

**Anno Accademico 2006-07**  
**Metodi Matematici della Fisica**  
**Prof. M. Villani**

- A.** Richiami su gli spazi vettoriali. Operatori, operatori lineari, algebra degli operatori lineari, operatori invertibili. Esempi. Spazi metrici. Disuguaglianze notevoli: Hölder, Minkowski. Esempi di spazi metrici. Spazi metrici completi. Il teorema del punto fisso di Banach. Applicazioni, serie di Neumann. Completamento di uno spazio metrico non completo: esempi. Spazi normati, spazi di Banach. Spazi unitari, spazi di Hilbert. Esempi. Ortogonalità. Teorema della proiezione ortogonale. Sistemi ortonormali, coefficienti di Fourier, il metodo dei minimi quadrati in uno spazio di Hilbert. Disuguaglianza di Bessel, Teorema di Riesz-Fisher. Sistemi ortonormali massimali, basi. Eguaglianza di Parseval. Esempi. I polinomi ortogonali rispetto ad una funzione peso, i polinomi di Jakobi, di Legendre, di Laguerre, di Hermite. Completezza del sistema trigonometrico.
- B.** Operatori continui tra spazi normati. Operatori limitati, continuità e limitatezza. Esempi. Estensioni univoca di un operatore limitato. Operatori isometrici, operatori unitari. Gruppi di operatori unitari. Esempi. Operatori di proiezione ortogonale. Operatori non limitati, esempi: operatori di moltiplicazione in  $L_2(\mathbb{R})$ , l'operatore di derivazione in  $L_2(\mathbb{R})$ . L'algebra normata completa degli operatori limitati  $\mathcal{B}(H)$  (algebra di Banach) Funzioni di operatori, serie di Neumann, esponenziale di un operatore lineare limitato. Teorema di Riesz. Aggiunto di un operatore, esistenza ed unicità. Doppio aggiunto. Operatori simmetrici, autoaggiunti, essenzialmente autoaggiunti. Esempi. Somma di operatori di proiezione ortogonale.  $C^*$  Algebra. Aggiunto di un operatore unitario. Essenziale autoaggiuntezza dell'operatore di Laplace. Autovalori ed autovettori di un operatore. Insieme risolvente, spettro puntuale, spettro residuo, spettro continuo di un operatore. Spettro di un operatore autoaggiunto o essenzialmente autoaggiunto. Spettro di operatori limitati. Proprietà spettrali in uno spazio di Hilbert finito dimensionale, rappresentazione spettrale di un operatore autoaggiunto. Famiglia spettrale associata ad ogni operatore autoaggiunto, rappresentazione spettrale, funzioni di operatori.

**Bibliografia**

**Dispense**