

## PENDOLO SEMPLICE

### Obiettivo

Scopo di questo esperimento è lo studio della relazione che lega il periodo di oscillazione di un pendolo semplice alla sua lunghezza.

### Descrizione dell'esperimento

Il pendolo semplice è un sistema ideale formato da una massa puntiforme sospesa ad un filo inestensibile, di lunghezza  $l$  e di massa nulla, vincolato a muoversi attorno ad un punto fisso.

Quando il pendolo è diretto lungo la verticale il sistema è in equilibrio poiché la risultante delle forze agenti sul cilindretto è nulla. Se il pendolo viene spostato di un angolo  $\theta$  da tale posizione e lasciato libero oscilla in un piano verticale, sotto l'azione della forza peso, con moto periodico. Se  $\theta$  è tale che vale l'approssimazione  $\sin \theta \approx \theta$ , l'equazione del moto del pendolo è:

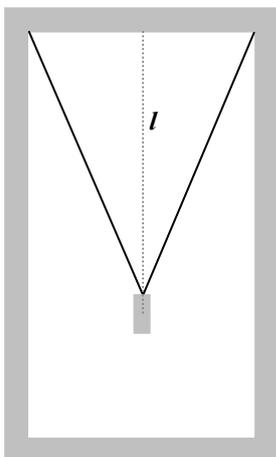
$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \frac{g}{l} \vartheta = 0$$

e descrive un'oscillazione armonica di periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (1)$$

essendo  $g$  l'accelerazione di gravità.

Mediante questa relazione è possibile misurare  $g$  conoscendo la misura della lunghezza  $l$  del pendolo e quella del periodo  $T$ .



Obiettivo dell'esperimento è la verifica della relazione (1), nelle condizioni in cui è valida, misurando il periodo  $T$  al variare della lunghezza  $l$  del pendolo.

Il sistema utilizzato per la realizzazione dell'esperimento è un *pendolo bifilare*, costituito da un cilindretto metallico sospeso ad un filo inestensibile vincolato ai due estremi ad un supporto metallico. Questa configurazione consente di evitare torsioni del filo.

La lunghezza  $l$  del pendolo è la distanza tra il centro di massa del cilindretto (assunto coincidente con il suo centro geometrico) e la retta individuata dai due punti di sospensione del filo.

Le dimensioni del cilindretto sono molto minori della lunghezza del pendolo.

Quando il piano contenente il filo passa per la verticale il sistema è in equilibrio; non appena il cilindretto viene spostato da tale posizione e lasciato libero comincia ad oscillare.

### Materiale utilizzato

- Supporto metallico
- Cilindretto (o sferetta)
- Filo inestensibile e di massa trascurabile rispetto alla massa del cilindretto
- Cronometro
- Riga
- Calibro ventesimale

### Esecuzione dell'esperimento

Misurate con il calibro l'altezza  $h$  e il diametro  $2r$  del cilindretto e con la riga la distanza  $d$  tra la superficie superiore del cilindretto e la retta individuata dai due punti di sospensione del filo. La lunghezza  $l$  del pendolo è data dalla somma  $d + h/2$ . Quindi spostate il pendolo dalla posizione di equilibrio e lasciatelo oscillare. L'ampiezza delle oscillazioni non deve superare i  $4^\circ - 5^\circ$ . Prima di misurare il periodo provate a stimare l'angolo di apertura del vostro pendolo. Misurate la durata di 10 oscillazioni complete e ripetete 5 volte tale misura cercando di non superare apprezzabilmente l'angolo di apertura precedentemente stimato.

Riducete progressivamente la lunghezza del pendolo di circa 4 - 5 cm per volta e per ogni lunghezza ripetete le misure del periodo in modo da ottenere la seguente tabella (fate attenzione a non accorciare troppo il filo altrimenti il sistema non può essere più assimilato ad un pendolo semplice):

Lunghezza $l$ (cm)	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$l_4$	$l_5$	$l_6$	$l_7$	...
$t_1$ (sec)								
$t_2$ (sec)								
$t_3$ (sec)								
$t_4$ (sec)								
$t_5$ (sec)								
$\langle t \rangle$ (sec)								
$\Delta t$ (sec)								
$\langle T \rangle$ (sec)								
$\Delta T$ (sec)								

### Valutazione dell'errore sulle misure

L'errore sulla misura della lunghezza  $l$  è determinato dall'errore sulla misura della lunghezza del filo e da quello sulla misura dell'altezza del cilindretto. L'errore sulla misura della lunghezza del filo è dovuto oltre che alla sensibilità dello strumento anche all'incertezza sulla individuazione della congiungente i due punti di sospensione del filo (che non sono punti geometrici). Per cui, se si utilizza una riga millimetrata, sulla lunghezza bisogna assumere un'incertezza pari ad almeno 0.2 cm – 0.3 cm.

