto fu identificato con la η_0 , scoperta pochi anni dopo.

Con la scoperta delle particelle strane, tale modello non poteva più descrivere tutte le particelle in termini di nucleoni; tuttavia, nel 1956 Sakata [22] osservò che per spiegare l'esistenza della stranezza bastava aggiungere una particella strana alle particelle elementari, particella che identificò con la Λ .

Poiché la teoria dinamica dei legami era oscura, l'intero approccio fece pochi progressi finché, nel 1959–1960, Ikeda, Ogawa e Ohnuki in Giappone [23] e Thirring, Wess e Yamaguchi [24] in Europa trovarono un'appropriata descrizione matematica degli aspetti di simmetria dei processi di costruzione in questo modello. Esso era proprio il gruppo $SU(3)$, con un'algebra ad otto parametri, le cui rappresentazioni corrispondevano alle strutture permesse nel modello di Sakata. Esso assume l'invarianza del processo di costruzione delle particelle rispetto alle trasformazioni unitarie unimodulari dei tre campi complessi "fondamentali", identificati con il tripletto di Sakata. Lo spettro di massa fu assunto derivare dalla propagazione della differenza di massa $\Lambda - N$.

L'esistenza di un tripletto, piuttosto che un doppietto, di entità fondamentali porta infatti all'ampliamento della simmetria da $SU(2)$ ad $SU(3)$.

Secondo il modello simmetrico di Sakata, p , n e Λ costituiscono quindi la rappresentazione fondamentale $\mathbf{3}$ di $SU(3)$ e le loro antiparticelle la rappresentazione complessa coniugata $\bar{\mathbf{3}}$.

Uno degli immediati successi del modello fu che le nove possibili combinazioni barione-antibarione potevano essere divise in un ottetto e un singoletto di stati mesonici. Se le trasformazioni spaziali di questi stati legati erano appropriate (cioè si trattava di stati 1S_0), l'ottetto poteva descrivere i sette mesoni all'epoca conosciuti e prediceva l'esistenza di un ottavo. Secondo il modello di Sakata, l'ipercarica può essere scritta nella forma

$$Y = H_2 + \frac{2}{3}B$$

che descrive in modo consistente il tripletto e l'antitripletto fondamentali. Con questa assegnazione, l'ottetto che risulta dal prodotto $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$ consiste di:

- un doppietto di isospin con $Y = 1$;
- un doppietto di isospin con $Y = -1$;
- un tripletto di isospin con $Y = 0$;
- un singoletto di isospin con $Y = 0$;

in esatta corrispondenza con i sette mesoni conosciuti.

Il modello non era però altrettanto valido nella classificazione dei barioni. Per ottenere il corretto numero barionico $B = \pm 1$, la combinazione minima da cui potevano essere costituiti era due barioni e un antibarione elementari; la decomposizione del prodotto tensoriale $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{15} \oplus \bar{\mathbf{6}} \oplus \mathbf{3} \oplus \bar{\mathbf{3}}$ genera però multipletti in cui i restanti barioni composti non possono in alcun modo essere accomodati.

2.2.3 The Eightfold Way

Nel 1961 Gell-Mann [25] e indipendentemente Ne'eman [26] proposero che anche i barioni appartenessero indistintamente alla rappresentazione irriducibile dell'ottetto di $SU(3)$. In

questo modo, il parallelismo tra barioni e mesoni è spiegato in modo molto più semplice e naturale. Questa assegnazione, chiamata “*the Eightfold Way*”⁵ dal nome dell’articolo originale di Gell-Mann, ha alla base alcune assunzioni [27].

1. Per associare gli operatori commutativi H_1 e H_2 di $SU(3)$ all’isospin e all’ipercarica, bisogna definirli in modo che i loro autovalori corrispondano ai valori effettivamente misurati. In questo modo, il numero barionico non compare in alcuna delle formule utilizzate e quindi mesoni e barioni sono classificati allo stesso modo dando quindi luogo a due ottetti sovrapponibili.
2. Tutti i possibili adroni scoperti in seguito dovevano essere costituiti da mesoni e barioni dei due ottetti fondamentali e quindi appartenere alle rappresentazioni contenute nel prodotto $\mathbf{8} \otimes \mathbf{8} \otimes \mathbf{8} \otimes \dots$. Tutte queste particelle hanno ipercarica intera, e poiché l’ipercarica dello stato di massimo peso in qualsiasi rappresentazione è $(H_2)_{max} = \frac{1}{2}(p - q)$, questo implica che nella Eightfold Way sono permesse solo le rappresentazioni con $p = q \pmod{3}$.
3. La forte rottura di simmetria all’interno degli ottetti poteva essere spiegata ipotizzando che l’interazione nucleare forte constasse di due termini:

Interazione molto forte, invariante rispetto ad $SU(3)$, e rispetto alla quale barioni e mesoni si trasformano come ottetti;

Interazione medio forte, che rompe la simmetria unitaria di $SU(3)$ ma conserva separatamente le simmetrie di $SU(2)$ di isospin e $U(1)$ di ipercarica.

La simmetria $SU(3)$ poteva esser quindi trattata mediante la teoria perturbativa.

2.3 Il modello a quark

2.3.1 L’ipotesi dei quark

Il modello a quark, proposto nel 1964 in modo simile ma indipendente da Murray Gell-Mann [28] e George Zweig [29], può essere considerato una sintesi dei due modelli precedenti. Esso riduce drasticamente il numero di costituenti fondamentali della materia e allo stesso tempo fornisce una spiegazione semplice, consistente e predittiva dell’esistenza della simmetria interna di $SU(3)$.

Se, come afferma la Eightfold Way, gli adroni sono rappresentazioni irriducibili di dimensione superiore di $SU(3)$, viene naturale pensare di realizzare anche la rappresentazione fondamentale $\mathbf{3}$, e ricordando che tutte le rappresentazioni irriducibili possono essere costruite combinando la rappresentazione fondamentale, questo conduce direttamente all’ipotesi dei quark.

I **quark** sono le tre particelle associate agli stati della rappresentazione fondamentale $\mathbf{3}$ di $SU(3)$. Ad ognuno di essi è associato un antiquark, e questi ultimi sono le particelle associate alla rappresentazione complessa coniugata $\bar{\mathbf{3}}$ (Figura 2.2). Tutte le rappresentazioni irriducibili possono essere costruite mediante combinazioni di questi due tripletti fondamentali.

⁵Il nome allude al *Noble Eightfold Path* del buddismo, che è la quarta delle quattro nobili verità e che rappresenta la via per la fine della sofferenza.

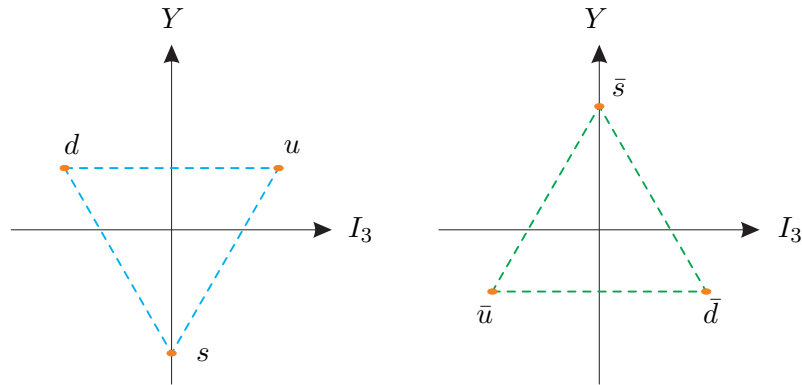


Figura 2.2: Rappresentazione dei quark e degli antiquark.

I quark potrebbero essere solamente degli oggetti matematici utili per la semplificazione del modello; se invece si ipotizza la loro reale esistenza, tutti gli adroni non sarebbero altro che stati legati di varie combinazioni degli elementi dei due tripletti. Tuttavia, la caratteristica più particolare del modello è che ai fini dell'interpretazione delle simmetrie degli adroni *non è rilevante se i quark esistano o meno*.

Il primo passo nella caratterizzazione di questo tripletto di particelle elementari consiste nell'assegnazione dei loro numeri quantici (Tabella 2.3).

L'assegnazione di isospin e ipercarica è data immediatamente dalla teoria dei gruppi, poiché derivano banalmente da come tali grandezze sono state definite nell'adattamento della simmetria unitaria agli ottetti adronici, ovvero come descritto nell'assunzione 1 della Eightfold Way.

Lo spin deve essere necessariamente $\frac{1}{2}$, affinché le varie combinazioni possano avere spin sia intero che semintero.

Qualche riflessione in più richiede l'assegnazione del numero barionico: attribuendo numero barionico opposto a quark e relativo antiquark, la combinazione quark-antiquark avrebbe numero barionico nullo e sarebbe quindi adatta alla classificazione dei mesoni come nel modello di Sakata; per ottenere l'ottetto barionico richiesto dalla Eightfold Way, invece, come vedremo la combinazione minima è di tre quark, e quindi l'ipotesi più semplice è che i quark abbiano $B = \frac{1}{3}$.

Mediante la relazione di Gell-Mann e Nishijima risultano quindi automaticamente assegnate stranezza e carica; il risultato più notevole (e che più causò storicamente ostacoli all'affermazione del modello) è che la carica dei quark risulta essere frazionaria.

Formalizziamo ora il modello a quark mediante il linguaggio della teoria dei gruppi.

In accordo alla nomenclatura assegnata dallo stesso Gell-Mann, chiamiamo i tre quark **u** ("up"), **d** ("down"), **s** ("strange") e \bar{u} , \bar{d} , \bar{s} i rispettivi antiquark; questi sono detti **sapori** dei quark.

	Quark			Antiquark		
	u	d	s	\bar{u}	\bar{d}	\bar{s}
I	1/2	1/2	0	1/2	1/2	0
I_3	1/2	-1/2	0	-1/2	1/2	0
Y	1/3	1/3	-2/3	-1/3	-1/3	2/3
Q	2/3	-1/3	-1/3	-2/3	1/3	1/3
B	1/3	1/3	1/3	-1/3	-1/3	-1/3
S	0	0	-1	0	0	1

Tabella 2.3: Numeri quantici dei quark.

Essi sono la base ortonormale dello spazio di Hilbert:

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |s\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

e pertanto un generico stato sarà esprimibile come combinazione lineare di essi.

Definiamo isospin ed ipercarica mediante

$$I_\alpha = \frac{1}{2}\lambda_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (2.22a)$$

$$Y = \frac{\lambda_8}{\sqrt{3}} \quad (2.22b)$$

Due di queste matrici, I_3 e Y , sono diagonali nella base dei quark:

$$I_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} .$$

Il modulo quadro dell'isospin, la stranezza e la carica sono anch'essi diagonali:

$$I(I+1) \equiv I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S \equiv Y - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Q \equiv I_3 + \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Per le proprietà della rappresentazione complessa coniugata, le matrici I_3 e Y per gli antiquark sono le opposte di quelle dei quark; di conseguenza, essi hanno anche segno opposto di S e Q , mentre I^2 è lo stesso per quark ed antiquark.

Vediamo ora come gli adroni possono essere costruiti a partire dai quark.

La rappresentazione irriducibile (n, m) è realizzata nello spazio dei tensori $x_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_m}$ le cui componenti indipendenti possono essere considerate come un multipletto di $D(n, m)$ particelle costituite da quark e/o antiquark. Richiediamo che ogni multipletto abbia numero barionico definito ed uguale per ogni membro; il contenuto di quark ed antiquark di un multipletto è quindi univocamente determinato.

Nel tensore $x_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_m}$ ogni indice inferiore può essere associato o ad un quark o ad una coppia antisimmetrica di antiquark; la stessa corrispondenza si applica agli indici superiori invertendo quark ed antiquark. Le diverse possibilità sono distinte dal numero barionico (Tabella 2.4).

Indice superiore i		
Possibilità I	$i = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$	$B = \frac{1}{3}$
Possibilità II	$i = \begin{bmatrix} (23) \\ (31) \\ (12) \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} (\bar{d}\bar{s}) \\ (\bar{s}\bar{u}) \\ (\bar{u}\bar{d}) \end{bmatrix}$	$B = -\frac{2}{3}$
Indice inferiore j		
Possibilità I	$j = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \\ \bar{s} \end{pmatrix}$	$B = -\frac{1}{3}$
Possibilità II	$j = \begin{bmatrix} (23) \\ (31) \\ (12) \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} (ds) \\ (su) \\ (ud) \end{bmatrix}$	$B = \frac{2}{3}$

Tabella 2.4: Corrispondenza tra indici $SU(3)$ e contenuto in quark.

Poiché abbiamo visto che:

- Se T è un generatore diagonale nella rappresentazione fondamentale $\mathbf{3}$, esso è diagonale in ogni rappresentazione irriducibile;
- Se gli autovalori di T nella rappresentazione fondamentale sono c_i ($i = 1, 2, 3$), allora

nella rappresentazione irriducibile (n, m) dove T agisce su $x_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_m}$ gli autovalori di λ sono $(c_{i_1} + \dots + c_{i_n}) - (c_{j_1} + \dots + c_{j_m})$;

in termini di modello a quark questo significa che nel formare stati composti di quark ed antiquark I_3 ed Y , e quindi anche Q ed S , sono grandezze additive.

Analizziamo quindi le più semplici possibili combinazioni delle due rappresentazioni fondamentali:

1. $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} \oplus \bar{\mathbf{3}}$

Poiché né $\mathbf{6}$ né $\bar{\mathbf{3}}$ soddisfano la regola della triality, la combinazione di due quark non può formare adroni.

2. $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$

Gli stati legati quark-antiquark danno origine ai mesoni ($B = 0$). Poiché la rappresentazione $\mathbf{8}$ coincide con la sua complessa coniugata, essa conterrà anche gli antimisoni.

3. $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10}$

Gli stati legati di tre quark danno origine ai barioni ($B = 1$).

4. $\bar{\mathbf{3}} \otimes \bar{\mathbf{3}} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \bar{\mathbf{10}}$

Gli stati legati di tre antiquark danno origine agli antibarioni ($B = -1$).

Costruiamo ora esplicitamente le rappresentazioni irriducibili di mesoni e barioni (Tabella 2.5).

Preliminarmente, facciamo qualche osservazione. Il diagramma dei pesi è una proprietà di $SU(3)$; di conseguenza, ogni rappresentazione potrà essere distinta per quelle proprietà che non sono incluse nella simmetria, ovvero spin, parità e numero barionico (quest'ultimo determinerà invece il contenuto in quark); all'interno di ogni rappresentazione saranno accorpati multipletti di isospin di particelle separate per carica (cioè I_3) ed ipercarica Y .

2.3.2 Mesoni

I mesoni sono stati legati quark-antiquark.

Il loro spin è pertanto intero. Se il momento angolare orbitale della coppia è nullo, sono possibili gli stati con $J^P = 0^-$ o $J^P = 1^-$, in quanto $P_M = (-1)^l P_q P_{\bar{q}}$ e quark ed antiquark hanno parità intrinseca opposta.

Le nove possibili combinazioni quark-antiquark sono raggruppate in un ottetto e un singoletto, che nel diagramma dei pesi assumono le configurazioni mostrate nelle figure seguenti.

Osserviamo che nel punto $(I_3, Y) = (0, 0)$ ci sono tre stati diversi: il singoletto e i due stati degeneri dell'ottetto; applicando le corrette proprietà di simmetria e normalizzazione essi

B	J^P	Particelle	Massa (MeV)	Massa media (MeV)
0	0^-	π^0	135	500
		$\pi^+ \quad \pi^-$	140	
		$K^+ \quad K^-$	494	
		$K^0 \quad \bar{K}^0$	498	
		η	547	
		η'	958	
0	1^-	$\rho^+ \quad \rho^0 \quad \rho^-$	771	900
		ω	783	
		$K^{*+} \quad K^{*-} \quad K^{*0} \quad \bar{K}^{*0}$	892	
		ϕ	1020	
1	$\frac{1}{2}^+$	p	938	1150
		n	939	
		Λ	1116	
		$\Sigma^+ \quad \Sigma^0 \quad \Sigma^-$	1193	
		$\Xi^0 \quad \Xi^-$	1318	
1	$\frac{3}{2}^+$	$\Delta^{++} \quad \Delta^+ \quad \Delta^0 \quad \Delta^-$	1232	1400
		$\Sigma^{*+} \quad \Sigma^{*0} \quad \Sigma^{*-}$	1385	
		$\Xi^{*0} \quad \Xi^{*-}$	1530	
		Ω^-	1672	

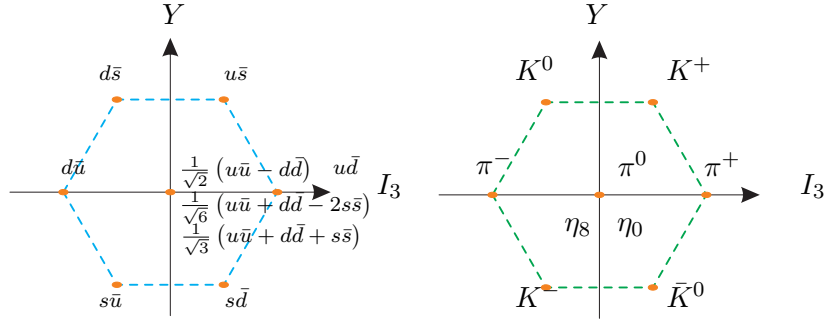
Tabella 2.5: Adroni leggeri.

possono essere scritti come:

$$\begin{aligned}
 |1; Y = 0, I = 0, I_3 = 0\rangle &= \frac{\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s}{\sqrt{3}} \\
 |8; Y = 0, I = 0, I_3 = 0\rangle &= \frac{\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s}{\sqrt{6}} \\
 |8; Y = 0, I = 1, I_3 = 0\rangle &= \frac{\bar{u}u - \bar{d}d}{\sqrt{2}} .
 \end{aligned}$$

Pertanto, ad ogni mesone è univocamente associato il contenuto in quark.

