Programma di Analisi Matematica II

Corso di Laurea in Fisica, A. A. 2005-'06

Prof. Irene Sisto

CAP. I: **Lo spazio euclideo $\mathbf{R}^n$**

Lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^n$. Il prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$. Proprietà. La norma dedotta dal prodotto scalare. La distanza euclidea in $\mathbf{R}^n$. La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz($*$).

Sfere aperte, sfere chiuse e superfici sferiche. La topologia di $\mathbf{R}^n$. Insiemi aperti ed insiemi chiusi, intorni di un punto e loro proprietà. Punti aderenti, punti interni e punti di accumulazione di un sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$. Aderenza, interno e derivato di un sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$. Proprietà.

Punti di frontiera e frontiera di un sottoinsieme di uno spazio metrico. Spazi metrici connessi, completi e compatti. Proprietà ed esempi.Caratterizzazione degli insiemi compatti di $\mathbf{R}^n$ ($*$).

CAP. II: **Limiti e continuità delle funzioni di più variabili**

Funzioni reali di più variabili reali. Funzioni vettoriali e loro componenti; lo spazio vettoriale delle funzioni definite in un sottoinsieme X di $\mathbf{R}^n$ ed a valori in $\mathbf{R}^m$. Limiti e continuità delle funzioni vettoriali e relativi teoremi. Una caratterizzazione delle funzioni continue. Compattezza e continuità. Il teorema di Weierstrass. Uniforme continuità. Il teorema di Heine-Cantor.

Connessione e continuità ($*$). Gli insiemi connessi di $\mathbf{R}$ ($*$). Il teorema di Bolzano e sue conseguenze. Il teorema di esistenza degli zeri.

CAP. III: **Il calcolo differenziale per le funzioni di più variabili**

Derivate direzionali. Proprietà. Gradiente di una funzione derivabile. Proprietà. Derivate di ordine superiore. Il teorema di Schwartz sull'inversione dell'ordine di derivazione. Esempi e controesempi.

Differenziale totale di una funzione in un punto. Il differenziale come forma lineare e sua lipschitzianità. Funzioni differenziabili. Differenziabilità e continuità. Il teorema sul differenziale totale. Esempi e controesempi. Il teorema di derivazione delle funzioni composte. Applicazioni. Il teorema di Lagrange. Funzioni con gradiente nullo in un insieme connesso. Esempi. La formula di Taylor ($*$).

Forme quadratiche. Forme quadratiche definite (semidefinite) positive o negative. Massimi e minimi liberi. Condizioni necessarie del 1° ordine. Matrici e determinanti hessiani per le funzioni di classe C^2. Condizioni necessarie del 2° ordine. Condizioni sufficienti.

CAP. IV: **Curve e forme differenziali**

Curve in $\mathbf{R}^n$. Definizioni ed esempi. Curve equivalenti. Cammini orientati. Curve rettificabili e loro lunghezza. Integrale curvilineo di una funzione. Forme differenziali. Integrale curvilineo di una forma differenziale. Forme differenziali esatte. Criteri di integrabilità. Forme differenziali chiuse. Formule di Gauss-Green nel piano. Teorema della divergenza ($*$).

CAP. V: **L'integrale di Riemann per le funzioni di più variabili**

Funzioni di insieme additive e misure. La misura elementare in $\mathbf{R}^n$. La misura secondo Peano-Jordan per insiemi limitati di $\mathbf{R}^n$. Funzioni semplici. Integrale delle funzioni semplici. Integrale di funzioni definite su un insieme misurabile di $\mathbf{R}^n$. Interpretazione geometrica dell'integrale. Formule di riduzioni per gli integrali multipli. Prolungamento della misura di Peano-Jordan. Insiemi di misura nulla secondo Lebesgue. Funzioni numeriche quasi continue secondo Lebesgue. Funzioni sommabili e loro integrale. Teorema fondamentale per il calcolo dell'integrale di una funzione sommabile. Cambiamento delle variabili di integrazione ($*$).

CAP. VI: **Successioni e serie di funzioni**

Successioni di funzioni. Convergenza puntuale . Criterio di convergenza puntuale di Cauchy. Operazioni sui limiti delle successioni. Uniforme convergenza. Criterio di uniforme convergenza di Cauchy. Teorema fondamentale sull'inversione dei limiti. Continuità ed uniforme convergenza. Teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata.

Serie di funzioni. Convergenza puntuale e convergenza uniforme. Criterio di convergenza di Cauchy per le serie di funzioni. Criterio di uniforme convergenza di Cauchy. Serie di funzioni assolutamente convergenti. Esempi. Continuità e uniforme convergenza. Teorema di integrazione termine a termine. Teorema di derivazione termine a termine.

Serie di potenze in $\mathbf{R}$ e in C. Teorema di Abel. Raggio di convergenza.Teorema di Cachy-Hadamard.

Funzioni sviluppabili in serie di Taylor. Criterio di sviluppabilità in serie di Taylor. Sviluppo in serie di Taylor delle funzioni elementari. La serie binomiale . Calcolo di alcuni integrali per serie.

CAP. VII: **Serie trigonometriche**

Serie trigonometriche e loro proprietà. Disuguaglianza di Bessel e uguaglianza di Parseval $(*)$. Funzioni periodiche. Funzioni sviluppabili in serie di Fourier: Teorema fondamentale $(*)$. Funzioni pari e funzioni dispari. Teorema di integrazione per le serie di Fourier $(*)$.

CAP. VIII: **Superfici**

Superfici in $\mathbf{R}^3$. Definizioni ed esempi. Superfici regolari. Piano tangente e vettore normale. Area di una superficie. Integrali superficiali. Massimi e minimi vincolati.

N.B.: Le dimostrazioni relative agli argomenti contrassegnati con $(*)$ sono facoltative.

Testi consigliati

S. CAMPANATO: *Lezioni di Analisi Matematica* 2^a *parte*, Libreria Scientifica Giordano Pellegrini, Pisa, 1978

E. GIUSTI: *Analisi Matematica 2*, Boringhieri, Torino, 1985;

C. D. PAGANI - S. SALSA: *Analisi Matematica*, Vol. 2; Masson, Milano, Parigi, 1990;

E. GIUSTI: *Esercizi e complementi di Analisi Matematica 2*, Boringhieri,

Torino, 1985;
N. FUSCO - P. MARCELLINI - C. SBORDONE: *Esercitazioni di Matematica* , Vol. 2; Liguori Editore, Napoli;
S. SALSA - A. SQUELLATI: *Esercizi di Analisi Matematica 2*; Masson, Milano, Parigi, 1993.