

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA DI II LIVELLO IN FISICA

TESI DI LAUREA IN FISICA TEORICA

Modello di Ising
Unidimensionale Quantistico
in Campo Dinamico Trasverso

Relatori:

Chiar.mo Prof. Saverio Pascazio

Chiar.mo Prof. Rosario Fazio

Laureando:

Marco Bardoscia

ANNO ACCADEMICO 2006/2007

a Maria Valentina

Indice

Introduzione	1
1 Modello di Ising in campo trasverso	7
1.1 Trasformazione di Jordan-Wigner	9
1.2 Trasformata di Fourier discreta	14
1.3 Trasformazione di Bogoliubov	20
2 Hamiltoniana dipendente dal tempo	33
2.1 Breve riepilogo sulla rappresentazione di Heisenberg	34
2.2 Trasformazioni di Bogoliubov dipendenti dal tempo	35
3 Approssimazione adiabatica-impulsiva	40
3.1 Teorema adiabatico	40
3.2 Approssimazione adiabatica	42
3.3 Approssimazione impulsiva	47
4 Campo oscillante	50
4.1 Approssimazione adiabatica-impulsiva	51
4.1.1 Approssimazione collettiva	59
4.1.2 Approssimazione con modi indipendenti	68
4.2 Confronto tra le approssimazioni	76
Conclusioni	86
Bibliografia	88

Introduzione

La Fisica Teorica si propone di descrivere il mondo attraverso una modellizzazione della realtà, allo scopo di spiegare e predire lo svolgimento dei fenomeni naturali, collocandoli all'interno di teorie. È da questo punto di vista che il modello di Ising si inquadra come una pietra miliare, in particolare della Meccanica Statistica, come confermato ad esempio dai 12000 articoli dedicati al suo studio pubblicati dal 1969 al 2002.

Il modello è stato originariamente introdotto nel 1920 da Wilhelm Lenz, ma è nel 1925 che si hanno i primi risultati teorici con Ernest Ising, uno degli studenti di PhD di Lenz all'Università di Amburgo, con un articolo basato sulla sua tesi di dottorato. Sin da allora, il modello è universalmente conosciuto in letteratura come il modello di Ising, anche perché non vi è alcun articolo pubblicato da Lenz su questo argomento.

Proponiamoci di costruire un modello per il ferromagnetismo. In generale, questo necessita un compromesso tra due esigenze contrastanti:

- ottenere equazioni sufficientemente semplici da poter essere risolte analiticamente, o almeno numericamente;
- non perdere, nel corso dell'elaborazione (ovvero durante il processo di semplificazione) le proprietà essenziali della fisica del sistema in esame.

Portiamo avanti il processo di semplificazione guidati dall'idea che il fenomeno del ferromagnetismo sia dovuto essenzialmente all'interazione che tende ad allineare i momenti magnetici degli atomi. In quest'ottica, sembra ragionevole

sostituire ad ogni atomo del ferromagnete gli elettroni responsabili del ferromagnetismo. La prima tappa della modellizzazione consiste dunque nel descrivere un ferromagnete come un reticolo, ai vertici del quale sono collocati dei momenti magnetici: gli spin. Tuttavia, il problema è complesso da trattare, quindi in prima approssimazione si restringe l'interazione ai soli spin primi vicini. In meccanica quantistica gli spin sono descritti da operatori: è questo il *modello di Heisenberg*.

Il modello può essere ulteriormente semplificato sostituendo agli operatori di spin prima dei vettori classici (*modello di Heisenberg classico*) ed infine delle variabili classiche binarie (*modello di Ising classico*). Esso è dunque il frutto della estrema semplificazione di un ferromagnete.

Formalmente il modello di Ising classico prende dunque in considerazione un reticolo di dimensione D e pone in ognuno dei siti reticolari una variabile che può assumere i valori $+1$ o -1 . La forma della hamiltoniana specifica il tipo di interazione tra gli spin (ristretta ai primi vicini) ed eventualmente tra gli spin ed un campo esterno.