- Consideriamo le combinazioni mesoniche con $J^P = 0^-$, il cui ottetto è proprio quello della Eightfold Way (Figura 2.3).


 Figura 2.3: Mesoni con $J^P = 0^-$.

Gli stati sono:

$$\begin{aligned}
 |\pi^+\rangle &= |u\bar{d}\rangle & |\pi^-\rangle &= |d\bar{u}\rangle & |\pi^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\bar{u}u\rangle - |\bar{d}d\rangle) \\
 |K^+\rangle &= |u\bar{s}\rangle & |K^0\rangle &= |d\bar{s}\rangle & |K^-\rangle &= |s\bar{u}\rangle & |\bar{K}^0\rangle &= |s\bar{d}\rangle \\
 |\eta_8\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}(|\bar{u}u\rangle + |\bar{d}d\rangle - 2|\bar{s}s\rangle) & |\eta_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|\bar{u}u\rangle + |\bar{d}d\rangle + |\bar{s}s\rangle)
 \end{aligned}$$

L'identificazione degli stati η_0 ed η_8 con le particelle note η ed η' risulta difficoltosa a causa della coincidenza dei numeri quantici e dei particolari valori delle masse; tuttavia, a partire dagli stati η_0 ed η_8 , per il principio di sovrapposizione si possono costruire nuovi stati con gli stessi numeri quantici Y e I . Questo procedimento è chiamato **mixing** e sperimentalmente si attribuisce agli stati η ed η' il contenuto [9]

$$|\eta\rangle = \cos\theta |\eta_8\rangle + \sin\theta |\eta_0\rangle \quad |\eta'\rangle = -\sin\theta |\eta_8\rangle + \cos\theta |\eta_0\rangle$$

dove il valore sperimentalmente dell'angolo di mixing è $\theta \approx 20^\circ$.

Mediante l'uso dei tensori, i mesoni possono essere rappresentati mediante matrici a traccia nulla \mathcal{P} in modo che un mesone di contenuto $q^i\bar{q}_j$ sia rappresentato dall'elemento di matrice \mathcal{P}_j^i .

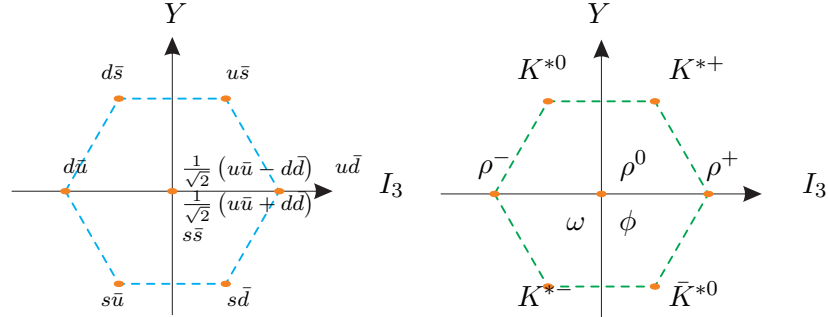
Per l'ottetto si trova

$$\mathcal{P}_8 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_8 & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_8 & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta_8 \end{pmatrix}$$

mentre per il singoletto

$$\mathcal{P}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \eta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_0 \end{pmatrix}$$

- La costruzione è analoga per i mesoni con $J^P = 1^-$ (figura 2.4).


 Figura 2.4: Mesoni con $J^P = 1^-$.

Gli stati sono:

$$\begin{aligned}
 |\rho^+\rangle &= |u\bar{d}\rangle & |\rho^-\rangle &= |d\bar{u}\rangle & |\rho^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\bar{u}u\rangle - |\bar{d}d\rangle) \\
 |K^{*+}\rangle &= |u\bar{s}\rangle & |K^{*0}\rangle &= |d\bar{s}\rangle & |K^{*-}\rangle &= |s\bar{u}\rangle & |\bar{K}^{*0}\rangle &= |s\bar{d}\rangle \\
 |\rho_8\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} (|\bar{u}u\rangle + |\bar{d}d\rangle - 2|\bar{s}s\rangle) & |\rho_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|\bar{u}u\rangle + |\bar{d}d\rangle + |\bar{s}s\rangle)
 \end{aligned}$$

Esistono due stati fisici, ω e ϕ , con gli stessi numeri quantici $Y = 0$ e $I = 0$ degli autostati ρ_8 e ρ_0 . Anche in questo caso siamo in presenza di un caso di mixing e il contenuto sperimentale è

$$|\omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\bar{u}u\rangle + |\bar{d}d\rangle) \quad |\phi\rangle = |\bar{s}s\rangle$$

Questo mixing è detto **ideale** ed sarà spiegato da considerazioni sulle masse.

Il nonetto (ottetto+singoletto) di mesoni vettori è rappresentato dalla matrice

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\rho^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\omega & \rho^+ & K^{*+} \\ \rho^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\rho^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\omega & K^{*0} \\ K^{*-} & \bar{K}^{*0} & \phi \end{pmatrix}$$

- Si può proseguire considerando gli stati legati quark-antiquark con momento angolare orbitale non nullo, e con costruzioni del tutto analoghe si ottiene una fedele riproduzione della spettroscopia mesonica.

2.3.3 Barioni

I barioni sono stati legati di tre quark.

Se il momento angolare orbitale è nullo, si può avere $J^P = \frac{1}{2}^+$ o $J^P = \frac{3}{2}^+$. Tutte le combinazioni possibili sono raggruppate in singoletti, ottetti e decupletti.

- Il contenuto dell'ottetto con $J^P = \frac{1}{2}^+$ è mostrato in Figura 2.5.

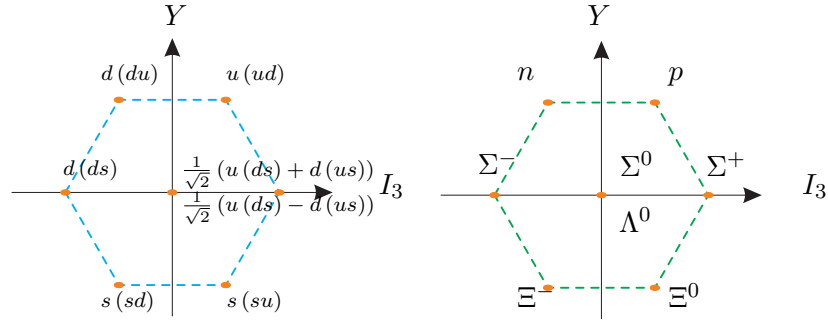


Figura 2.5: Barioni con $J^P = \frac{1}{2}^+$.

Gli stati sono:

$$I = 0 : \quad |p\rangle = |u(ud)\rangle \quad |n\rangle = |d(du)\rangle$$

$$I = 1 : \quad |\Sigma^+\rangle = |u(us)\rangle \quad |\Sigma^-\rangle = |d(ds)\rangle \quad |\Sigma^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u(ds)\rangle + |d(us)\rangle)$$

$$I = 0 : \quad |\Lambda^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u(ds)\rangle - |d(us)\rangle)$$

$$I = \frac{1}{2} : \quad |\Xi^0\rangle = |s(su)\rangle \quad |\Xi^-\rangle = |s(sd)\rangle$$

Con (qq') indichiamo

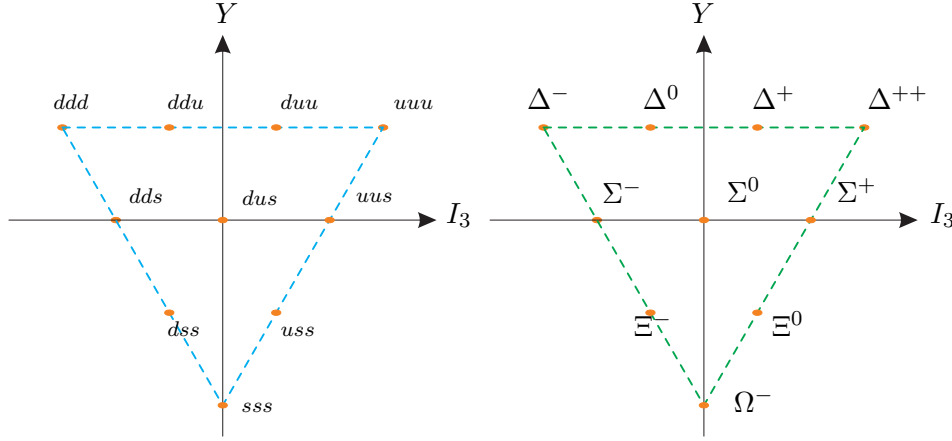
$$(qq') = q(1)q'(2) - q(2)q'(1) \quad ,$$

dove gli indici 1 e 2 identificano i due diversi quark. In questa base lo stato Λ^0 ha non solo $I_3 = 0$, ma anche $I = 0$ e differisce quindi da Σ^0 che ha $I_3 = 0$ ma $I = 1$.

Anche l'ottetto barionico puo' essere rappresentato mediante una matrice a traccia nulla: $\mathcal{B}_j^i = q^i (q^l q^k \epsilon_{jlk})$ dove i è l'indice di riga e j l'indice di colonna. Pertanto si ha

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\Lambda \end{pmatrix}$$

- Passando al decupletto barionico, sperimentalmente si trova che esso ha spin $\frac{3}{2}$ (Figura 2.6).


 Figura 2.6: Barioni con $J^P = \frac{3}{2}^+$.

Il suo contenuto in quark è

$$\begin{aligned}
 I = 0 : & \quad |\Delta^{++}\rangle = |uuu\rangle & |\Delta^+\rangle & = |uud\rangle & |\Delta^0\rangle & = |udd\rangle & |\Delta^-\rangle & = |ddd\rangle \\
 I = 1 : & \quad |\Sigma^{*+}\rangle = |uus\rangle & |\Sigma^{*-}\rangle & = |dds\rangle & |\Sigma^{*0}\rangle & = |uds\rangle \\
 I = \frac{1}{2} : & \quad |\Xi^{*0}\rangle = |uss\rangle & |\Xi^{*-}\rangle & = |dss\rangle \\
 I = 0 : & \quad |\Omega^-\rangle = |sss\rangle
 \end{aligned}$$

2.4 Interazioni e dinamica

Il modello a quark così come esposto finora è puramente algebrico. Per attribuirgli una valenza fisica è necessario aggiungergli un contenuto dinamico, ovvero costruire una teoria nello spazio-tempo. È a questo punto che diventa rilevante se i quark siano solo oggetti matematici o esistano fisicamente.

L'ipotesi più semplice e immediata per dare al modello a quark un certo contenuto dinamico è assumere che i quark siano particelle reali che si muovono in un certo potenziale efficace, come avviene per la descrizione dei nucleoni nel nucleo. Già nel 1965 Giacomo Morpurgo [30] formulò questo modello detto **modello a quark costituenti**, in cui i quark occupano quindi orbitali di particella singola che sono descritti da funzioni d'onda spaziali e hanno energie definite⁶.

Si tratta di una semplificazione piuttosto pesante in quanto abbiamo anticipato che la descrizione delle interazioni tra particelle elementari deve necessariamente essere inclusa in una

⁶In realtà, un cenno di questo è già stato introdotto quando abbiamo parlato di momento angolare relativo nella costruzione delle rappresentazioni degli adroni.

teoria quantistica di campo; vedremo infatti che questo modello non solo lascia molti fenomeni inspiegati ma porta anche a pesanti contraddizioni; tuttavia, esso si rivelerà comunque un metodo semplice e alquanto efficace per la descrizione di molti fenomeni.

2.4.1 Spin

Per poter analizzare le proprietà spazio-temporali, dobbiamo preliminarmente fare alcune osservazioni sullo spin.

Il modello a quark $SU(6)$ [31] è un'estensione del modello di Gell-Mann. Esso associa ogni quark (che genera il gruppo $SU(3)_f$) con lo spin (che genera il gruppo $SU(2)_s$) e inserisce $[SU(3)_f] \times [SU(2)_s]$ nella simmetria più larga $SU(6)$. Di conseguenza, la base allargata consiste di un sestetto di quark:

$$\{u(\uparrow), u(\downarrow), d(\uparrow), d(\downarrow), s(\uparrow), s(\downarrow)\} \quad .$$

Per i mesoni si ha $\mathbf{6} \otimes \mathbf{6} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{35}$. La $\mathbf{35}$ è identificata con l'unione dell'ottetto di spin 0 e del nonetto di spin 1.

Per i barioni si ha $\mathbf{6} \otimes \mathbf{6} \otimes \mathbf{6} = \mathbf{56} \oplus \mathbf{70} \oplus \mathbf{70} \oplus \mathbf{20}$. La $\mathbf{56}$ è identificabile con l'unione dell'ottetto e del decupletto barionici.

In effetti, gli splitting di massa tra i multipletti che risultano uniti non sono molto diversi da quelli all'interno dei multipletti stessi.

La simmetria $SU(6)$, tuttavia, distingue tra momento angolare di spin e momento angolare orbitale. Questa distinzione può essere fatta solo in un modello non relativistico, ed è inconsistente con l'invarianza di Lorentz. Un'immediata correzione relativistica di $SU(6)$ sarebbe di includerlo in un gruppo più largo che contenga il gruppo di Poincaré. Poiché le simmetrie interne sarebbero quindi accoppiate a quelle spazio-temporali, una tale inclusione avrebbe contenuto dinamico. Tuttavia, tutti gli sforzi effettuati in questa direzione sono falliti; infatti, ci sono dei teoremi [14] che mostrano che non è possibile un'inclusione non banale. D'altra parte, il fatto che $SU(6)$ descriva correttamente gli adroni potrebbe non essere accidentale ma potrebbe indicare che $SU(6)$ è una sorta di approssimazione nel limite non relativistico di una più corretta teoria relativistica.

2.4.2 Massa

Se l'interazione forte fosse invariante sotto il gruppo $SU(3)$, tutti i membri di uno stesso multipletto avrebbero la stessa massa. La differenza di massa delle particelle nello stesso multipletto va quindi attribuita ad un termine di Hamiltoniana non invariante rispetto ad $SU(3)$. L'interazione forte completa della parte simmetrica e non simmetrica non è pertanto invariante rispetto a tutti gli operatori di $SU(3)$. Poiché essa conserva isospin ed ipercarica, deve essere invariante rispetto agli operatori T_1, T_2, T_3, T_8 , quindi le differenze di massa sono dovute alla non invarianza rispetto a T_4, T_5, T_6, T_7 . Osservando la struttura di questi operatori, deduciamo quindi che l'interazione forte è invariante rispetto agli operatori che scambiano $u \leftrightarrow d$ mentre non lo è rispetto agli operatori che scambiano $u \leftrightarrow s$ e $d \leftrightarrow s$ [32].

Consideriamo l'ottetto barionico. Se $SU(3)$ fosse una simmetria esatta, tutte le particelle dell'ottetto avrebbero la stessa massa; poiché la simmetria è solo approssimata, le masse sono

diverse. Se però, come ipotizzato da Gell-Mann, l'interazione *molto forte* invariante rispetto ad $SU(3)$ è predominante rispetto all'interazione *medio forte* che rompe $SU(3)$, gli splitting di massa tra le particelle all'interno di una rappresentazione irriducibile devono essere piccoli rispetto alla massa media di tutte le particelle di tale rappresentazione.

Poiché la massa è l'energia di una particella a riposo, ci proponiamo di calcolare l'elemento di matrice dell'Hamiltoniana tra i vari stati di particella singola [8].

Per il momento tralasciamo le interazioni deboli ed elettromagnetiche: le interazioni deboli danno un contributo assolutamente trascurabile alle masse; le interazioni elettromagnetiche sono più importanti poiché il loro effetto è piccolo ma viola la simmetria di isospin.

Con queste approssimazioni, se $|B\rangle$ è il generico stato dell'ottetto, l'elemento di matrice è

$$\langle B|H_S|B\rangle = \langle B|H_{VS}|B\rangle + \langle B|H_{MS}|B\rangle \quad ,$$

dove H_{VS} commuta con tutti i generatori di $SU(3)$ e H_{MS} commuta con i generatori di isospin e ipercarica, ma non con gli altri. Il primo termine contribuisce alla massa comune di ogni particella della rappresentazione, mentre in generale non abbiamo molte informazioni circa il secondo termine.