L'errore sulla misura della lunghezza del cilindretto è determinato dalla sensibilità del calibro che è del decimo di mm, per cui risulta trascurabile rispetto a quello sulla lunghezza del filo.

Se il cronometro è digitale l'errore che si commette nella misura della durata delle oscillazioni è dovuto essenzialmente ai riflessi dell'operatore. Poiché la stima del valor medio del tempo è fatta su 5 misure assumiamo come errore la semidispersione massima. Sul periodo, invece, l'errore è pari a quello sul tempo diviso per il corrispondente numero di oscillazioni.

Se  $\theta$  non è sufficientemente piccolo che tipo di errore si commette nella misura del periodo  $T$ ?

Se le dimensioni del cilindretto sono tali che non può essere ritenuto puntiforme il pendolo diventa un pendolo fisico. Che tipo di errore si commette considerandolo ideale?

## Analisi dei dati

Riportate in un grafico i periodi  $T$  in funzione delle lunghezze  $l$  con i relativi errori. La dipendenza che si può ipotizzare è del tipo

$$(1) \quad T = \cos t * \sqrt{l} .$$

Per verificare la correttezza della nostra ipotesi linearizziamo la (1) elevando al quadrato ambo i membri e ponendo

$$x = l \quad y = T^2 .$$

L'equazione sarà perciò del tipo:  $y = ax \Leftrightarrow T^2 = al$  e il coefficiente angolare può essere determinato sia con il metodo grafico, sia con il metodo dei minimi quadrati<sup>[1]</sup>.

## Determinazione dell'accelerazione di gravità $g$

Dal valore del coefficiente angolare  $a$  della retta di regressione si può ricavare il valore della accelerazione di gravità  $g$ . Infatti, risolvendo analiticamente l'equazione del moto del pendolo si ricava per il periodo la relazione  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ . Confrontando con la (1) e ricordando le sostituzioni effettuate si ricava  $g = 4\pi^2/a$ .<sup>[2]</sup>

Calcolate l'incertezza su  $a$  e da questa ricavate quella sulla stima di  $g$ .

Infine determinate la discrepanza  $\varepsilon\%$  percentuale tra il valore di  $g$  ottenuto sperimentalmente ( $g_{\text{sperimentale}}$ ) e quello atteso ( $g_{\text{atteso}}$ ) mediante la relazione

$$\varepsilon\% = \frac{|g_{\text{sperimentale}} - g_{\text{atteso}}|}{g_{\text{atteso}}} * 100 .$$

## Note

Durante l'esecuzione delle misure occorre avere cura che:

- l'ampiezza delle oscillazioni sia sufficientemente piccola;
- alla pallina non venga impressa una velocità iniziale;
- le oscillazioni vengano contate nel modo corretto;
- le misure di tempo vengano fatte con cura e sempre dalla stessa persona.

<sup>[1]</sup> Se la misura del periodo ha un errore minore rispetto a quello sulla lunghezza con il metodo dei minimi quadrati si esegue la regressione di  $l$  su  $T^2$  effettuando le sostituzioni  $y = l$ ;  $x = T^2$ .

<sup>[2]</sup> Se viene fatta, invece, la regressione di  $l$  su  $T^2$  sarà  $y = a'x \Leftrightarrow l = a' T^2$  e quindi  $g = 4\pi^2 a'$ .

## Appendice

### Approssimazione di piccole oscillazioni

Se  $\theta$  non è sufficientemente piccolo perché valga l'approssimazione  $\sin \theta \approx \theta$  il periodo può essere espresso come

$$T \approx T_0 \left( 1 + \frac{\theta^2}{16} \right)$$

essendo  $T_0$  il periodo di oscillazioni con angolo infinitesimo.

Per il valore di  $\theta$  da voi adoperato di quanto differisce  $T$  da  $T_0$ ? E' una differenza significativa rispetto all'errore stimato sul periodo?

### Approssimazione di massa puntiforme

La massa sospesa è di dimensioni finite. Se non può essere assimilata ad una massa puntiforme il pendolo diventa un pendolo fisico il cui periodo è dato da:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

essendo  $I$  il momento di inerzia del corpo oscillante rispetto all'asse di rotazione,  $m$  la sua massa ed  $l$  la distanza tra il punto di sospensione ed il centro di massa.

Nella nostra configurazione il momento di inerzia del cilindro, calcolato rispetto all'asse di rotazione, è dato da:

$$I = ml^2 + \frac{1}{12}m(3r^2 + h^2)$$

essendo  $r$  il raggio del cilindro stesso.

Per la lunghezza più piccola calcolate il periodo sia con la relazione valida per il pendolo semplice, sia con quella relativa al pendolo fisico. Trovate una differenza significativa rispetto all'errore stimato sul periodo?