Durante il suo lavoro di dottorato, Ising trovò che per $D = 1$ il modello non prevedeva alcuna transizione di fase e ritenne che questo risultato fosse valido per qualunque D . Nel 1944 Lars Onsager mostrò, al contrario, che per $D = 2$ il modello prevedeva una transizione di fase. Non esistono soluzioni analitiche per $D \geq 3$, ma le simulazioni numeriche indicano la presenza di transizioni anche in questi casi.

Il modello di Ising quantistico sostituisce agli spin classici gli operatori di spin quantistici. È possibile mostrare l'esistenza di un mapping tra il modello di Ising classico di dimensione $D + 1$ e quello quantistico di dimensione D .

Argomento della tesi è lo studio di un modello di Ising unidimensionale quantistico con campo trasverso. L'Hamiltoniana che definisce tale sistema è:

$$H = -J \sum_{i=1}^N [g\sigma_i^x + \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z] \quad (1)$$

chiariamo il significato dei simboli introdotti: J è una costante *dimensionale*; le σ_i^x e σ_i^z sono gli operatori di spin, che nel caso di spin 1/2 sono rappresentate dalle matrici di Pauli; g è la costante *adimensionale* di accoppiamento con un campo magnetico esterno. La Hamiltoniana è costituita dunque da due parti: un termine di interazione tra le componenti lungo l'asse z degli spin primi vicini ed uno di interazione tra la componente lungo x di ogni spin ed il campo.

Lo studio di questa particolare tipologia di sistema è notevole per almeno due ragioni principali: una di tipo strutturale e una di tipo applicativo.

La prima di esse consiste nel fatto che il sistema è caratterizzato da una *transizione di fase quantistica*; senza nessuna pretesa di completezza o esaustività, vogliamo semplicemente dare un'idea di questo fenomeno.

Consideriamo il caso in cui l'interazione tra campo magnetico e spin sia dominante rispetto a quella tra soli spin, ovvero il limite $g \gg 1$. Trascurando quindi il secondo termine in (1), possiamo scrivere il ground state del sistema nel seguente modo:

$$|GS\rangle = \prod_i |1\rangle_i^x \quad (2)$$

dove:

$$|1\rangle_i^x = \frac{|1\rangle_i^z + |0\rangle_i^z}{\sqrt{2}} \quad (3)$$

in cui $|1\rangle_i^z$ e $|0\rangle_i^z$ sono i due autostati di σ_i^z relativi rispettivamente agli autovalori $+1$ e -1 . Notiamo che, in questo limite, la hamiltoniana si riduce ad una somma di termini che commutano tra loro, e di conseguenza gli effetti quantistici saranno trascurabili. In effetti lo stato fondamentale del sistema è proprio lo stato di un sistema di spin classico con un forte campo trasverso: gli spin sono tutti allineati nella direzione del campo. Possiamo facilmente calcolare le correlazioni tra le componenti lungo z di due spin su siti diversi (i e j); otteniamo:

$$\langle GS | \sigma_i^z \sigma_j^z | GS \rangle = \delta_{i,j} \quad (4)$$

cioè la componente lungo z di ogni spin è completamente scorrelata con quella di ogni altro spin.

Analogamente consideriamo il caso in cui l'accoppiamento $g \ll 1$, ed in particolare analizziamo il caso in cui è assente il campo esterno, cioè in cui $g = 0$. In questo caso il ground state del sistema è degenere; abbiamo le due possibilità:

$$|GS\rangle = \prod_i |1\rangle_i^z \quad (5a)$$

e

$$|GS\rangle = \prod_i |0\rangle_i^z \quad (5b)$$

Anche in questo caso, trascurando il termine di interazione tra spin e campo esterno, abbiamo ridotto la hamiltoniana ad una somma di termini che tra di loro commutano. Infatti lo fondamentale del sistema è lo stato di un sistema di spin classico senza alcun campo esterno: gli spin sono tutti allineati tra di loro. La *scelta* tra i due stati dipende dal modo in cui l'accoppiamento approssima la condizione ideale $g = 0$. Supponiamo di ridurre g a zero partendo da un valore molto piccolo, ma non nullo; il campo magnetico avrà dunque una direzione, che sarà anche quella scelta dal sistema.