Tuttavia, si può ipotizzare che H_{MS} si trasformi come l'ottavo elemento dell'ottetto di $SU(3)$; questa è la più semplice possibilità consistente con la conservazione di isospin ed ipercarica. Infatti, poiché l'Hamiltoniana d'interazione forte deve commutare con i generatori di isospin ed ipercarica, essa deve essere un operatore tensoriale che abbia componenti con $I = 0$ e $Y = 0$, e l'ottetto è la più piccola rappresentazione non banale che contenga uno stato con $I = Y = 0$. Poiché lo stato con $I = Y = 0$ corrisponde al generatore T_8 , possiamo assumere che H_{MS} si trasformi come la componente T_8 della rappresentazione aggiunta, ovvero

$$H_{MS} = [T_8]_j^i O_j^i \quad (2.23)$$

dove O è un operatore tensoriale che si trasforma come l'ottetto di $SU(3)$:

$$[T_a, O_j^i] = O_k^j [T_a]_i^k - O_i^k [T_a]_k^j \quad .$$

Con questa ipotesi, l'elemento di matrice può essere calcolato con metodi tensoriali. Le due combinazioni indipendenti di coefficienti tensoriali invarianti rispetto ad $SU(3)$ sono

$$\bar{B}_j^i [T_8]_k^j B_i^k = \text{Tr} (B^\dagger T_8 B) \quad \bar{B}_j^i B_k^j [T_8]_i^k = \text{Tr} (B^\dagger B T_8) \quad ,$$

pertanto semplicemente partendo dall'assunzione della simmetria $SU(3)$ e delle proprietà di trasformazione di H_{MS} possiamo calcolare

$$\begin{aligned} \langle B|H_{MS}|B\rangle &= X \text{Tr} (B^\dagger B T_8) + Y \text{Tr} (B^\dagger T_8 B) \\ &= X \frac{[B^\dagger B]_1^1 + [B^\dagger B]_2^2 - 2[B^\dagger B]_3^3}{\sqrt{12}} + Y \frac{[BB^\dagger]_1^1 + [BB^\dagger]_2^2 - 2[BB^\dagger]_3^3}{\sqrt{12}} \\ &= X \frac{|\Sigma|^2 + |\Xi|^2 - |\Lambda|^2 - 2|N|^2}{\sqrt{12}} + Y \frac{\Sigma^2 + N^2 - \Lambda^2 - 2\Xi^2}{\sqrt{12}} \end{aligned}$$

dove abbiamo sottinteso la somma su tutti i tipi di particelle in ogni rappresentazione di isospin. Ora è immediato determinare il contributo alla massa di ogni particella inserendo l'opportuno coefficiente tensoriale. Aggiungendo la massa comune M_0 derivante dall'interazione molto forte ricaviamo finalmente

$$\begin{aligned} M_N &= M_0 - X \frac{2}{\sqrt{12}} + Y \frac{1}{\sqrt{12}} \\ M_\Sigma &= M_0 + X \frac{1}{\sqrt{12}} + Y \frac{1}{\sqrt{12}} \\ M_\Lambda &= M_0 - X \frac{1}{\sqrt{12}} + Y \frac{1}{\sqrt{12}} \\ M_\Xi &= M_0 + X \frac{1}{\sqrt{12}} + -2Y \frac{1}{\sqrt{12}} \quad . \end{aligned}$$

In questo modo abbiamo espresso le quattro masse in termini di tre parametri. A priori non sappiamo nulla circa M_0 , X e Y , ma possiamo eliminare queste quantità dinamiche e ricavare una relazione che deriva quindi puramente da considerazioni di simmetria:

$$2(M_N + M_\Xi) = 3M_\Lambda + M_\Sigma \quad . \quad (2.24)$$

Questa è nota come *formula di massa di Gell-Mann e Okubo*. Essa è in accordo con i dati sperimentali entro l'1%, addirittura meglio della rottura della simmetria di isospin.

Passando ad analizzare il decupletto barionico, assumiamo nuovamente che H_{MS} si trasformi come l'ottavo elemento della rappresentazione aggiunta e calcoliamo $\langle B^* | H_{MS} | B^* \rangle$, dove abbiamo indicato con B^* la funzione d'onda del decupletto e quindi $|B^* \rangle = B^{*jkl} |_{jkl} \rangle$ è il generico elemento del decupletto. Poiché c'è solo un elemento della matrice ridotta, gli elementi di matrice di tutti gli operatori dell'ottetto sono proporzionali (componente per componente). Pertanto l'elemento di matrice cercato è proporzionale all'elemento di matrice del generatore, T_8 , e quindi all'ipercarica, Y . Questo implica un'equispaziatura tra i multipletti di isospin:

$$M_{\Sigma^*} - M_\Lambda = M_{\Xi^*} - M_{\Sigma^*} = M_{\Omega^-} - M_{\Xi^*} \quad .$$

Sperimentalmente, si trova:

$$M_\Lambda = 1230 \quad M_{\Sigma^*} = 1358 \quad M_{\Xi^*} = 1530 \quad M_{\Omega^-} = 1672 \quad ,$$

con una spaziatura quasi uguale di circa 150 MeV.

Quando Gell-Mann propose il modello, la Ω^- non era stata ancora osservata, ed egli fu quindi in grado di prevederne non solo l'esistenza, ma anche la massa. Questo fu uno dei successi che portò all'affermazione della teoria (Figura 2.7).

Per l'ottetto di mesoni pseudoscalari, si trova sperimentalmente che la formula di Gell-Mann Okubo funziona se le masse sono sostituite dai loro quadrati [9]:

$$m_K^2 = \frac{m_\pi^2 + 3m_{\eta_8}^2}{4} \quad ;$$

una possibile spiegazione è la presenza di un termine quadratico nella massa nella Lagrangiana scalare.

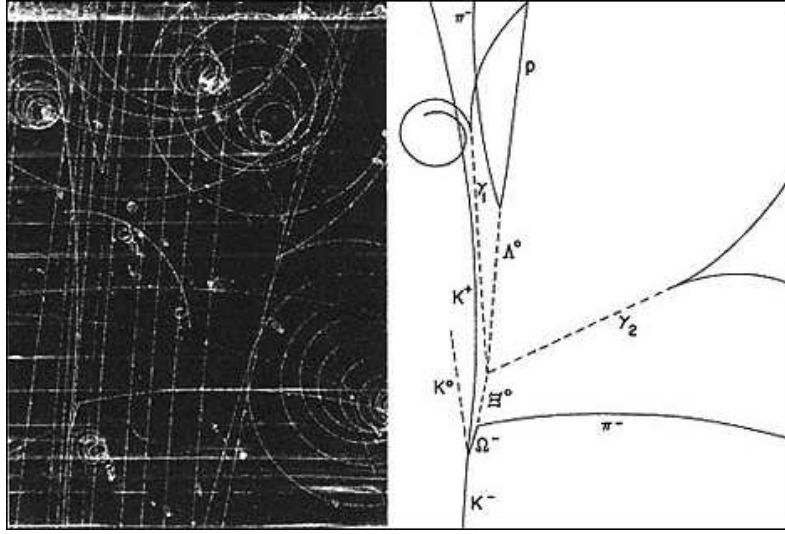


Figura 2.7: Il primo evento Ω^- (Barnes *et al.* 1964, Brookhaven National Laboratory).

Usando per η_8 il valore sperimentale si trova accordo entro il 7%. L'accordo migliora se consideriamo il mixing; con l'angolo di mixing di 20° esso si riduce a meno dell'1%.

Consideriamo infine l'ottetto di mesoni vettori. Se la matrice dell'ottetto puro è

$$\mathcal{V}_8 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\rho^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\omega_8 & \rho^+ & K^{*+} \\ \rho^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\rho^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\omega_8 & K^{*0} \\ K^{*-} & \bar{K}^{*0} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\omega_8 \end{pmatrix}$$

la formula di Gell-Mann Okubo predice

$$3m_{\omega_8}^2 = 4m_{K^*}^2 - m_\rho^2$$

e quindi $m_{\omega_8} = 926.5$ MeV, che differisce significativamente da entrambe le masse sperimentali m_ω e m_ϕ . Dobbiamo pertanto ancora una volta ipotizzare un mixing tra gli stati ω_8 e il singoletto ω_0 , e quindi il termine quadratico di massa ha la forma

$$\omega M^2 \omega = \begin{pmatrix} \omega_8 & \omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{\omega_8}^2 & m_{\omega_8 0}^2 \\ m_{\omega_8 0}^2 & m_{\omega_0}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_8 \\ \omega_0 \end{pmatrix} ;$$

esso può essere diagonalizzato mediante la rotazione

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

e otteniamo quindi gli autovettori

$$\omega = \cos \theta \omega_8 + \sin \theta \omega_0 \quad \phi = -\sin \theta \omega_8 + \cos \theta \omega_0$$

insieme agli autovalori m_ω^2 e m_ϕ^2 dati dalle relazioni

$$m_{\omega_8}^2 = \cos^2 \theta m_\omega^2 + \sin^2 \theta m_\phi^2 \quad m_{\omega_0}^2 = \sin^2 \theta m_\omega^2 + \cos^2 \theta m_\phi^2 \quad m_{\omega_{80}}^2 = \sin 2\theta \frac{m_\phi^2 - m_\omega^2}{2} .$$

Sostituendo i valori sperimentali delle masse, si trova $\sin \theta = 0.76$, e utilizzando il valore approssimato

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{2}{3}} ,$$

otteniamo il cosiddetto mixing ideale.

2.4.3 Colore

Il punto di partenza per la costruzione di una teoria di campo più profonda per le interazioni tra i quark è dato proprio dal tentativo di risolvere alcune grosse difficoltà del modello:

1. Non c'è alcuna spiegazione del fatto che sembrano esistere solo combinazioni $q\bar{q}$ e qqq . I mesoni potrebbero essere anche formati da combinazioni $q\bar{q}q\bar{q}$ o più complesse, così come i barioni da $q\bar{q}qqq$ e così via. Non c'è inoltre una ragione per cui sono osservati solo stati con B e Q interi.
2. Poiché i quark hanno spin $\frac{1}{2}$, essi sono fermioni e quindi obbediscono al principio di esclusione di Pauli. Dunque la funzione d'onda totale di un adrone deve essere antisimmetrica rispetto allo scambio simultaneo di sapore, spin e orbitale tra due quark. In particolare, per un barione la funzione d'onda è simmetrica rispetto allo scambio spin-sapore, e pertanto deve essere antisimmetrica rispetto allo scambio di orbitale; di conseguenza, i tre quark devono trovarsi in tre diversi orbitali e solo uno può essere in onda s . D'altra parte, i calcoli di momento magnetico secondo il modello sono in accordo con i dati sperimentali solo se non si considera alcun contributo orbitale, ovvero se tutti e tre i quark si trovano nell'orbitale s . La contraddizione è rafforzata se si considera il raggio di carica degli adroni. In un mesone, il quark e l'antiquark possono trovarsi entrambi nell'orbitale s di minima energia; poiché si osserva sperimentalmente che il raggio di carica dei mesoni è quasi uguale a quello dei barioni, anche i tre quark dei barioni dovrebbero trovarsi tutti nell'orbitale s .
3. I quark non sono mai stati osservati allo stato libero.

Una teoria capace contemporaneamente di risolvere il paradosso del punto 2 e di fornire una spiegazione per i punti 1 e 3 è la *Cromodinamica Quantistica (QCD)*. Essa è una teoria di gauge locale basata sul gruppo di simmetria di colore $SU(3)_c$; la sua formulazione è basata sulla costruzione non Abelianiana di Yang e Mills.

Secondo la QCD, i quark possiedono un ulteriore grado di libertà, chiamato **colore**. Esistono tre diversi colori, che interagiscono mediante un insieme di 8 bosoni vettori mediatori detti **gluoni** secondo una simmetria $SU(3)$, detta **SU(3) di colore** $SU(3)_c$ e che è completamente separata dalla $SU(3)$ di sapore ma che fornisce la forza che lega i quark negli adroni.

La proprietà fondamentale è che **possono esistere solo stati senza colore**, ovvero tutti gli stati fisici sono singoletti di colore. Questo risolve contemporaneamente i tre problemi riscontrati.

Gli stati di colore dei quark si trasformano secondo la rappresentazione $\mathbf{3}$ di $SU(3)_c$, e quindi hanno un singolo indice di $SU(3)_c$ che va da 1 a 3; le loro funzioni d'onda sono quindi tensori

$$q^i \quad \text{per} \quad i = 1, 2, 3 \quad .$$

Essi hanno anche indici di sapore, spin e posizione, ma questi sono completamente indipendenti. Gli antiquark si trasformano secondo la rappresentazione $\bar{\mathbf{3}}$ di $SU(3)_c$, in quanto le cariche di colore, o almeno quelle nel sottogruppo di Cartan che può essere diagonalizzato, sono numeri quantici e di conseguenza devono cambiare segno passando dalla particella alla rispettiva antiparticella, cosa che si verifica passando da una rappresentazione alla sua complessa coniugata.

In questo modo un barione, ovvero un singoletto di colore formato da tre quark, è descritto da

$$\epsilon_{ijk} q^i q^j q^k$$

e poiché ϵ è completamente antisimmetrico, lo stato è simmetrico rispetto allo scambio di tutti gli altri indici, risolvendo la contraddizione al punto 2. Analogamente, un antibarione (un singoletto di colore formato da tre antiquark) è descritto da

$$\epsilon^{ijk} \bar{q}_i \bar{q}_j \bar{q}_k$$

mentre un mesone (un singoletto di colore formato da un quark e un antiquark) è descritto da

$$q^i \bar{q}_i \quad .$$

La QCD fornisce una motivazione della proprietà fondamentale precedentemente enunciata. I gluoni accoppiano le cariche di colore, che sono i generatori di $SU(3)_c$; l'interazione tra due particelle colorate è proporzionale alla somma dei prodotti delle loro cariche di colore; se questa è negativa, la forza è attrattiva.

Consideriamo lo stato di due particelle A e B che si trasformano secondo una rappresentazione di $SU(3)_c$:

$$T_a^A |r, A\rangle = |s, A\rangle [T_a^A]_{sr} \quad T_a^B |x, B\rangle = |y, B\rangle [T_a^B]_{xy}$$

dove r, s (x, y) sono gli indici di colore per la rappresentazione A (B). Lo stato delle due particelle è quindi il prodotto tensoriale

$$|v, A, B\rangle = v_{rx} |r, A\rangle |x, B\rangle \quad .$$

Ora, l'interazione di colore è proporzionale al prodotto delle due cariche $T_a^A T_a^B$ sommato su a ; esso è invariante rispetto ad $SU(3)$ in quanto il generatore dello spazio prodotto tensoriale è $T_a = T_a^A + T_a^B$ che, si vede subito [8], commuta con il prodotto. Gli autostati del prodotto

delle cariche sono rappresentazioni irriducibili di $SU(3)_c$ per il lemma di Schur. Per calcolare gli autovalori, è utile scrivere

$$T_a^A T_a^B = \frac{1}{2} \left(T_a^2 - T_a^{A^2} - T_a^{B^2} \right)$$

in quanto l'oggetto T_a^2 è un operatore di Casimir ed è quindi un numero in ogni rappresentazione irriducibile. Osserviamo che $T_a^{A^2}$ e $T_a^{B^2}$ sono fissati in quanto sono proprietà delle particelle coinvolte, mentre T_a^2 dipende da come gli stati A e B sono combinati in uno stato di colore definito, cioè dipende da come la particolare combinazione lineare di stati del prodotto tensoriale che stiamo considerando si trasforma rispetto ad $SU(3)$, ed ha valore definito per gli stati che si trasformano secondo una rappresentazione irriducibile. Pertanto, T_a^2 fornisce una misura della rappresentazione di colore: più piccolo è T_a^2 , meno colorato è lo stato. Di conseguenza la forza di colore è più attrattiva nello stato meno colorato, e quindi tende a legare quark ed antiquark nello stato meno colorato possibile.

In uno stato $q\bar{q}$, lo stato meno colorato possibile sarà un singoletto di $SU(3)$ (con $T_a^2 = 0$).

In uno stato a tre quark, possiamo considerare una coppia alla volta: se i colori di una coppia sono combinati simmetricamente lo stato qq è un $\mathbf{6}$, se sono combinati antisimmetricamente lo stato è un $\mathbf{\bar{3}}$; T_a^2 vale $\frac{4}{3}$ per $\mathbf{\bar{3}}$ e $\frac{10}{3}$ per $\mathbf{6}$, pertanto la combinazione antisimmetrica è la più attrattiva; di conseguenza lo stato favorito è quello antisimmetrico dei colori di ogni coppia, ovvero il singoletto che è lo stato completamente antisimmetrico.

Nella QCD esiste un parametro dimensionale indicato con Λ_{QCD} , che vale circa 200 MeV. L'interazione di colore è molto debole a distanze inferiori ad $\frac{1}{\Lambda_{QCD}}$, ma diventa molto forte a distanze maggiori. Si suppone che quindi i quark siano permanentemente confinati all'interno degli adroni, e che non si potrà mai isolare completamente un quark. Questo non significa però che sia impossibile osservare i quark; infatti, quark e gluoni sono stati osservati indirettamente in esperimenti di scattering ad energie molto maggiori di Λ_{QCD} ; significa però che i quark non compaiono direttamente nello spettro di basse energie.

