Legge di *sopravvivenza* nel lancio dei dadi

In questo esperimento ci si propone di costruire un modello probabilistico interpretativo dei dati sperimentali relativi alla "*sopravvivenza"* nel lancio dei dadi e di valutarne i parametri mediante metodi numerici.

Apparato sperimentale

Insieme di 100 dadi

Descrizione dell'esperimento

Scegliete una faccia, ad esempio quella con il numero 3, e lanciate i 100 dadi. Contate i dadi che mostrano la faccia scelta ed eliminateli. Chiameremo gli altri dadi "*sopravvissuti*". Inserite nella tabella 1, riportata sotto, il numero dei dadi *sopravvissuti* dopo il primo lancio, il numero dei dadi *eliminati* e il *numero totale dei dadi eliminati*.

Tabella 1

Numero del lancio	Numero dadi sopravvissuti (O_k)	Numero dadi eliminati	Totale dadi eliminati
0	100	0	0
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			

Raccogliete i dadi *sopravvissuti* e rilanciateli, quindi ripetete i conteggi dei dadi *eliminati* e di quelli *sopravvissuti* nel secondo lancio e riportateli in tabella. Effettuate queste operazioni per un totale di 15 lanci.

Per fare una stima del possibile errore (dovuto alle *fluttuazioni statistiche*) nella determinazione sperimentale del numero O_k (k = 1, …, 15) di *dadi sopravvissuti* ripetete 10 volte le operazioni precedenti quindi calcolate, per ogni numero di lancio, il numero medio di dadi *sopravvissuti*, di dadi *eliminati* e del *totale di dadi eliminati* con i relativi errori. Riportate quindi nella tabella 2 i valori medi ottenuti per i dadi *sopravvissuti* con i relativi errori:

Tabella 2

Numero del lancio	**Dadi sopravvissuti**			**Dadi eliminati**		**Totale dadi eliminati**	
	Numero medio (O_k)	**Errore (s_k)**	**Numero atteso (E_k)**	**Numero medio**	**Errore**	**Numero medio**	**Errore**
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							

Analisi dei dati e costruzione del modello interpretativo

Riportate in due grafici distinti rispettivamente il numero di dadi *sopravvissuti* e il *numero totale dei dadi eliminati* in funzione del numero di lancio.

Mediante considerazioni di natura teorica cerchiamo ora di costruire un modello che ci consenta di interpretare le due curve sperimentali.

Indichiamo con p la probabilità che uno dei dadi mostri la faccia scelta. Se N_0 è il numero di dadi che lanciamo, il numero atteso di quelli da eliminare (che mostrano cioè la faccia scelta) è $N_0 p$. Dopo il primo lancio, quindi, i dadi *sopravvissuti* saranno:

$$N_1 = N_0 - N_0 p = N_0 (1 - p).$$

In generale, al lancio k-esimo, ci aspettiamo di dover eliminare $N_k\, p$ dadi per cui, dopo k lanci, i dadi sopravvissuti saranno:

$$N_{k+1} = N_k - N_k p = N_k (1 - p).$$

Analizziamo ora i dati sperimentali per ricavare il valore del parametro p. Per fare questo consideriamo la quantità

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{15} \frac{(O_k - E_k)^2}{s_k^2} \quad (1)$$

dove O_k sono le frequenze assolute sperimentali, E_k quelle attese ed s_k l'errore su O_k. Il χ^2 così definito dipende da p poiché E_k dipende da p. Poiché l'accordo tra i dati e la distribuzione teorica è tanto migliore quanto più è basso il valore della quantità χ^2 è ragionevole attendersi che la migliore descrizione dei dati si avrà per il valore di p che rende minima questa quantità (*metodo del minimo* χ^2). In linea di principio il problema può essere risolto analiticamente ma se la soluzione non è semplice si possono utilizzare metodi numerici. Ricaveremo il valore di p in questo secondo modo utilizzando il foglio elettronico. Perciò, per ogni valore di p riportato nella tabella 3, calcolate i valori attesi E_k dei dadi *sopravvissuti* (tabella 2) e poi il valore del χ^2.

Tabella 3

p	χ^2
0,13	
0,14	
0,15	
0,16	
0,17	
0,18	
0,19	
0,20	
0,21	

(1) Se il valore di O_k è < 5 raggruppate due o più addendi contigui fino ad ottenere un totale > 5. Ovviamente lo stesso deve farsi anche per gli E_k. Inoltre bisogna ricalcolare anche gli s_k.

Riportate in un grafico χ^2 in funzione di p. Che cosa osservate? Qual è il valore di p che rende minimo il χ^2? E' prossimo a quello che ci aspetteremmo nell'ipotesi di dadi non truccati?

Confrontate ora i dati sperimentali con le previsioni del modello tracciando sui grafici dei dadi *sopravvissuti* e del *totale dei dadi eliminati* le relative curve teoriche con p uguale al valore stimato minimizzando il χ^2.