È questo un tipico esempio di *rottura spontanea di simmetria*; la Hamiltoniana introdotta dall'equazione (1) è infatti invariante per la seguente trasformazione:

$$\sigma_i^z \rightarrow -\sigma_i^z \quad (6a)$$

e

$$\sigma_i^x \rightarrow \sigma_i^x \quad (6b)$$

cioè è invariante per riflessioni attraverso l'asse x .

Possiamo facilmente calcolare, nel caso $g = 0$ le correlazioni tra le componenti lungo z di due spin su siti diversi (i e j); otteniamo:

$$\langle GS | \sigma_i^z \sigma_j^z | GS \rangle = 1 \quad (7)$$

cioè la componente lungo z di ogni spin è completamente correlata con quella di ogni altro spin: parleremo di *fase ordinata*.

Esiste quindi un parametro, g nel caso specifico, che controlla la correlazione tra le componenti lungo z degli spin. È possibile inoltre mostrare (vedere

ad esempio *Quantum Phase Transitions* di Sachdev) che le correlazioni tra le componenti lungo z degli spin, per g sufficientemente elevato, ma non tale da trascurare il termine di interazione tra spin, decadono esponenzialmente con la distanza che separa i due spin; per $g \rightarrow 1^-$ decadono come potenze della distanza tra gli spin.

Notiamo che il parametro che regola la transizione non è la temperatura, come per le transizioni di fase classiche, bensì un campo esterno; in altre parole, nelle transizioni di fase quantistiche l'origine delle fluttuazioni non è termica, non è cioè il grande numero di gradi di libertà del sistema; essa risiede invece nella non commutatività tra diversi termini della hamiltoniana, e quindi, in ultima analisi, nel principio di indeterminazione.

La seconda ragione è inerente le possibili applicazioni che nel campo dell'informazione quantistica può avere il sistema introdotto.

Un computer quantistico può essere schematizzato come una serie di sistemi a due livelli interagenti tra loro chiamati *qubit*. Affinchè sia il computer sia utilizzabile, deve essere possibile inizializzare i qubit di cui è composto in uno stato ben preciso, compiere trasformazioni unitarie su di essi e poter misurare lo stato di ogni qubit. Osserviamo che, per poter eseguire trasformazioni che coinvolgano più di un qubit per volta, è necessario che i sistemi a due livelli che costituiscono il computer siano interagenti.

Guardiamo più nel dettaglio lo stato di un computer quantistico. Lo stato di ogni qubit può essere rappresentato dal vettore $|\psi\rangle$ e scritto nel seguente modo:

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \quad (8)$$

in cui $|0\rangle$ e $|1\rangle$ sono gli autostati del singolo sistema a due livelli, mentre α e β sono due coefficienti complessi. Tenendo conto della condizione di normalizzazione scriviamo:

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \quad (9)$$

si ha quindi che lo stato di un qubit è determinato da due parametri reali. Supponiamo adesso che un computer quantistico sia costituito da 2 qubit

rappresentati dai vettori $|\psi\rangle_1$ e $|\psi\rangle_2$. Lo stato del computer sarà:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 &= (\alpha_1 |0\rangle_1 + \beta_1 |1\rangle_1) \otimes (\alpha_2 |0\rangle_2 + \beta_2 |1\rangle_2) \\ &= c_{00} |00\rangle + c_{01} |01\rangle + c_{10} |10\rangle + c_{11} |11\rangle \end{aligned} \quad (10)$$

tenendo conto della condizione di normalizzazione e dell'arbitrarietà della fase globale, abbiamo che lo stato precedente è determinato da sei parametri reali. Più in generale lo stato di un computer quantistico ad N qubit è determinato da $2(2^N - 1)$ parametri reali. Osserviamo che lo stato di un computer classico ad N bit è invece determinato da N parametri che possono assumere solo i valori 0 o 1.

Un sistema di spin interagenti tra di loro e con un campo magnetico esterno può dunque costituire una possibile realizzazione pratica di un computer quantistico.