Tramite questa teoria delle interazioni forti, possiamo capire perché la $SU(3)$ di sapore sia una simmetria valida. Infatti, una volta introdotta la QCD come teoria fondamentale, l'interazione nucleare forte tra gli adroni non è altro che una conseguenza dell'interazione di colore tra i quark. L'interazione dei gluoni è la stessa per ogni tipo di quark; l'unica caratteristica che distingue tra i quark è la loro massa. Un termine di massa nell'Hamiltoniana QCD è

$$m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d + m_s \bar{s}s$$

dove u, d, s ($\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$) sono gli operatori di distruzione (creazione) per i quark u, d, s . Essa può essere riscritta come

$$\underbrace{(m_u + m_d + m_s) \frac{(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s)}{3}}_{(a)} + \underbrace{(m_u - m_d) \frac{(\bar{u}u - \bar{d}d)}{2}}_{(b)} + \underbrace{(2m_s - m_u - m_d) \frac{(2\bar{s}s - \bar{u}u - \bar{d}d)}{6}}_{(c)} \quad (2.25)$$

dove:

(a) è invariante rispetto ad $SU(3)$;

- (b) rompe la simmetria di isospin, che spiega il motivo della leggerissima differenza di massa tra i quark u e d . Questo termine è una piccola perturbazione che può essere trascurata a meno che non si voglia studiare la violazione dell'isospin; esso è dello stesso ordine dell'interazione elettromagnetica, anche se probabilmente non ha nessun legame con essa;
- (c) è il termine responsabile della più grande rottura della simmetria $SU(3)$. Anch'esso è relativamente piccolo, infatti le differenze di massa $s-u$ e $s-d$ misurate per esempio per mezzo degli splitting di massa all'interno delle rappresentazioni di $SU(3)$ sono piccole rispetto al parametro Λ_{QCD} . Osserviamo che questo termine è un operatore tensoriale, l'ottava componente dell'ottetto; è per questo motivo che l'ipotesi sulla trasformazione di H_{MS} funziona correttamente.

Le interazioni forti tra adroni sono quindi in realtà dovute alle interazioni di colore tra i quark e possono quindi essere descritte con un formalismo simile a quello della QED, cioè tramite la teoria quantistica dei campi.

In particolare, analogamente alla QED, in QCD la forza dell'accoppiamento forte per lo scambio di un singolo gluone tra cariche di colore è [10]

$$\frac{1}{2}c_1c_2\alpha_s \quad ,$$

dove c_1 e c_2 sono i coefficienti di colore associati ai vertici. È convenzione chiamare

$$C_F \equiv \frac{1}{2}|c_1c_2| \quad (2.26)$$

fattore di colore. I calcoli espliciti portano subito a

$$c_1c_2 = P - \frac{1}{2}$$

dove $P = \pm 1$ rispettivamente se i due quark sono in uno stato di colore simmetrico o antisimmetrico.

Inoltre, la conservazione di B implica che è impossibile creare o distruggere un singolo quark, mentre si possono creare o annichilare coppie quark-antiquark; la conservazione del sapore da parte delle interazioni forti implica che le transizioni con cambiamento di sapore possano avvenire solo mediante le interazioni deboli.

2.4.4 Modelli a quark costituenti

Come abbiamo detto nell'introduzione, a grandi distanze la QCD diventa intrattabile analiticamente.

L'impossibilità di risolvere le equazioni della cromodinamica quantistica in regime non perturbativo (basse energie) ha stimolato lo sviluppo di numerosi modelli efficaci per la descrizione degli adroni in termini di quark. Essi sono simili al modello di Morpurgo cui abbiamo già accennato, e hanno dimostrato di essere in grado di riprodurre in maniera molto soddisfacente le proprietà degli adroni, nonostante la loro relativa semplicità e le forti approssimazioni con cui sono formulati.

Il modello a quark costituenti è basato sulle seguenti ipotesi [12]:

1. I quark sono particelle realmente esistenti e sono i costituenti degli adroni;
2. L'interazione tra i quark è istantanea; essa può quindi essere descritta da un'equazione d'onda del genere di quella di Schrödinger indipendente dal tempo. Pertanto i quark sono considerate particelle che si muovono in un certo potenziale effettivo che ne descrive l'interazione nel sistema di riferimento del centro di massa. L'Hamiltoniana ha quindi la forma $H = T + V$ e l'equazione

$$H\psi = E\psi$$

assume il seguente significato: H è l'Hamiltoniana del sistema costituito dai quark nel sistema di riferimento del centro di massa, ψ è la funzione d'onda dell'adrone costituito dai quark, E coincide con l'energia a riposo dell'adrone, ossia con la sua massa. Ovviamente, il potenziale efficace deve in qualche modo contenere i risultati della QCD, ovvero la libertà asintotica ed il confinamento.

Le differenze di massa all'interno dei multipletti adronici sono quindi dovute semplicemente alla differenza di massa tra i quark costituenti. Poiché abbiamo osservato che la simmetria è valida per gli operatori che scambiano $u \leftrightarrow d$ mentre è rotta per gli operatori che scambiano $u \leftrightarrow s$ e $d \leftrightarrow s$, è immediato ipotizzare che u e d abbiano massa all'incirca uguale mentre s abbia massa sensibilmente maggiore.

Nel modello a quark costituenti, almeno nella sua veste più semplice, l'effetto delle interazioni è descritto mediante una massa efficace (o **massa costituente**) e la massa dell'adrone è semplicemente la somma delle masse efficaci dei quark costituenti. Valori tipici sono:

$$m_u \approx m_d \approx 0.30 \text{ GeV} \quad m_s \approx 0.45 \text{ GeV} \quad .$$

Tuttavia, questo non spiega ancora le differenze di massa tra adroni di rappresentazioni diverse che però hanno lo stesso contenuto in quark. La discrepanza deve essere attribuita agli effetti di interazione tra i costituenti e quindi alle forze di colore. Uno dei nuovi contributi più rilevanti è lo splitting iperfine dei livelli energetici adronici: associata alle cariche di colore dei quark dotati di spin esiste un'interazione magnetica di colore della stessa forma di quella elettrica⁷.

Possiamo quindi costruire un modello per le masse degli adroni allo stato fondamentale. Assumiamo:

- che il confinamento dei quark, che è operativo a grandi distanze, sia indipendente dalle masse e dagli spin dei quark;
- che il coefficiente di proporzionalità α_s sia piccolo abbastanza affinché lo splitting iperfine QCD sia rilevante;

⁷Ricordiamo che le interazioni spin-spin di momento magnetico sono responsabili dello splitting iperfine del ground state:

$$\Delta E_{hf} = -\frac{2}{3} \boldsymbol{\mu}_1 \cdot \boldsymbol{\mu}_2 |\psi(0)|^2 = \frac{2\pi\alpha}{3} \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{m_1 m_2} |\psi(0)|^2 \quad .$$

- che l'unica rottura di simmetria derivi dalle differenze di masse costituenti dei diversi sapori.

Possiamo quindi utilizzare in QCD il risultato QED, semplicemente sostituendo l'accoppiamento elettromagnetico $e_1 e_2$ con il prodotto delle cariche di colore:

$$-\alpha \rightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3}\alpha_s & \text{per } (q\bar{q}) \\ -\frac{2}{3}\alpha_s & \text{per } (qqq) \end{cases}$$

dove $\frac{4}{3}$ e $\frac{2}{3}$ sono gli appropriati fattori di colore.

In questo schema, le masse di mesoni e barioni sono quindi

$$m(q_1\bar{q}_2) = m_1 + m_2 + \left[a \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)}{m_1 m_2} \right] \quad (2.27a)$$

$$m(q_1 q_2 q_3) = m_1 + m_2 + m_3 + \left[\frac{a'}{2} \sum_{i>j} \frac{(\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j)}{m_i m_j} \right] \quad (2.27b)$$

con a e a' costanti positive.

Ad un ordine ancora superiore bisogna includere anche l'interazione elettromagnetica.

La massa di un adrone carico sarà quindi pensata come formata da due componenti. Il primo è una sorta **massa nuda** m originata da quella dei quark costituenti e dalle loro mutue interazioni, il secondo sarà un contributo Δm dovuto alla carica elettrica dell'adrone. Le singole differenze di massa m sono dovute invece a:

- differenza di massa tra quark u e d ;
- differenza di energia Coulombiana associata all'energia elettrica tra le coppie;
- splitting iperfine.

Se tutti i quark avessero masse grandi rispetto al parametro Λ_{QCD} , il modello a quark non relativistico potrebbe essere giustificato in modo molto semplice. In questo caso infatti l'interazione di colore si comporterebbe come l'elettrodinamica ordinaria, tranne che per le peculiarità associate al comportamento non Abelianiano dei gluoni. I barioni sarebbero semplicemente stati legati non relativistici. Potremmo essere in grado di effettuare un calcolo delle energie degli stati legati mediante un'espansione in potenze inverse delle grandi masse dei quark; questo porterebbe un contributo che sarebbe semplicemente la somma delle masse dei quark. All'ordine successivo, ci sarebbe un contributo dell'interazione di colore dipendente dalla funzione d'onda spaziale ma non da quella di spin. Nel limite in cui u , d , s siano degeneri, si troverebbe una simmetria approssimata $SU(6)$. L'interazione di spin che porterebbe alla rottura di tale $SU(6)$ sarebbe soppressa dalle potenze inverse delle masse, poiché tale interazione è un effetto relativistico del magnetismo di colore. Questo modello tuttavia funziona sorprendentemente bene perfino quando i quark sono leggeri.

2.5 Conferme, applicazioni e sviluppi

2.5.1 Momento magnetico

Una delle evidenze sperimentali più forti a favore dell'esistenza reale dei quark come costituenti fisici degli adroni è il fatto che il momento magnetico di protone e neutrone misurato sperimentalmente non coincide con quello calcolato se essi sono trattati come particelle puntiformi.

A partire dall'equazione di Dirac, si prova [33] che una particella puntiforme di spin \vec{S} possiede un momento magnetico

$$\vec{\mu} = \frac{\mu}{\hbar s} \vec{S}$$

dove $\hbar s$ è il massimo valore possibile per S_z e μ è una costante caratteristica della particella detta momento di dipolo magnetico che vale

$$\mu = \frac{q\hbar}{2mc}$$

dove q ed m sono la carica e la massa della particella.

Sperimentalmente, si trova che essa è perfettamente valida ad esempio per l'elettrone, mentre per protone e neutrone si misura $\mu_p = 2.793\mu_N$ e $\mu_n = -1.913\mu_N$ dove μ_N è il magnetone nucleare, ovvero il momento magnetico calcolato per il nucleone; le differenze rispetto ai valori medi sono note come *momenti magnetici anomali*.

Il momento magnetico di una particella puntiforme di spin $\frac{1}{2}$ e carica e è $\frac{e}{2m}$; pertanto, un quark, che è privo di struttura e ha carica $Q_i e$ e massa m_i ha momento magnetico

$$\mu_i = Q_i \left(\frac{e}{2m_i} \right) \quad .$$

Se i quark sono realmente i costituenti degli adroni che sono stati legati non relativistici in onda s , il momento magnetico di un barione è semplicemente la somma dei momenti magnetici dei quark costituenti. Di conseguenza, introduciamo l'operatore momento magnetico

$$\sum_i \mu_i (\sigma_3)_i \quad .$$

Consideriamo un protone con spin up, e scriviamone esplicitamente lo stato in modo che sia un singoletto di colore e che il resto della funzione d'onda sia simmetrica [10]:

$$\begin{aligned} |p \uparrow\rangle &= \sqrt{\frac{1}{18}} [uud(\uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow - 2\uparrow\uparrow\downarrow) + udu(\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\uparrow - 2\uparrow\downarrow\uparrow) + duu(\uparrow\downarrow\uparrow + \uparrow\uparrow\downarrow - 2\downarrow\uparrow\uparrow)] \\ &= \sqrt{\frac{1}{18}} [u \uparrow u \downarrow d \uparrow + u \downarrow u \uparrow d \uparrow - 2u \uparrow u \uparrow d \downarrow + \text{permutazioni}] \quad . \end{aligned}$$

Pertanto, in approssimazione non relativistica, possiamo scrivere il momento magnetico del protone come

$$\mu_p = \sum_{i=1}^3 \langle p \uparrow | \mu_i (\sigma_3)_i | p \uparrow \rangle$$

ovvero, svolgendo i calcoli,

$$\mu_p = \frac{1}{3}(4\mu_u - \mu_d) \quad .$$

Il momento magnetico del neutrone è ottenuto dallo scambio $u \leftrightarrow d$:

$$\mu_n = \frac{1}{3}(4\mu_d - \mu_u) \quad .$$

Nel limite $m_u = m_d$ troviamo $\mu_u = -2\mu_d$ e quindi la previsione del modello a quark è

$$\frac{\mu_n}{\mu_d} = -\frac{2}{3} \quad . \quad (2.28)$$

Questo valore è, nonostante l'approssimazione non relativistica, in accordo molto buono con il valore sperimentale

$$\frac{\mu_n}{\mu_d} = -0.68497945 \pm 0.00000058 \quad .$$

Osserviamo che si possono ricavare informazioni sui momenti magnetici di barioni dell'ottetto anche senza fare ipotesi dinamiche, ma a partire da semplici considerazioni sulla simmetria $SU(3)$ così come abbiamo fatto per le formule di massa [8]. L'idea fondamentale è che l'operatore che descrive il momento magnetico, qualunque esso sia, deve essere proporzionale all'operatore carica elettrica Q dei quark ed è quindi un operatore dell'ottetto. Per il teorema di Wigner-Eckart ci aspettiamo pertanto

$$\mu(B) = \alpha \text{Tr}(BB^\dagger Q) + \beta \text{Tr}(B^\dagger BQ)$$

e quindi 6 relazioni tra gli 8 momenti magnetici. Infatti, tutti i momenti magnetici possono essere calcolati in termini di $\mu(P)$ e $\mu(N)$. Queste previsioni furono fatte già nel 1961 da Sidney Coleman e Shelly Glashow [34].

2.5.2 Altre verifiche del modello

Nonostante l'impossibilità di isolare un quark, ci sono vari esperimenti che ne suggeriscono la reale esistenza all'interno degli adroni [35].

1. *Esperimenti di scattering*

Esperimenti effettuati a partire dalla fine degli anni Settanta presso lo SLAC usando fasci di elettroni ad alta energia hanno mostrato che i nucleoni hanno un ulteriore livello di struttura. Sono stati utilizzati fasci di elettroni per non coinvolgere l'interazione forte, con energie dell'ordine dei 10 GeV. Le distribuzioni misurate degli elettroni scatterati sono state utilizzate [36] per dedurre che all'interno dei nucleoni sono presenti oggetti di dimensione $\leq 10^{-18}\text{m}$, spin $\frac{1}{2}$ e carica $\frac{2}{3}$ e $-\frac{1}{3}$.

2. *Esperimenti di formazione*

Altre evidenze derivano da misure di sezioni d'urto per le interazioni di pioni e kaoni su nucleoni negli anni Sessanta e Settanta. Esse mostrano picchi risonanti che ricordano il comportamento delle sezioni d'urto di scattering di luce sugli atomi o di neutroni e protoni su nuclei. Questi picchi risonanti sono sempre indicativi della produzione di stati eccitati nel sistema e quindi dell'esistenza di una sottostruttura.

Il modello a quark permette un gran numero di previsioni su svariati fenomeni che possono essere verificate sperimentalmente. Vediamo alcuni esempi [37].

1. *Sezione d'urto pione-nucleone*

Le sezioni d'urto adrone-adrone ad alte energie possono essere interpretate come dovute agli effetti additivi delle ampiezze di scattering nelle collisioni tra i singoli quark costituenti. Un semplice conteggio dei quark per il caso pione-nucleone suggerisce quindi

$$\frac{\sigma(\pi N)}{\sigma(NN)} = \frac{2}{3} \quad ,$$

in accordo con i risultati sperimentali.

2. *Produzione di coppia di leptoni su bersagli isoscalari*

È una verifica dell'assegnazione delle cariche ai quark. La produzione di una coppia di leptoni in una collisione pione-nucleone è interpretata come l'annichilazione dell'anti-quark del pione da parte di un quark del nucleone, il che dà origine ad un fotone virtuale che si materializza in una coppia di muoni. La sezione d'urto di questo processo elettromagnetico è proporzionale al quadrato della carica dei quark.

Per un π^- ($\bar{u}d$) su un nucleo isoscalare di ^{12}C ($18u + 18d$) ci aspettiamo l'annichilazione $u\bar{u}$ e pertanto

$$\sigma(\pi^- \text{C} \rightarrow \mu^+ \mu^- + \dots) \propto 18Q_u^2 = 18 \left(\frac{4}{9}\right)$$

mentre per un π^+ ($u\bar{d}$) incidente

$$\sigma(\pi^+ \text{C} \rightarrow \mu^+ \mu^- + \dots) \propto 18Q_d^2 = 18 \left(\frac{1}{9}\right) \quad .$$

Sperimentalmente, si trova proprio

$$\frac{\sigma(\pi^- \text{C})}{\sigma(\pi^+ \text{C})} \approx 4 \quad .$$

3. *Decadimento di mesoni vettori in leptoni*

L'assegnazione del contenuto quark-antiquark per i mesoni vettori, così come i valori delle cariche di tali quark, può essere verificato dai valori delle ampiezze parziali $\Gamma(e^+e^-)$ nel decadimento in coppie di elettroni. Infatti, nel modello a quark non relativistico, $\Gamma(e^+e^-)$ per un mesone vettore dipende dal suo accoppiamento con un singolo scambio di fotone ed è proporzionale al quadrato delle cariche dei quark.

2.5.3 Evidenze sperimentali del colore

Così come esposta, la QCD può sembrare una teoria costruita ad hoc per spiegare i punti oscuri del modello a quark. In realtà, esistono una serie di prove sperimentali a favore di essa.

L'evidenza sperimentale più diretta che i quark portino colore è data dalla misura della sezione d'urto totale per l'annichilazione elettrone-positrone negli esperimenti di collisione di fasci [14]. I risultati sono espressi in termini del rapporto

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{adroni})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} .$$

I risultati sperimentali con energia nel centro di massa di 35.8 GeV indicano che la reazione avviene prevalentemente attraverso l'annichilazione dello stato iniziale in un singolo fotone virtuale, che poi si materializza negli stati finali, attraverso la produzione di coppie di leptoni e coppie di quark. La sezione d'urto totale deve essere proporzionale alla somma dei quadrati delle cariche di tutte le particelle che possono energeticamente essere prodotte come coppie, sottraendo le possibili risonanze e le interazioni degli stati finali. Dal momento che le varie soglie per queste produzioni sono ben separate, ci dovrebbe essere un plateau tra le soglie, in cui le interazioni degli stati finali sono relativamente indipendenti dall'energia. Le somme dei quadrati delle cariche possono essere calcolate ai vari plateau tenendo conto o meno del colore, e i valori sperimentali indicano che le previsioni sono in accordo solo nell'ipotesi del colore.

Inoltre, se gli stati finali adronici derivano dalla produzione di coppie di quark, allora la loro distribuzione angolare deve presentare traccia della direzione iniziale della coppia. Questo dà origine al fenomeno cosiddetto dei *quark jets*. Se, come abbiamo ipotizzato, la simmetria di colore è una simmetria di gauge che dà origine all'interazione forte, allora i bosoni di gauge possono anch'essi essere emessi dai quark, risultando in tre o più jets adronici caratteristici (in quanto i gluoni non subiscono l'interazione elettromagnetica). Questo fenomeno è stato sperimentalmente osservato.

2.5.4 Il modello a partoni

Da quando il modello a quark fu proposto da Gell-Mann e Zweig nel 1964, i fisici sperimentali cominciarono una meticolosa ricerca di questi oggetti, negli acceleratori, nei raggi cosmici e addirittura analizzando le rocce lunari. Nonostante le proprietà particolarissime dei quark, soprattutto la carica frazionaria, queste ricerche non diedero alcun risultato: i quark sembravano semplicemente non esistere. La conclusione iniziale fu che i quark dovevano essere estremamente massivi (molte volte la massa del protone) e molto fortemente legati, in modo che risultasse particolarmente difficile estrarli dagli adroni.

Questa impasse fu risolta, tra la fine degli anni '60 e l'inizio degli anni '70, con la scoperta che, nel deep inelastic scattering di leptoni su nucleoni, il nucleone sembrava esser costituito da oggetti puntiformi leggeri e quasi liberi, chiamati **partoni** e che quindi erano esattamente l'antitesi dei quark come erano stati immaginati [37].

Il modello a partoni fu proposto da Feynman [38] anche per spiegare le interazioni elettromagnetiche tra gli adroni in termini di interazioni tra i quark. Supponiamo che il protone sia costituito da oggetti legati che appaiano puntiformi al fotone. Allora il protone può esistere in uno stato virtuale transitorio che consiste di questi oggetti liberi. Il tempo di vita di questo stato virtuale è inversamente proporzionale alla differenza tra l'energia dello stato virtuale e l'energia del protone. In un sistema di riferimento in cui il protone si muove con velocità arbitraria, la dilatazione relativistica dei tempi può rendere questo tempo di vita arbitrariamente

lungo. Chiamiamo questo sistema di riferimento *sistema di riferimento di momento infinito* e consideriamolo come il limite di una successione di sistemi di riferimento. In questo sistema di riferimento un fotone che incida sul protone vedrà un insieme di cariche puntiformi libere, appunto i partoni (poiché questi sono definiti nel sistema di riferimento di momento infinito, non hanno necessariamente senso nel sistema di riposo del protone). Immaginiamo ora che il fotone sia assorbito da uno dei partoni. Il processo di assorbimento dura per un tempo inversamente proporzionale all'energia del fotone, che può essere controllata selezionando la lunghezza d'onda sperimentale. In laboratorio, in principio possiamo scegliere la lunghezza d'onda arbitrariamente grande, in modo che il tempo di assorbimento sia piccolo a piacere. Tuttavia, anche questo tempo si dilata nel sistema di riferimento di momento infinito, e non è ovvio se un partone possa vivere abbastanza come una particella libera per assorbire il fotone. Altre considerazioni elementari mostrano che infatti la vita del partone è molto più lunga del tempo di assorbimento solo nel limite di deep inelastic scattering.

2.5.5 I quark pesanti

Nel 1970, Glashow, Iliopoulos e Maiani [39] proposero che oltre ad u , d , s doveva esistere un quarto sapore di quark, che chiamarono c (*charm*), con relativo numero quantico associato (Figura 2.8).

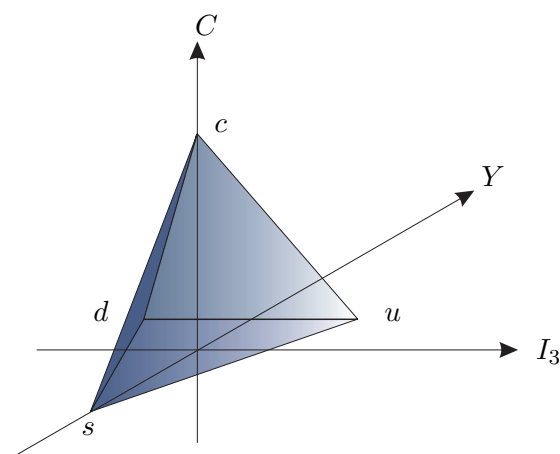


Figura 2.8: Rappresentazione fondamentale dei quark includendo il charm.

Il motivo era la liberazione della teoria delle interazioni deboli da alcune contraddizioni di ordine superiore, cioè violazioni delle regole di selezione di ΔS e la possibilità di decadimenti mai osservati attraverso correnti neutre. In questo modo si realizzava inoltre una notevole corrispondenza tra sapori di quark e leptoni.

Nel 1974, Ting e Richter con i rispettivi team di collaboratori, scoprirono indipendentemente una strettissima risonanza nell'annichilazione e^+e^- ad energia nel centro di massa di 3.1 GeV; essa fu chiamata ψ^8 da un gruppo e J dall'altro, perciò oggi questa particella è nota come J/ψ (Figura 2.9).

⁸Questo nome è dovuto alla traccia caratteristica che la particella lasciava nel rivelatore.

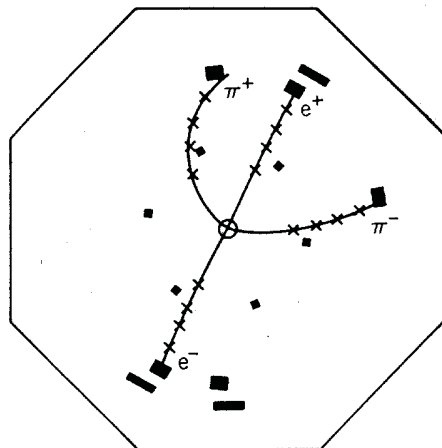


Figura 2.9: Decadimento $\psi(3.7) \rightarrow \psi(3.1) + \pi^+ + \pi^-$ osservato in uno spark chamber detector (Abrams *et al.* 1975)

Essa destò grandissimo interesse data la sua massa elevata (più di tre volte quella del protone) e la sua vita media centinaia di volte più lunga di quella delle risonanze fino ad allora conosciute (ampiezza=67 keV). Nel periodo immediatamente successivo, furono scoperte molte altre particelle della stessa famiglia: $\psi(3684)$, $\psi(3950)$, $\psi(4150)$, $\psi(4400)$, tutti mesoni con $I = 0$ e parità e parità-G negative; l'insieme di queste scoperte è nota come *Rivoluzione di Novembre*.

L'estrema strettezza della J/ψ rispetto a quella delle altre risonanze mesoniche non permetteva alcuna possibilità di spiegarla in termini di quark u , d , s ; pertanto, queste particelle furono immediatamente interpretate come stati di **charmonio**, ovvero stati legati $c\bar{c}$. La J/ψ sarebbe lo stato fondamentale, mentre il resto della famiglia è spiegato, nell'ambito del modello a quark non relativistico con un potenziale lineare tra c e \bar{c} , come stati di eccitazione radiale; secondo questo modello, ci sarebbero anche eccitazioni orbitali, che sono state identificate sperimentalmente. In seguito sono stati scoperti anche mesoni e barioni con charm evidente, ossia stati legati del tipo $c\bar{d}$ e $cu\bar{d}$. L'eccezionale strettezza della J/ψ non è stata del tutto spiegata; si pensa abbia un'origine dinamica.

Nel 1977 presso il collisionatore del Fermilab fu scoperta una nuova famiglia di mesoni vettori, la Y family, con massa a partire da 9 GeV, dando prova analogamente dell'esistenza di un nuovo sapore di quark, **b** (*bottom*).

Nel 1995, ancora presso il Fermilab, prodotto in circa una collisione $p\bar{p}$ a 1.8 TeV su 10^{10} , è stato scoperto il quark **t** (*top*), di massa 175 GeV⁹.

⁹In termini di teoria dei gruppi, questi quark dovrebbero portare ad allargare la simmetria di sapore fino a $SU(6)$. Questo è però uno sforzo inutile in termini pratici in quanto le masse di c , b , t sono talmente tanto maggiori di quelle di u , d , s e talmente diverse tra loro che le differenze di massa tra essi sono molto più grandi di Λ_{QCD} . Di conseguenza, la descrizione perturbativa della rottura di $SU(3)$ che rende la teoria di Gell-Mann utile non è più valida in queste estensioni.

Oggi è quindi disponibile una ricca spettroscopia di nuovi quark pesanti, che esula dai limiti di questa trattazione.

Inoltre, con la scoperta del leptone τ , del neutrino tauonico e del sesto quark t , la corrispondenza tra sapori di quark e leptoni è ancora valida. Ad oggi non abbiamo una comprensione profonda di questa simmetria; essa può tuttavia suggerire che i sapori di quark e leptoni siano la manifestazione di un'unità più profonda, e che queste particelle che allo stadio attuale sembrano elementari potrebbero essere spiegate ancora una volta in termini di qualcosa di ancora più semplice e fondamentale.

Capitolo 3

Studio di un Modello a Quark non Relativistico

A più di 30 anni dalla Rivoluzione di Novembre, la spettroscopia adronica si è arricchita in modo considerevole, ed oggi è disponibile un'ampia gamma di dati sperimentali che permette confronti stringenti con le previsioni di modelli sempre più accurati.

In particolare, il modello a quark costituenti, pur essendo, anche nelle sue versioni più raffinate, una descrizione *non relativistica* degli stati legati tra i quark (in quanto utilizza un'equazione che prevede una velocità di propagazione infinita per l'interazione), si è rivelato sin dagli anni '70 di grande efficacia nella descrizione di tali sistemi, in particolare naturalmente per quelli contenenti quark pesanti (*c* e *b*). Infatti, l'evoluzione del formalismo della QCD ha considerevolmente rafforzato la connessione della fenomenologia degli adroni pesanti con la QCD stessa. Per esempio, la gerarchia $m_q \gg m_q \alpha_s(m_q) \gg m_q \alpha_s^2(m_q)$ permette di scegliere un *cutoff* che rimuove l'effetto dei gluoni dalla descrizione effettiva del mesone [40], permettendo la descrizione dell'interazione mediante un potenziale.

I modelli più recenti ricavano la forma del potenziale effettivo facendo uso di varie assunzioni e metodologie, generalmente utilizzando una Lagrangiana di QCD duale [41] che includa scambi di gluoni ed eventualmente di altri bosoni [42], [43].

Un modello tipico è basato sulla riduzione di Breit-Fermi dell'interazione di scambio di un solo gluone corretta con un'interazione di confinamento di una corrente scalare. La forma generale di questo potenziale è stata determinata [44] a tre livelli usando il loop di Wilson¹; il risultato è parametrizzato in termini di quattro elementi di matrice non perturbativi, V_i , che possono essere determinati da inserti di campo elettrico e magnetico nelle linee dei quark nel loop di Wilson. In seguito, è stato sviluppato un calcolo ad un unico loop dell'interazione tra quark pesanti [45] ed è stato mostrato che nel caso di masse dei quark disuguali è presente una quinta interazione V_5 . Il risultato è un'interazione quark-antiquark che può essere scritta come [46]

$$V = V_{conf} + V_{SD} \tag{3.1}$$

¹Metodo alla base della quantizzazione non perturbativa della gravità.

con

$$\begin{aligned}
V_{SD}(r) = & \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_q}{4m_q^2} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_{\bar{q}}}{4m_{\bar{q}}^2} \right) \cdot \mathbf{L} \left(\frac{1}{r} \frac{d\epsilon}{dr} + \frac{2}{r} \frac{dV_1}{dr} \right) + \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_q + \boldsymbol{\sigma}_{\bar{q}}}{2m_q m_{\bar{q}}} \right) \cdot \mathbf{L} \left(\frac{1}{r} \frac{dV_2}{dr} \right) \\
& + \frac{1}{12m_q m_{\bar{q}}} (3\boldsymbol{\sigma}_q \cdot \hat{\mathbf{r}} \boldsymbol{\sigma}_q \cdot \hat{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\sigma}_q \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\bar{q}}) V_3 + \frac{1}{12m_q m_{\bar{q}}} \boldsymbol{\sigma}_q \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\bar{q}} V_4 \\
& + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_q}{m_q^2} - \frac{\boldsymbol{\sigma}_{\bar{q}}}{m_{\bar{q}}^2} \right) \cdot \mathbf{L} + \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_q - \boldsymbol{\sigma}_{\bar{q}}}{m_q m_{\bar{q}}} \right) \cdot \mathbf{L} \right] V_5
\end{aligned}$$

dove $\epsilon = \epsilon(r)$ è il potenziale statico, $\mathbf{L} = \mathbf{L}_q = -\mathbf{L}_{\bar{q}}$, $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_{\bar{q}}|$ è la separazione $\bar{Q}Q$ e i $V_i = V_i(m_q, m_{\bar{q}}; r)$ sono determinati dai campi elettrici e magnetici nell'elemento di matrice del loop di Wilson.

3.1 Il modello

Ho studiato una forma del modello precedentemente esposto applicandolo a tutti i mesoni pseudoscalari e vettoriali, sia leggeri che pesanti. Mi sono limitata agli stati in onda s , per cui i primi tre e l'ultimo dei termini del potenziale dipendente dallo spin sono nulli [47]. Ho quindi fatto le seguenti ipotesi.

1. Poiché alcuni mesoni contengono quark leggeri, ho assunto che il sistema sia governato dall'equazione di Salpeter, ovvero dalla forma relativistica dell'equazione di Schrödinger.
2. Ho scelto una forma per i termini non nulli del potenziale V_{conf} e V_4 . Come potenziale centrale ho utilizzato uno dei primi e più semplici potenziali proposti per riprodurre le previsioni QCD: il potenziale di Cornell; come termine di spin ho ancora scelto uno dei primi proposti, elaborato da Isgur e Karl.
3. Volendo includere nel modello anche i mesoni costituiti da entrambi i quark leggeri, a differenza di quanto comunemente svolto, ho trattato il problema in modo non perturbativo, essendo in questi casi gli splitting iperfini di massa confrontabili con la massa media dei relativi mesoni e quindi non trattabili mediante la teoria perturbativa.

3.1.1 L'equazione di Salpeter

L'energia cinetica di una particella di massa m è data in relatività ristretta dalla formula $E = c\sqrt{p^2 + m^2 c^2}$. Posto $c = \hbar = 1$, l'energia di una particella relativistica interagente con un campo di forze descritto dall'energia potenziale $V(\vec{r})$ si scrive

$$H = \sqrt{p^2 + m^2} + V(\vec{r}) \quad .$$

In meccanica quantistica H è un operatore; se E è un suo generico autovalore, l'equazione che fornisce lo spettro di H e che, quindi, include nell'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo la cinematica relativistica è la seguente:

$$\left(\sqrt{-\nabla^2 + m^2} + V(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (3.2)$$

La (3.2) è nota come **equazione di Salpeter**.

Essa, applicata al nostro modello, ovvero per due quark nel sistema del centro di massa, assume la forma

$$\left(\sqrt{-\nabla^2 + m_1^2} + \sqrt{-\nabla^2 + m_2^2} + V(\vec{r}) \right) \psi = M\psi \quad (3.3)$$

dove M è la massa del mesone che, nel sistema di quiete, coincide con la sua energia.