La tesi sarà organizzata nel modo seguente. Nel primo capitolo si studierà il sistema definito dalla (1) ricavandone autovalori ed autostati dell'energia. Abbiamo preso spunto dal fondamentale lavoro di Lieb, Schultz e Mattis e più nello specifico da vari articoli di Dziarmaga. Nel secondo capitolo si studierà un sistema analogo, ma con campo magnetico dipendente dal tempo. Nel terzo capitolo abbiamo introdotto il teorema adiabatico e l'approssimazione adiabatica ed impulsiva. Nel quarto capitolo abbiamo studiato un sistema con campo magnetico oscillante; nello specifico abbiamo applicato l'approssimazione adiabatica-impulsiva e confrontato i risultati con quelli ottenuti mediante simulazione numerica.

Capitolo 1

Modello di Ising in campo trasverso

L'Hamiltoniana relativa ad una catena di N spin che definisce il sistema che studieremo è:

$$H = -J \sum_{i=1}^N [g\sigma_i^z + \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x] \quad (1.1)$$

$$\vec{\sigma}_{N+1} = \vec{\sigma}_1 \quad (1.2)$$

dove J è una costante dimensionale e g una costante adimensionale. Si vede che l'Hamiltoniana è costituita da due termini: uno di interazione tra le componenti lungo l'asse x degli spin primi vicini ed uno di interazione tra la componente lungo z di ciascuno spin ed un campo esterno. Notiamo esplicitamente che, in virtù delle regole di commutazione delle matrici di Pauli, questi due termini non commutano e pertanto, in generale, le energie relative a ciascun termine non saranno separatamente conservate. Abbiamo inoltre scelto condizioni di raccordo periodiche.

La hamiltoniana in (1.1) è stata oggetto di numerosi studi; la procedura che seguiremo per ricavarne lo spettro è essenzialmente ispirata a [1], [2] e [3]. Definiamo ora i seguenti operatori:

$$a_i^\dagger = \frac{\sigma_i^x + i\sigma_i^y}{2} \quad (1.3a)$$

$$a_i = \frac{\sigma_i^x - i\sigma_i^y}{2} \quad (1.3b)$$

Invertendo le quali si ottiene:

$$\sigma_i^x = a_i^\dagger + a_i \quad (1.4a)$$

$$\sigma_i^y = \frac{a_i^\dagger - a_i}{i} \quad (1.4b)$$

$$\begin{aligned} a_i^\dagger a_i &= \frac{1}{4}(\sigma_i^x + i\sigma_i^y)(\sigma_i^x - i\sigma_i^y) \\ &= \frac{1}{4}((\sigma_i^x)^2 + (\sigma_i^y)^2 + i[\sigma_i^y, \sigma_i^x]) \\ &= \frac{1}{4}(2 - i[\sigma_i^x, \sigma_i^y]) \\ &= \frac{1}{4}(2 + 2\sigma_i^z) \\ &\Rightarrow \sigma_i^z = 1 - 2a_i^\dagger a_i \end{aligned} \quad (1.4c)$$

Si può inoltre verificare che:

$$\{a_i, a_i^\dagger\} = 1 \quad (1.5a)$$

$$\{a_i, a_i\} = \{a_i^\dagger, a_i^\dagger\} = 0 \quad (1.5b)$$

$$[a_i, a_j^\dagger] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = [a_i, a_j] = 0 \quad , \quad \text{per } i \neq j \quad (1.5c)$$

$$a_{N+1}^\dagger = a_1^\dagger \quad (1.5d)$$

$$a_{N+1} = a_1 \quad (1.5e)$$

Notiamo che gli operatori definiti in (1.3a) ed in (1.3b) soddisfano regole di anticommutazione di tipo fermionico solo *localmente*, cioè quando si prendono in considerazione operatori riferiti allo stesso sito della catena. Riscriviamo ora l'Hamiltoniana in funzione degli operatori definiti in (1.3a) ed in (1.3b):

$$\begin{aligned} H &= -J \sum_{i=1}^N \left[g \left(1 - 2a_i^\dagger a_i \right) + a_i^\dagger a_{i+1}^\dagger + a_i^\dagger a_{i+1} + a_i a_{i+1}^\dagger + a_i a_{i+1} \right] \\ &= J \sum_{i=1}^N \left[2ga_i^\dagger a_i - a_i^\dagger a_{i+1}^\dagger - a_i^\dagger a_{i+1} - a_i a_{i+1}^\dagger - a_i a_{i+1} \right] - JgN. \end{aligned} \quad (1.6)$$