Se, come nel nostro caso, il potenziale $V(\vec{r}) = V(r)$ è centrale, la funzione d'onda, come usuale, può essere fattorizzata:

$$\psi(\vec{r}) = Y_{lm}(\hat{r}) \phi_l(r) = Y_{lm}(\hat{r}) \frac{u_l(r)}{r} \quad . \quad (3.4)$$

Utilizzando la rappresentazione spettrale dell'operatore radice [12], la (3.4) assume la forma (cfr. Appendice A.1):

$$[V(r) - M] u_l(r) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dr' \int_0^\infty \left\{ \sqrt{k^2 + m_1^2} + \sqrt{k^2 + m_2^2} \right\} k^2 r r' j_l(kr) j_l(kr') u_l(r') = 0 \quad (3.5)$$

dove $j_l(x)$ sono le funzioni di Bessel.

Ho studiato questa equazione nel caso $l = 0$ per cui

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x} \quad ,$$

al fine di ottenere quindi l'equazione di $u_0(r)$ per l'onda s . Dopo varie manipolazioni (cfr. Appendice A.2), la (3.5) è stata posta nella forma [48], [49]

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{+\infty} dr' \frac{u_0(r')}{(r-r')^2} + \left\{ \frac{m_1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dr' \frac{u_0(r')}{|r-r'|} \left[\frac{1}{m_1|r-r'|} - K_1(m_1|r-r'|) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{m_2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dr' \frac{u_0(r')}{|r-r'|} \left[\frac{1}{m_2|r-r'|} - K_1(m_2|r-r'|) \right] \right\} + [V(r) - M] u_0(r) = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

dove le $K_\nu(x)$ sono le funzioni di Bessel modificate.

Equazioni del tipo della (3.6), contenenti integrali singolari, possono essere risolte numericamente mediante il *metodo di Multhopp* [50] (cfr. Appendice A.3).

3.1.2 Il potenziale di Cornell

Il potenziale di Cornell è il primo e più semplice potenziale efficace proposto per tentare di descrivere il comportamento previsto dalla QCD. Esso fu introdotto nel 1978 da E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane e T. M. Yan [51], [52] della Cornell University di New York.

Il potenziale di Cornell ha la forma

$$V(r) = -\frac{a}{r} + \frac{r}{b^2} + V_0 \quad . \quad (3.7)$$

Esso è suggerito dal fatto che a piccolissime distanze l'energia potenziale dovuta alle interazioni forti tra due quark è simile a quella elettrostatica tra due cariche puntiformi, mentre il termine

di crescita lineare è suggerito dal confinamento dei quark; si tratta dunque di una semplice interpolazione tra un termine Coulombiano dominante a piccole distanze e un termine lineare dominante a grandi distanze. Un aspetto notevole da evidenziare è che in seguito, risolvendo l'equazione per tutti mesoni, si troverà che la separazione media tra i due quark giace in tutti i casi in una regione intermedia dove nessuno dei due limiti dovrebbe essere valido; il fatto che tuttavia questo potenziale descriva molto bene tali sistemi può essere un indizio del fatto che la regione di transizione tra il regime perturbativo e non perturbativo sia particolarmente regolare.

Il primo parametro a ha la forma

$$a = \frac{4}{3}\alpha_s \quad ,$$

dove α_s è la costante di accoppiamento forte proporzionale al quadrato della carica di colore, e descrive lo scambio di un gluone a corto raggio; il secondo parametro $\frac{1}{b^2}$ è la tensione di stringa responsabile del confinamento; il terzo parametro V_0 è una costante additiva che generalmente può essere aggiunta ad un potenziale.

In questo contesto faremo tuttavia le seguenti assunzioni su tali parametri:

1. a è un parametro libero, ovvero non ha alcun legame con α_s ; questo perché la costante di accoppiamento forte ha una dipendenza in regime perturbativo dall'energia e quindi dalla massa del mesone, condizioni non verificate nei casi trattati;
2. La simmetria di flavour è rotta solo dalle masse dei quark, e quindi i parametri dell'interazione sono indipendenti dal flavour dei quark costituenti. Questa è l'assunzione originale di Eichten & Co., che però avevano studiato il potenziale solo per i sistemi $c\bar{c}$ e $b\bar{b}$, mentre i lavori successivi sugli altri mesoni pesanti [53], [54] hanno portato all'introduzione di costanti additive diverse per ciascuno e quindi dipendenti dal flavour.

Possiamo presentare un ulteriore argomento a favore del potenziale di Cornell. Consideriamo il potenziale logaritmico

$$V(r) = C \log \frac{r}{r_0} \quad .$$

Esso non ha motivazioni teoriche, ma, per opportune scelte dei parametri, il suo comportamento è molto simile a quello di Cornell. Il vantaggio nell'uso di tale potenziale è nel fatto che esso permette di ottenere con maggiore facilità risultati analitici. Ora, utilizzando l'equazione di Schrödinger per gli stati $c\bar{c}$ e $b\bar{b}$, si dimostra analiticamente [55] che il potenziale logaritmico è l'unico per il quale la differenza tra i livelli energetici è indipendente dalla massa dei quark di cui è costituito il mesone. Questo risultato è in accordo con i dati sperimentali; se ne può dedurre che l'energia potenziale logaritmica, o quella di Cornell equivalente dal punto di vista fenomenologico ma più fondata teoricamente, rappresentano un buon modello per la descrizione dei mesoni.

Sottolineiamo infine che questo modello ha, così come tutti gli altri modelli a quark costituenti, un limite rilevante: non spiega il fatto che la maggior parte degli adroni pesanti sia instabile.

3.1.3 Termine di spin

Assumiamo per il secondo parametro la forma [56]

$$V_4 = \frac{32\pi\alpha_s}{3}\delta(r) \quad ;$$

esso ha la struttura ricavata dalla formulazione non relativistica del diagramma di Feynman per l'interazione tra due quark mediata dallo scambio di un gluone [57], [58]. Per le stesse motivazioni esposte precedentemente, assumiamo che il coefficiente numerico che compare davanti alla Delta sia indipendente da α_s e uguale per ogni combinazione di flavour.

Di conseguenza, il termine di spin assume la forma completa

$$V_{SD}(\vec{r}) = \frac{c}{m_1 m_2} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \delta(\vec{r}) \quad . \quad (3.8)$$

Possiamo scrivere ora

$$\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 = \frac{1}{2} \left[(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)^2 - |\boldsymbol{\sigma}_1|^2 - |\boldsymbol{\sigma}_2|^2 \right] = \frac{1}{2} [j(j+1) - s_1(s_1+1) - s_2(s_2+1)] \quad .$$

Nel nostro caso, poiché i due quark hanno spin $\frac{1}{2}$, le possibilità di combinazione sono $J = 0$ o $J = 1$, per i quali si avrà rispettivamente

$$\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 = -\frac{3}{4} \quad \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 = \frac{1}{4} \quad .$$

Infine, per rendere la distribuzione Delta di Dirac trattabile numericamente, scriviamola in forma approssimata come [56]

$$\tilde{\delta}_\sigma(r) = \left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^3 e^{-\sigma^2 r^2} \quad . \quad (3.9)$$

3.1.4 Correzione nell'origine

Introducendo la cinematica relativistica per mezzo dell'equazione (3.2), ci si imbatte in un'importante differenza rispetto all'approccio consueto basato sull'equazione di Schrödinger. La divergenza Coulombiana per $r \rightarrow 0$ nel potenziale non crea problemi nel caso non relativistico; invece, quando viene utilizzata l'equazione (3.5), si produce una divergenza logaritmica della funzione d'onda $\phi_0(r)$ nell'origine. Tale divergenza è una conseguenza non fisica dell'approssimazione utilizzata nell'equazione di Salpeter che combina una cinematica relativistica con un potenziale non relativistico.

Una possibilità di evitare questo problema consiste nel troncare in modo continuo la divergenza del potenziale a cortissime distanze [48], [49]:

$$V(r) = V(r_M) \quad \text{per} \quad r \leq r_M = \frac{k}{M} \quad (3.10)$$

dove M è la massa del mesone. Il valore della costante k può essere fissato dalla dualità della QCD, cioè assumendo che sommare su infinite risonanze, legate dal potenziale (3.7), sia equivalente ai calcoli con la costante α_s [59]. Ancora una volta tuttavia noi ipotizzeremo che k

sia un parametro libero. Assumeremo la validità di questo *cutoff* per $m_i = m_j$; analogamente, per $m_i \neq m_j$ si trova

$$r_M = \frac{\lambda k}{M}$$

con λ parametro da determinare.

In conclusione, la forma completa del potenziale che ho utilizzato nel mio modello è

$$V(r) = \begin{cases} V(r_M) & \text{per } r \leq r_M = \frac{\lambda k}{M} \\ -\frac{a}{r} + \frac{r}{b^2} + V_0 + \frac{c}{m_1 m_2} \left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^3 e^{-\sigma^2 r^2} (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2) & \text{per } r > r_M \end{cases} \quad (3.11)$$

3.2 Risultati numerici

Ho applicato il modello descritto con l'obiettivo di verificare l'ipotesi che tutti i parametri del potenziale possano essere indipendenti dal flavour, a differenza di quanto trovato nei lavori precedentemente citati.

Tutti i dati sperimentali utilizzati per i confronti sono aggiornati al 2006 [60].

I calcoli sono stati effettuati con il software Mathematica. Gli integrali sono stati risolti numericamente, effettuando però sviluppi analitici negli intorni delle singolarità per ovviare alle difficoltà di integrazione numerica.

3.2.1 Spettro di massa

Nella prima fase dello studio ho ottimizzato i parametri del modello.

Il modello contiene undici parametri: i tre coefficienti del potenziale statico a , b , V_0 , i tre parametri del potenziale di spin c , σ , i due parametri del cutoff k , λ , le quattro masse costituenti $m_u = m_d \equiv m_q$ (assunte uguali stimando la rottura dell'isospin inferiore all'errore del calcolo), m_s , m_c , m_b .

Come spiegato nel par. 3.1.1, note le masse costituenti e il potenziale, l'equazione di Salpeter fissa la massa del mesone. Di conseguenza, per ottimizzare i parametri ho minimizzato gli scarti delle masse calcolate tramite il modello rispetto a quelle sperimentali. Come dati di input ho scelto i valori di massa del ground state di tutti i mesoni e gli stati eccitati di cui sono accertati i numeri quantici, per un totale di 29 dati.

Più in dettaglio, ho minimizzato il valore della variabile

$$\chi^2 = \sum_i \left(\frac{M_i^{theor} - M_i^{exp}}{M_i^{exp}} \right)^2$$

e come indice della validità del modello ho considerato il *chi quadro ridotto*

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{\nu}$$

dove

$$\nu = N_{input} - N_{parametri} + 1$$

è il numero di gradi di libertà del problema.

I risultati della minimizzazione, effettuata con 50 angoli di Multihopp (avendo verificato preliminarmente la stabilità dei relativi autovalori), sono presentati nella Tabella 3.1. Ad essi corrisponde un $\tilde{\chi}^2 = 2.62 \cdot 10^{-3}$.

Masse costituenti		Potenziale centrale		Potenziale di spin		Cutoff	
m_q	0.310 GeV	a	0.665 GeV	c	21.467	k	0.068
m_s	0.572 GeV	b	2.108 GeV ⁻²	σ	0.665 GeV	λ	0.055
m_c	1.817 GeV	V_0	-0.717 GeV				
m_b	5.251 GeV						

Tabella 3.1: Parametri calcolati mediante la minimizzazione del χ^2 .

Fissati quindi i parametri del modello nell'ipotesi di indipendenza dal flavour, ho calcolato gli spettri di massa e le relative funzioni d'onda di tutte le possibili combinazioni quark-antiquark.

Gli spettri di massa sono presentati nella Tabella 3.2.

Si vede che il calcolo riproduce le masse dei mesoni di input con un errore mediamente del 2% (con minimo 0.02% e massimo 7%) e predice praticamente con altrettanta precisione anche gli stati che non sono stati inseriti nel fit. Di conseguenza, il modello si presenta come un valido strumento, seppur approssimato, di semplice utilizzo per una descrizione fenomenologica e universale degli stati mesonici.

3.2.2 Potenziale

Una volta fissati i parametri del potenziale, è interessante osservare come esso sia diverso a seconda dei mesoni e del loro stato.

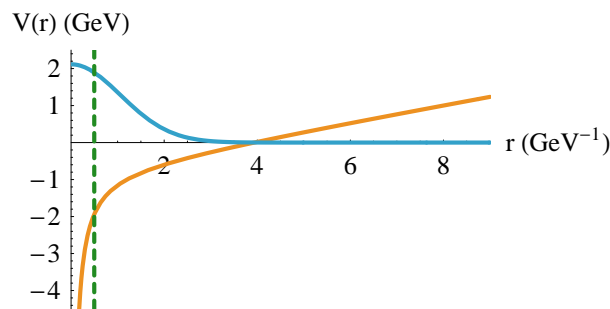


Figura 3.1: Termine centrale (in arancio), termine di spin (in azzurro) e posizione del cutoff nel caso dello stato $q\bar{q}$ (in verde) del potenziale con i parametri del fit.

In Figura 3.1 sono mostrati separatamente il contributo del potenziale centrale e il contributo del termine di spin. Si vede chiaramente come il primo sia un'interpolazione tra un termine Coulombiano intorno all'origine e un termine lineare a grandi distanze, mentre il secondo ha un andamento gaussiano dal picco non particolarmente pronunciato ma che si annulla molto rapidamente allontanandosi dall'origine.

Il contributo del termine di spin ha diverso andamento per lo stato vettoriale rispetto a quello scalare (Figura 3.2). Esso inoltre è più importante per i mesoni più leggeri, come prevedibile confrontando lo splitting di massa rispetto alla massa media di ogni combinazione e come evidenziato dal grafico dei vari potenziali risultanti (Figura 3.3).

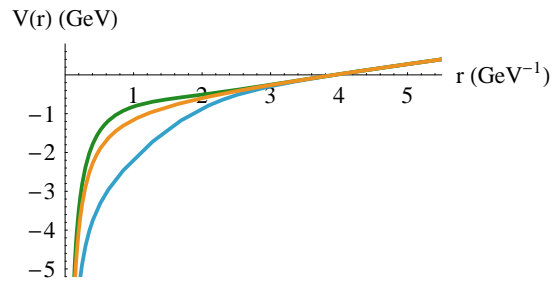


Figura 3.2: Potenziale senza contributo di spin (in arancio), per $J = 0$ (in azzurro) e per $J = 1$ (in verde) nel sistema $q\bar{q}$.

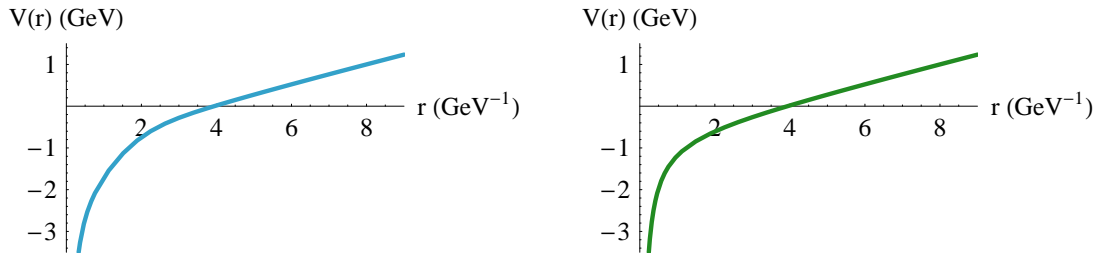


Figura 3.3: Potenziale per il K (a sinistra) e per il B_c (a destra).

Risulta inoltre particolarmente evidente come il cutoff introdotto per eliminare la divergenza della funzione d'onda nell'origine, per come è stato definito, si tanto più vicino all'origine quanto più grande è la massa del mesone (Figura 3.4).

3.2.3 Funzioni d'onda

Il calcolo restituisce, insieme agli spettri di massa, le funzioni d'onda dei relativi livelli energetici.

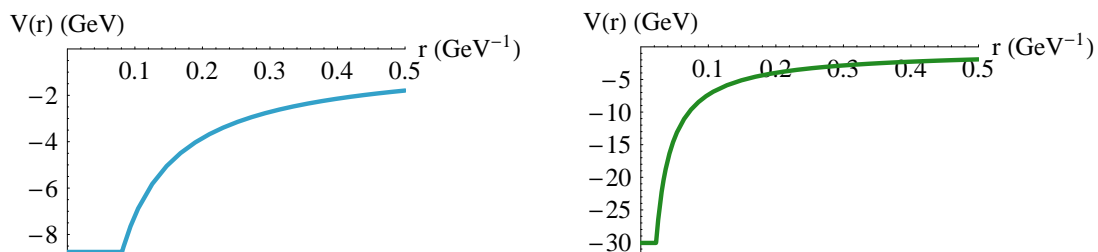


Figura 3.4: Potenziale per la ϕ (a sinistra) e per la J/ψ (a destra).

In Figura 3.5 è mostrato quanto esposto senza dimostrazione nel par. 3.1.4: senza cutoff nel potenziale la funzione d'onda radiale $\phi(r) = \frac{u(r)}{r}$ diverge logaritmicamente, mentre applicando il cutoff essa torna ad essere convergente come previsto fisicamente. La conoscenza del valore della funzione d'onda nell'origine è particolarmente utile per molte applicazioni, quali ad esempio il calcolo delle costanti di decadimento dei mesoni.

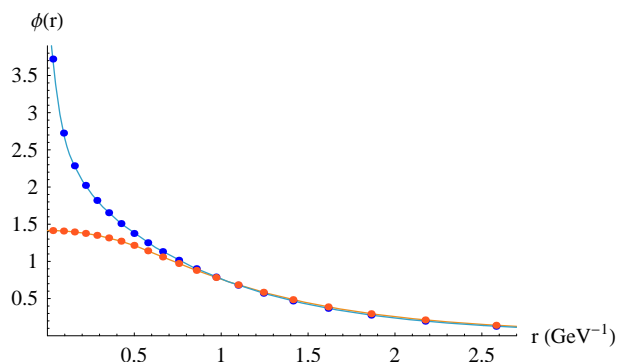
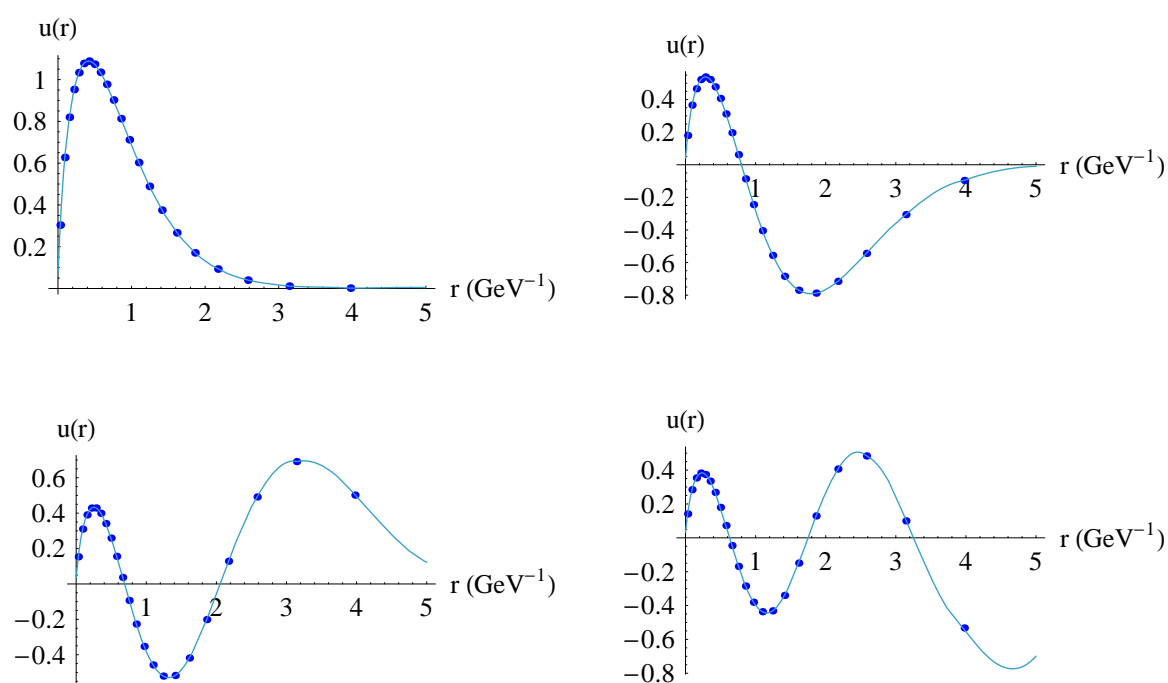


Figura 3.5: Comportamento della funzione d'onda radiale del π intorno all'origine con il potenziale divergente (in azzurro) e con l'applicazione del cutoff (in arancio).

In Figura 3.6 sono invece mostrate le funzioni d'onda radiali per i primi quattro livelli energetici del sistema $b\bar{b}$ con $J = 0$. Esse sono molto vicine alle funzioni d'onda analitiche ottenute mediante il solo potenziale elettrostatico (caso dell'atomo di idrogeno); ne deriva quindi, come facilmente prevedibile, che la parte Coulombiana del potenziale è dominante a corto range.

Figura 3.6: Funzioni d'onda degli stati $1S$, $2S$, $3S$, $4S$ della η_b .

Stato	Livello energetico	J=0			J=1		
		Particella	Massa sperimentale	Massa calcolata	Particella	Massa sperimentale	Massa calcolata
qq	1S	π^\pm	$0.1395702 \pm 0.0000035^{*a}$		ρ^\pm	$0.7754 \pm 0,0004^{*a}$	
	2S	π^0	$0.1349766 \pm 0.0000005^{*a}$	0.137	ρ^0	$0.7755 \pm 0.0004^{*a}$	0.786
	3S		$1.300 \pm 0.100^*$	1.203		$1.459 \pm 0.011^*$	1.526
	4S			1.836			2.035
				2.288			2.540
qs	1S	K^\pm	$0.493667 \pm 0.000016^{*a}$		$K^{*\pm}$	$0.89166 \pm 0.00026^{*a}$	
	2S	K^0	$0.497648 \pm 0.000022^{*a}$	0.531	K^*	$0.89600 \pm 0.00025^{*a}$	0.913
	3S		$\approx 1.460^*$	1.435		$1.717 \pm 27^*$	1.642
	4S		≈ 1.830	2.033			2.164
				2.446			2.598
ss	1S	η^b	0.95778 ± 0.00014	0.842	ϕ^b	$1.019460 \pm 0.000019^*$	1.051
	2S			1.666		$1.680 \pm 0.0020^*$	1.777
	3S			2.239			2.310
	4S			2.619			2.692
cq	1S	D^\pm	$1.8694 \pm 0.0005^{*a}$		$D^{*\pm}$	$20067 \pm 0.0004^{*a}$	
	2S	D^0	$1.8641 \pm 0.0010^{*a}$	1.796	D^{*0}	$2.0100 \pm 0.0004^{*a}$	1.938
	3S			2.559		2.637 ± 0.008	2.627
	4S			3.104			3.153
				3.470			3.498
cs	1S	D_s	$1.9690 \pm 0.0014^*$	1.990	D_s^*	$2.1120 \pm 0.0006^*$	2.072
	2S			2.372			2.768
	3S			3.259			3.287
	4S			3.632			3.644
cc	1S	η_c	$2.9804 \pm 0.0012^*$	3.014	J/ψ	$3.096916 \pm 0.000011^*$	3.047
	2S		$3.638 \pm 0.004^*$	3.737		$3.686093 \pm 0.034^*$	3.748
	3S			4.209		$4.039 \pm 0.001^*$	4.217
	4S			4.649			4.656
bq	1S	B^\pm	$5.2791 \pm 0.0005^{*a}$		B^*	$5.3250 \pm 0.0006^*$	5.223
	2S	B^0	$5.2793 \pm 0.0007^{*a}$	5.161			5.882
	3S			5.855			6.373
	4S			6.353			6.770
				6.758			
bs	1S	B_s	$5.3696 \pm 0,0024^*$	5.311	B_s^*	$5.4128 \pm 0.0017^*$	5.347
	2S			6.007			6.021
	3S			6.488			6.499
	4S			6.905			6.913
bc	1S	B_c	$6.286 \pm 5^*$	6.230	B_c^*	6.424^c	6.244
	2S			6.962			6.967
	3S			7.410			7.413
	4S			7.758			7.761
bb	1S	η_b	$9.300 \pm 40^*$	9.272	Y	$9.46030 \pm 0.00026^*$	9.278
	2S			10.120		$10.02326 \pm 0.00031^*$	10.122
	3S			10.544		$10.3552 \pm 0.0005^*$	10.545
	4S			10.873		$10.5794 \pm 0.0012^*$	10.874

Tabella 3.2: Spettri di massa (in GeV). *: input; a : il dato di input è la media tra lo stato carico e lo stato neutro; b : ipotesi di mixing ideale; c : non osservato, predizione come media tra gli stati $c\bar{c}$ e $b\bar{b}$ con $J = 1$.

Conclusioni

Il Modello a Quark, ricavabile dalla Cromodinamica Quantistica, ha svelato la semplicità sottostante ad una configurazione di stati in apparenza molto complicata.

Oggi, a distanza di secoli dall'inizio della ricerca dei costituenti fondamentali di tutta la complessità e la bellezza del mondo, la più sofisticata e completa teoria delle particelle, che include i quark, è nota come *Modello Standard*.

Il Modello Standard venne formulato negli anni Settanta e si è gradualmente imposto grazie ad esperimenti svolti all'inizio degli anni Ottanta. Quasi 30 anni di sperimentazione hanno verificato la teoria con un notevole livello di dettaglio, confermando tutte le sue previsioni.

Tuttavia, il Modello Standard non può costituire la teoria definitiva delle particelle elementari, poiché esiste una serie di fenomeni che esso non può spiegare o, in alcuni casi, neppure incorporare [62]; sottolineiamo che dicendo che il Modello Standard non può spiegare un dato fenomeno, non si intende che non lo ha ancora spiegato e potrebbe farlo un giorno; esso è una teoria fortemente vincolata, e non potrà mai spiegare questi fenomeni.

Non è sorprendente tuttavia che ci siano domande a cui il Modello Standard non può rispondere: la maggior parte delle teorie scientifiche di successo ha aumentato il numero di domande a cui è stata data risposta, ma ne ha lasciate alcune in sospeso. E se anche il progresso ha portato a nuove domande che non potevano essere formulate prima, il numero di domande fondamentali ancora senza risposta ha continuato a diminuire.

C'è tuttavia un altro aspetto che si può considerare. I quark, con i loro tre colori e sei sapori, e i gluoni, che si presentano in otto combinazioni di colore, sono già di per sé piuttosto numerosi. Inoltre, fuori dall'ambito delle particelle soggette all'interazione forte, ci si imbatte nell'elettrone, nel muone e nel tauone, ognuno con relativo neutrino. E tutti i fermioni hanno antiparticelle distinte da se stessi. Ci sono inoltre il fotone, e i tre bosoni intermedi dell'interazione debole. Il bosone di Higgs, se ce ne è uno solo, completa l'elenco delle particelle elementari richieste dal Modello Standard. Facendo la somma, si tratta in tutto di almeno sessantuno particelle, e una dozzina di costanti arbitrarie. Inoltre, le forze fondamentali hanno forme molto simili e richiedono a gran voce di essere interpretate come manifestazioni diverse di una stessa interazione sottostante.

Al profano può sembrare folle l'idea che le leggi ultime di tutta la materia dell'universo poggino su una collezione così numerosa ed eterogenea di oggetti "fondamentali". E il fisico teorico delle particelle non può che concordare con lui.

La soluzione di questo rompicapo dovrebbe risiedere nell'inclusione del Modello Standard in una teoria più vasta contenente meno arbitri, preferibilmente una teoria unificata di tutte le particelle e delle loro interazioni. Le estensioni del Modello Standard più accreditate dalla

comunità dei fisici teorici sono il Modello a Supersimmetria e la Teoria delle Stringhe; una nuova interpretazione è la recente congettura di corrispondenza AdS/QCD.

Usando le parole di Richard Feynman:

“La natura usa solo i fili più lunghi per tessere i suoi disegni, di modo che ogni piccolo pezzo di stoffa rivela lo schema dell’intera tappezzeria.”

Appendice A

Soluzione dell'equazione di Salpeter

A.1 Rappresentazione spettrale dell'operatore radice

Consideriamo l'equazione di Salpeter unidimensionale

$$\left(\sqrt{-\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + m^2} + V(x) \right) \psi(x) = E\psi(x) \quad . \quad (\text{A.1})$$

Il significato dell'operatore radice quadrata che appare in questa equazione è il seguente. Scriviamo la (A.1) come relazione tra i ket:

$$\left(\sqrt{P^2 + m^2} + V(X) \right) |\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad .$$

Nella rappresentazione degli impulsi si ha:

$$\langle p | \sqrt{P^2 + m^2} + V(X) |\psi\rangle = E \langle p | \psi \rangle \quad .$$

Se $\phi(p)$ è la funzione d'onda nella rappresentazione degli impulsi:

$$\phi(p) = \langle p | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}px} \psi(x) \quad ,$$

allora l'equazione di Salpeter si può scrivere nel modo seguente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \langle p | \psi \rangle \langle x | V(X) |\psi\rangle = \left(E - \sqrt{p^2 + m^2} \right) \phi(p) \quad ,$$

ossia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}px} V(x) \int_{-\infty}^{+\infty} dp' \langle x | p' \rangle \langle p' | \psi \rangle = \left(E - \sqrt{p^2 + m^2} \right) \phi(p) \quad ,$$

ovvero

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp' \phi(p') \tilde{V}(p' - p) = \left(E - \sqrt{p^2 + m^2} \right) \phi(p) \quad , \quad (\text{A.2})$$

in cui

$$\tilde{V}(p' - p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2\pi\hbar} V(x) e^{\frac{i}{\hbar}(p' - p)x}$$

è la trasformata di Fourier dell'energia potenziale. Si osservi che l'equazione di Salpeter è un'equazione integrale e non differenziale. Per scrivere l'equazione di Salpeter nello spazio delle coordinate è sufficiente ora effettuare la trasformata di Fourier della (A.2). Si ottiene

$$[E - V(x)] \psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' e^{\frac{i}{\hbar}(x-x')p} \sqrt{k^2 + m^2} \psi(x') \quad . \quad (\text{A.3})$$

Queste formule si generalizzano agevolmente al caso tridimensionale. Se il potenziale è centrale e si considera la parte radiale dell'equazione d'onda, in analogia alla (A.3) si ottiene

$$[E - V(x)] \phi_l(r) = \frac{2}{\pi\hbar^3} \int_0^{+\infty} dr' r'^2 \int_0^{+\infty} dk \sqrt{k^2 + m^2} k^2 j_l\left(\frac{kr}{\hbar}\right) j_l\left(\frac{kr'}{\hbar}\right) \phi_l(r') \quad . \quad (\text{A.4})$$

A.2 Soluzione dell'integrale in dk

Partiamo dall'equazione

$$[V(r) - M] u_l(r) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dr' \int_0^\infty dk \left(\sqrt{k^2 + m_1^2} + \sqrt{k^2 + m_2^2} \right) \sin(kr) \sin(kr') u_l(r') = 0 \quad (\text{A.5})$$

che si ricava dalla (A.4) ponendo $\hbar = 1$, $j_0 = \frac{\sin x}{x}$ e $u_l(r) = r\phi_l(r)$ come spiegato nel par. 3.1.1.

Esaminiamo il caso $m_1 = m_2 = 0$ e consideriamo il termine

$$H_0 = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty dr' u_0(r') \int_0^\infty dk k \sin(kr) \sin(kr') \quad . \quad (\text{A.6})$$

Posto $z = r'/r$, si ha

$$\frac{4}{\pi} \int_0^\infty dk k \sin(kr) \sin(kr') = \frac{2}{\pi r^2} \int_0^\infty dy y [\cos(z-1)y - \cos(z+1)y] \quad ;$$

poiché questo non converge, applichiamo un *cutoff* e consideriamo il limite

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{2}{\pi r^2} \int_0^\infty dy y [\cos(z-1)y - \cos(z+1)y] e^{-\beta y} \quad .$$

Applicando la relazione [61]

$$\int_0^\infty dy y^{\mu-1} e^{-\beta y} \cos(\delta y) = \frac{\Gamma(\mu)}{(\delta^2 + \beta^2)^{\frac{\mu}{2}}} \cos\left(\mu \arctan\left(\frac{\delta}{\beta}\right)\right)$$

e definendo

$$u_0(-r) = -u_0(r)$$

si trova infine

$$H_0 = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dr' u_0(r') \left[\frac{\cos\left(2 \arctan\left(\frac{r'-r}{\beta r}\right)\right)}{(r'-r)^2 + \beta^2 r^2} - \frac{\cos\left(2 \arctan\left(\frac{r'+r}{\beta r}\right)\right)}{(r'+r)^2 + \beta^2 r^2} \right] \quad (\text{A.7})$$

Passiamo ora al caso con m_1 e m_2 non nulli e consideriamo il termine

$$H_j = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dr' \int_0^\infty dk \sqrt{k^2 + m_j^2} \sin(kr) \sin(kr') u_l(r') \quad . \quad (\text{A.8})$$

Operando la sostituzione

$$k = m_j \sinh x$$

e applicando la relazione

$$\sin(kr) \sin(kr') = \frac{1}{2} [\cos(k(r-r')) - \cos(k(r+r'))]$$

si ottiene

$$H_j = \frac{m_j^2}{2\pi} \int_0^\infty u_0(r') J_j(r')$$

con

$$J_j(r') = \int_0^\infty [1 + \cosh(2x)] [\cosh(m_j |r-r'| \sinh x) - \cosh(m_j |r+r'| \sinh x)] \quad .$$

Introducendo la funzione di Bessel modificata [61]

$$K_\nu(x) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)} \int_0^\infty dt \cosh(\nu t) \cos(x \sinh t)$$

che soddisfa la condizione di ricorrenza

$$xK_{\nu-1}(x) - xK_{\nu+1}(x) = -2\nu K_\nu(x)$$

calcoliamo

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dx [\cosh((\nu-1)x) + \cosh((\nu+1)x)] \cos \alpha \sinh x = \\ & = \cos \frac{\pi(\nu-1)}{2} K_{\nu-1}(\alpha) + \cos \frac{\pi(\nu+1)}{2} K_{\nu+1}(\alpha) = \\ & = \sin \frac{\pi\nu}{2} (K_{\nu-1}(\alpha) - K_{\nu+1}(\alpha)) \end{aligned}$$

da cui

$$J_j(r') = \left[-2\nu \sin \frac{\pi\nu}{2}\right] \left[\frac{K_\nu(m_j |r-r'|)}{m_j |r-r'|} - \frac{K_\nu(m_j |r+r'|)}{m_j |r+r'|} \right]$$

per $\nu = 1$. Definendo ancora

$$u_0(-r) = -u_0(r)$$

si ottiene infine

$$H_j = -\frac{m_j^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(r') \left[\frac{K_1(m_j |r - r'|)}{m_j |r - r'|} - \frac{K_1(m_j |r + r'|)}{m_j |r + r'|} \right] \quad (\text{A.9})$$

Ora, poiché la funzione di Bessel modificata è tale che

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} K_1(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{2} \log \frac{\alpha}{2}$$

la (A.5) diventa finalmente

$$[V(r) - M] u_0(r) + H_0 + H_1 + H_2 = 0$$

ovvero

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{+\infty} dr' \frac{u_0(r')}{(r - r')^2} + \left\{ \frac{m_1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dr' \frac{u_0(r')}{|r - r'|} \left[\frac{1}{m_1 |r - r'|} - K_1(m_1 |r - r'|) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{m_2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dr' \frac{u_0(r')}{|r - r'|} \left[\frac{1}{m_2 |r - r'|} - K_1(m_2 |r - r'|) \right] \right\} + [V(r) - M] u_0(r) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

A.3 Applicazione del metodo di Multhopp

Utilizzando il cambio di variabile

$$r = -\cot \theta \quad (\text{A.11})$$

la (A.10) assume la forma

$$\int_0^\pi d\theta' F(\theta, \theta') u(\theta') = [M - V(\theta)] u(\theta) \quad (\text{A.12})$$

con la condizione $u(0) = u(\pi) = 0$. Scegliamo gli *angoli di Multhopp*

$$\theta_l = \frac{l}{N+1} \pi \quad (l = 1, \dots, N) \quad (\text{A.13})$$

e consideriamo la serie di Fourier troncata

$$u(\theta) = \sum_{j=1}^N c_j \sin(j\theta) = \sum_{j=1}^N N \left[\frac{2}{N+1} \sum_{j=1}^N \sin(j\theta_l) u(\theta_l) \right] \sin(j\theta) \quad .$$

Otteniamo quindi successivamente

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N \left\{ \frac{2}{N+1} \sum_{j=1}^N \left[\int_0^\pi d\theta' F(\theta, \theta') \sin(j\theta') \right] \sin(j\theta_m) \right\} u(\theta_m) &= [M - V(\theta_l)] u(\theta_l) \\ \sum_{m=1}^N B'_{lm} u(\theta_m) &= [M - V(\theta_l)] u(\theta_l) \end{aligned}$$

$$\sum_{m=1}^N (B'_{lm} + \delta_{ml}V(\theta_l)) u(\theta_m) = Mu(\theta_l)$$

$$\sum_{m=1}^N B_{lm}u(\theta_m) = Mu(\theta_l) \quad (l = 1, \dots, N) \quad . \quad (\text{A.14})$$

In altre parole, il problema di risolvere l'equazione integrale singolare originale (A.10) è stato ricondotto alla soluzione del sistema (A.14) che, una volta risolto, dà come autovalori lo spettro di massa M e come autovettori le relative funzioni d'onda $u_0(r)$ in N punti. La soluzione è tanto più accurata quanto più è grande N , e gli autovalori più bassi si stabilizzano al crescere di N .

Se la funzione d'onda ha, come nel nostro caso, parità definita, il sistema (A.14) può essere ridotto [50]. Poiché infatti per definizione la funzione è dispari:

$$u^-(\theta) = -u^-(\pi - \theta)$$

per angoli discreti questo implica

$$u^-(\theta_k) = -u^-(\theta_{N+1-k})$$

e quindi il sistema (A.14) diventa

$$\sum_{m=1}^{(N-1)/2} B_{lm}^- u^-(\theta_m) = Mu^-(\theta_l) \quad (\text{A.15})$$

dove

$$B_{lm}^- = B_{lm} - B_{l, N+1-m} \quad . \quad (\text{A.16})$$

A.4 Calcolo dell'integrale al valor principale

L'integrale al valor principale che compare al primo membro dell'equazione (A.10) richiede particolare attenzione in quanto l'integrando presenta una divergenza non integrabile. Effettuando il cambio di variabile richiesto per l'utilizzo del metodo di Multhopp, esso diventa:

$$-\frac{2}{\pi} P.V. \int_0^\pi \frac{\sin j\theta}{\sin^2 \theta} \frac{d\theta}{(\cot \theta - \cot \theta_l)^2} \quad .$$

Sviluppando il quadrato e utilizzando le formule di addizione dei seni esso si riduce immediatamente a

$$-\frac{2}{\pi} \sin^2 \theta_l P.V. \int_0^\pi \frac{\sin j\theta d\theta}{\sin^2(\theta - \theta_l)} \quad .$$

Come anticipato, è ora evidente che l'integrando presenta un polo doppio in θ_l . Per funzioni con un polo doppio nell'intervallo di integrazione la definizione di integrale al valor principale di Cauchy è modificata nel modo seguente [50]:

$$P.V. \int_a^b \frac{f(y) dy}{(y-x)^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{x-\epsilon} \frac{f(y) dy}{(y-x)^2} + \int_{x+\epsilon}^b \frac{f(y) dy}{(y-x)^2} - \frac{2f(x)}{\epsilon} \right\} \quad (\text{A.17})$$

in modo da eliminare la divergenza.

La definizione (A.17), applicata al nostro integrale, lo riduce a

$$-\frac{2}{\pi} \sin^2 \theta_l \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\theta_l - \epsilon} \frac{\sin j\theta d\theta}{\sin^2(\theta - \theta_l)} + \int_{\theta_l + \epsilon}^{\pi} \frac{\sin j\theta d\theta}{\sin^2(\theta - \theta_l)} - \frac{2}{\epsilon} \sin j\theta_l \right\} \quad (\text{A.18})$$

che è ora convergente.

Bibliografia

- [1] A. Einstein, *Physics and reality*, Journal of the Franklin Institute, 1936
- [2] Y. Ne'eman *Hadron simmetry*, from M.G. Doncel, A. Herman, L. Michel, and A. Pais, *Symmetries in Physics (1600–1980)*, Seminari di Historia de les Ciènces, Universitat Autònoma de Barcelona, BELLATERRA (BARCELONA) SPAIN 1987, Proceedings of the *1st International Meeting on the History of Scientific Ideas* held at Saint Feliu de Guixols, Catalonia, Spain, September 20–26, 1983
- [3] D. B. Lichtenberg, *Unitary symmetry and elementary particles*, Academic Press, New York, 1970
- [4] Y. Nambu, *Quarks : Frontiers in elementary particle physics*, World Scientific, Philadelphia, 1985
- [5] M. Gell-Mann, *The quark and the jaguar : adventures in the simple and the complex*, Little Brown, London, 1994
- [6] M. Gliozzi, *Storia della fisica*, Bollati Boringhieri, Torino, 2005
- [7] P. P. Teodorescu, and N. A. P. Nicorovici, *Applications of the theory of groups in mechanics and physics*, Kluwer, Boston, 2004
- [8] H. Georgi, *Lie algebras in particle physics : from isospin to unified theories*, Introduction by S. L. Glashow, Benjamin/Cummings, 1982
- [9] G. Nardulli, *Introduction to Fundamental Interactions*, Lectures for the Course on Fundamental Interactions, University of Bari, Italy, Academic Year 2003-2004
- [10] F. Halzen, and Alan D. Martin, *Quarks and leptons : an introductory course in modern particle physics*, Wiley, New York, 1984
- [11] O. Pfister, *Group representation theory and quantum physics*, Lecture notes of the April 23, 2003 Algebra Seminar of the Departement of Mathematics at the University of Virginia
- [12] G. Nardulli, *Meccanica Quantistica II, Applicazioni*, FrancoAngeli, Milano, 2001
- [13] S. Gasiorowicz, *Elementary particle physics*, Wiley, New York, 1966
- [14] K. Huang, *Quarks, leptons and gauge fields*, 2nd ed., World Scientific, Singapore, 1992

- [15] S. Coleman, *Aspects of symmetry: selected Erice lectures of Sidney Coleman*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985
- [16] H. Yukawa, *On the interactions of elementary particles*, Proc. Phys. Math. Soc. Jap. **17** (1935) 48
- [17] A. Pais, *Some remarks on the V-Particles*, Phys. Rev. **86** (1952) 663
- [18] M. Gell-Mann, *Isotopic spin and new unstable particles*, Phys. Rev. **92** (1953) 833
- [19] K. Nishijima, *Models of V-particles*, Progr. of Theor. Phys. **10** (1953) 549
- [20] D. Flamm, and F. Schöberl, *Introduction to the quark model of elementary particles*, Gordon and Breach, New York, 1982
- [21] E. Fermi, and C. N. Yang, *Are mesons elementary particles?*, Phys. Rev. **76** (1949) 1739
- [22] S. Sakata, *On a composite model for new particles*, Progr. of Theor. Phys. **16** (1956) 686
- [23] M. Ikeda, S. Ogawa, and Y. Ohnuki, *A possible symmetry in Sakata's Model for bosons-baryons system*, Progr. of Theor. Phys. **22** (1959) 715
- [24] Y. Yamaguchi, *A model of strong interactions*, Progr. Theor. Phys. Suppl. **11** (1959) 37
- [25] M. Gell-Mann, *The Eightfold Way: a theory of strong interaction symmetry*, OSTI ID: 4008239, 1961
- [26] Y. Ne'eman, *Derivation of strong interactions from a gauge invariance*, Nucl. Phys. **26** (1961) 222
- [27] M. Gell-Mann, and Y. Ne'eman, *The Eightfold Way*, W. A. Benjamin, New York, 1964
- [28] M. Gell-Mann, *A schematic model of baryons and mesons*, Phys. Lett. **8** (1964) 214
- [29] G. Zweig, *An $SU(3)$ model for strong interaction symmetry and its breaking*, CERN-8182-TH-401 (1964)
- [30] G. Morpurgo, *Is a non-relativistic approximation possible for the internal dynamics of elementary particles?*, Physics (U.S.) Discontinued with Vol. 4, no. 1, 1968; Vol: 2
- [31] F. Gürsey, and L. A. Radicati, *Spin and unitary spin independence of strong interactions*, Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 173
- [32] J. R. Christman, *$SU(3)$ and the quark model*, Phisnet MISN-0-282, 2001
- [33] G. Nardulli, *Meccanica Quantistica I, Principi*, FrancoAngeli, 2001
- [34] S. Coleman, and S. L. Glashow, *Electrodynamic properties of baryons in the unitary symmetry scheme*, Phys. Rev. Lett. **6** (1961) 423
- [35] M. Green, *Lectures in Particle Physics*, Royal Holloway University of London
- [36] K. Krane, *Introductory nuclear physics*, Wiley, New York, 1981

- [37] D. H. Perkins, *Introduction to high energy physics*, 4th ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2000
- [38] R. P. Feynman, *Very high-energy collisions of hadrons*, Phys. Rev. Lett. **23** (1969) 1415
- [39] S. L. Glashow, J. Iliopoulos, and I. Maiani, *Weak interaction with lepton-hadron symmetry*, Phys. Rev. **D2** (1970) 1285
- [40] E. S. Swanson, *The new heavy mesons: a status report*, Phys. Rept. **429** (2006) 243-305
- [41] M. Baker, J. S. Ball, and F. Zachariasen, *Effective quark-antiquark potential for the constituent quark model*, Phys. Rev. **D51** (1995) 1968
- [42] L. Ya. Glozman, Z. Papp, W. Plessas, K. Varga, and R. F. Wagenbrunn, *Effective Q - Q interactions in constituent quark models*, Phys. Rev. **C57** (1998) 3406
- [43] J. Vijande, F. Fernandez, and A. Valcarce, *Constituent quark model study of the meson spectra*, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **31** (2005) 481-506
- [44] E. Eichten, and F. Feinberg, *Spin dependent forces in QCD*, Phys. Rev. **D23** (1981) 2724
- [45] S. N. Gupta, and S. F. Radford, *Quark-quark and quark-antiquark potentials*, Phys. Rev. **D24** (1981) 2309
- [46] E. S. Swanson, *A canonical D_s spectrum*, from AIP Conference Proceedings Volume 892, QUARK CONFINEMENT AND THE HADRON SPECTRUM VII: 7th Conference on Quark Confinement and the Hadron Spectrum - QCHS7, Ponta Delgada, Acores (Portugal), 2-7 September 2006
- [47] D. Ebert, R. N. Faustov, and V. O. Galkin, *Quark-antiquark potential retardation and radiative contributions and the heavy quarkonium mass spectra*, Phys. Rev. **D62** (2000) 034014
- [48] P. Colangelo, G. Nardulli, and M. Pietroni, *Relativistic bound state effects in heavy meson physics*, Phys. Rev. **D43** (1991) 3002-3010
- [49] P. Cea, P. Colangelo, L. Cosmai, and G. Nardulli, *Decay constants of heavy mesons from a QCD relativistic potential model*, Phys. Lett. **B206** (1988) 691
- [50] A. J. Hanson, R. D. Peccei, and M. K. Prasad, *Two dimensional $SU(N)$ gauge theory, strings and wings: comparative analysis of meson spectra and covariance*, Nucl. Phys. **B121** (1977) 479
- [51] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane, and T. M. Yan, *Charmonium: the model*, Phys. Rev. **D17** (1978) 3090
- [52] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane, and T. M. Yan, *Charmonium: comparison with experiment*, Phys. Rev. **D21** (1980) 203
- [53] S. Jacobs, M. Olsson, and C. Suchyta, *Comparing the Schrödinger and spinless Salpeter equations for heavy-quark bound states*, Phys. Rev. **D33** (1986) 3338

- [54] L. P. Fulcher, Z. Chen, and K. C. Yeong, *Energies of quark-antiquark systems, the Cornell potential, and the spinless Salpeter equation*, Phys. Rev. **D47** (1993) 4122
- [55] C. Quigg, and J. L. Rosner, *Quantum mechanics with applications to quarkonium*, Phys. Rept. **56** (1979) 167
- [56] T. Barnes, S. Godfrey, and E. S. Swanson, *Higher charmonia*, Phys. Rev. **D72** (2005) 054026
- [57] N. Isgur, and G. Karl, *P wave baryons in the quark model*, Phys. Rev. **D18** (1978) 4187-4205
- [58] N. Isgur, and G. Karl, *Positive parity excited baryons in a Quark Model with hyperfine interactions*, Phys. Rev. **D19** (1979) 2653-2677
- [59] P. Cea, and G. Nardulli, *Bound states and asymptotically free quarks*, Phys. Rev. **D34** (1986) 1863
- [60] Particle Data Group, *Review of Particle Physics*, 2006
- [61] I.S. Gradshteyn, and I.M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Academic Press, New York, 1980
- [62] G. Kane, *The dawn of physics beyond the Standard Model*, Scientific American, June 2003

Ringraziamenti

È impossibile fare un elenco di tutte le persone che sono state parte di questi tre indimenticabili anni della mia vita, di cui questo lavoro di tesi ha rappresentato la miglior conclusione possibile. Ma per la mia inguaribile propensione a lanciarmi nelle imprese impossibili, ci proverò lo stesso.

Desidero ringraziare infinitamente:

- il Prof. Giuseppe Nardulli, il mio massimo punto di riferimento negli ultimi cinque mesi, per aver guidato il mio lavoro di tesi con immensa saggezza e dedizione, per avermi offerto stimoli e onorata con opportunità irripetibili, per avermi insegnato come davvero pensa e lavora un grande Fisico Teorico;
- il Prof. Sebastiano “Sebino” Stramaglia, per avermi seguita con competenza ed entusiasmo nel tirocinio;
- il Prof. Mario Pellicoro, per l’impagabile disponibilità ed esperienza che ha condiviso con me; il Prof. Leonardo Angelini, per l’infinita pazienza mostrata davanti ai miei continui disturbi; la Dott.ssa Floriana Giannuzzi, che è stata per me un esempio impeccabile di studentessa modello; la Sig.ra Fausta Cannillo, per la discreta compagnia durante il mio lavoro; e tutti i Professori, Ricercatori e Dottorandi del Gruppo Teorico di Bari che in questi mesi mi hanno fatta sentire un po’ “una di loro”;
- mia madre e mio padre, per l’amore e il sostegno incondizionati; mio fratello, per l’enorme sacrificio di aver rinunciato alle chat per cedermi il suo computer; i miei nonni, zii e cuginetti per avermi fatto riscoprire l’importanza della famiglia; Cinzia Falco, la mia seconda mamma, per essermi sempre stata vicina “a distanza”; la mia cricetina Maia;
- tutti gli amici, sia quelli di sempre che quelli che ho conosciuto in questi tre anni; il mio Pianoforte, amico su cui posso sempre contare;
- tutte le persone che mi vogliono bene, che è ciò che conta davvero.