1.1 Trasformazione di Jordan-Wigner

Come abbiamo già visto, gli operatori definiti in (1.3a) ed in (1.3b) soddisfano le regole di anticommutazione fermioniche solo localmente. La trasformazione di *Jordan-Wigner* definisce nuovi operatori che, a partire da questi ultimi, come vedremo, soddisfano le regole di anti-commutazione fermioniche anche *globalmente*, cioè anche quando si prendono in considerazione operatori associati a siti differenti della catena. Definiamo:

$$c_i = e^{\pi i \sum_{j=1}^{i-1} a_j^\dagger a_j} a_i \quad (1.7a)$$

$$c_i^\dagger = a_i^\dagger e^{-\pi i \sum_{j=1}^{i-1} a_j^\dagger a_j} \quad (1.7b)$$

Da cui si ha immediatamente che $c_i^\dagger c_i = a_i^\dagger a_i$: cioè $a_i^\dagger a_i$ è pari all'operatore numero di fermioni definiti dalle (1.7a) e (1.7b) sul sito i -esimo. Osserviamo che:

$$e^{-\pi i \sum_{j=1}^{i-1} a_j^\dagger a_j} = e^{-i\pi N_F^{(i)}} = (-1)^{N_F^{(i)}} \quad (1.8)$$

dove $N_F^{(i)}$ è il numero totale di fermioni presenti prima del sito i -esimo. L'azione della trasformazione è pertanto evidente: all'operatore a_1 viene sostituito l'operatore $c_1 = a_1$, all'operatore a_i , con $i > 1$ viene sostituito l'operatore $c_i = \pm a_i$, con il segno più se il numero di fermioni presenti *prima* del sito i -esimo è pari, con il segno meno altrimenti.

La costruzione di un operatore *globalmente* fermionico sul sito i -esimo richiede dunque la conoscenza di informazioni non locali, relative ad altri siti della catena. In particolare quello che è cruciale per la definizione della trasformazione è l'esistenza di ordinamento tra i siti della catena, che permetta di contare il numero di fermioni presenti *prima* di un sito; in sistemi unidimensionali con accoppiamento a primi vicini esiste un ordinamento naturale. Invertiamo le (1.7a) e (1.7b):

$$a_i = e^{-\pi i \sum_{j=1}^{i-1} c_j^\dagger c_j} c_i \quad (1.9a)$$

$$a_i^\dagger = c_i^\dagger e^{\pi i \sum_{j=1}^{i-1} a_j^\dagger a_j} \quad (1.9b)$$

Notiamo che $a_j^\dagger a_j = (a_j^\dagger a_j)^2 = (c_j^\dagger c_j)^2 = c_j^\dagger c_j$ e che gli operatori $c_j^\dagger c_j$ definiti su siti diversi commutano, pertanto:

$$\begin{aligned}
e^{-\pi i \sum_{j=1}^{i-1} c_j^\dagger c_j} &= \prod_{j<i} e^{-\pi i c_j^\dagger c_j} \\
&= \prod_{j<i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\pi i c_j^\dagger c_j)^k}{k!} \\
&= \prod_{j<i} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\pi i)^k}{k!} c_j^\dagger c_j + 1 \right) \\
&= \prod_{j<i} \left[\left(-1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\pi i)^k}{k!} \right) c_j^\dagger c_j + 1 \right] \\
&= \prod_{j<i} \left[(-1 + \cosh(-i\pi) + \sinh(-i\pi)) c_j^\dagger c_j + 1 \right] \\
&= \prod_{j<i} (1 - 2c_j^\dagger c_j)
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Quindi:

$$a_i = \prod_{j<i} (1 - 2c_j^\dagger c_j) c_i \tag{1.11a}$$

$$a_i^\dagger = c_i^\dagger \prod_{j<i} (1 - 2c_j^\dagger c_j) \tag{1.11b}$$

$$c_i = \prod_{j<i} (1 - 2a_j^\dagger a_j) a_i \tag{1.11c}$$

$$c_i^\dagger = a_i^\dagger \prod_{j<i} (1 - 2a_j^\dagger a_j) \tag{1.11d}$$

Resta da mostrare che gli operatori definiti da (1.7a) e (1.7b) soddisfanno le regole di anti-commutazione fermioniche; notiamo preliminarmente che $[a_i, a_j^\dagger a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger a_j] = 0$ per $i \neq j$. Perciò:

$$\begin{aligned}
\{c_i, c_i^\dagger\} &= c_i c_i^\dagger + c_i^\dagger c_i \\
&= \left[e^{\pi i \sum_{j=1}^{i-1} a_j^\dagger a_j} a_i \right] \left[a_i^\dagger e^{-\pi i \sum_{j=1}^{i-1} a_j^\dagger a_j} \right] + \left[a_i^\dagger e^{-\pi i \sum_{j=1}^{i-1} a_j^\dagger a_j} \right] \left[e^{\pi i \sum_{j=1}^{i-1} a_j^\dagger a_j} a_i \right] \\
&= a_i a_i^\dagger + a_i^\dagger a_i = 1
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Analogamente:

$$\{c_i, c_i\} = \{c_i^\dagger, c_i^\dagger\} = 0 \quad (1.13)$$

Inoltre per $i \neq j$, supponendo ad esempio che $j < i$:

$$\begin{aligned} \{c_i, c_j^\dagger\} &= c_i c_j^\dagger + c_j^\dagger c_i \\ &= \left[e^{\pi i \sum_{l=1}^{i-1} a_l^\dagger a_l} a_i \right] \left[a_j^\dagger e^{-\pi i \sum_{m=1}^{j-1} a_m^\dagger a_m} \right] + \left[a_j^\dagger e^{-\pi i \sum_{m=1}^{j-1} a_m^\dagger a_m} \right] \left[e^{\pi i \sum_{l=1}^{i-1} a_l^\dagger a_l} a_i \right] \\ &= a_i e^{\pi i \sum_{l=1}^{i-1} a_l^\dagger a_l} e^{-\pi i \sum_{m=1}^{j-1} a_m^\dagger a_m} a_j^\dagger + a_j^\dagger e^{-\pi i \sum_{k=i}^{j-1} a_k^\dagger a_k} a_i \\ &= a_i e^{-\pi i \sum_{k=i}^{j-1} a_k^\dagger a_k} a_j^\dagger + a_j^\dagger e^{-\pi i \sum_{k=i}^{j-1} a_k^\dagger a_k} a_i \\ &= a_i e^{-\pi i a_i^\dagger a_i} e^{-\pi i \sum_{k=i+1}^{j-1} a_k^\dagger a_k} a_j^\dagger + (\dots) \\ &= -e^{-\pi i a_i^\dagger a_i} e^{-\pi i \sum_{k=i+1}^{j-1} a_k^\dagger a_k} a_i a_j^\dagger + (\dots) = 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

dove si è fatto uso della

$$\begin{aligned} \{a_i, e^{-\pi i a_i^\dagger a_i}\} &= \{a_i, 1 - 2a_i^\dagger a_i\} = a_i (1 - 2a_i^\dagger a_i) + (1 - 2a_i^\dagger a_i) a_i \\ &= a_i - 2a_i a_i^\dagger a_i + a_i - 2a_i^\dagger a_i a_i = 2a_i - 2a_i a_i^\dagger a_i = 2a_i (1 - a_i^\dagger a_i) \\ &= 2a_i (1 - 1 + a_i a_i^\dagger) = 2a_i a_i a_i^\dagger = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Analogamente si mostra che sempre per $i \neq j$, supponendo sempre che $j < i$:

$$\{c_i, c_j\} = \{c_i^\dagger, c_j^\dagger\} = 0. \quad (1.16)$$

Mettiamo esplicitamente in evidenza che, per via delle condizioni al contorno in (1.5) e della condizione $i < j$ in (1.14) e (1.16), le regole di anti-commutazione che verranno ricavate in seguito *non* valgono per $i = N$ oppure $j = N$.

Riscriviamo adesso la (1.6) in termini degli operatori definiti dalle (1.7a) e (1.7b). Procediamo con il calcolo dei termini coinvolti supponendo inizialmente $i < N$, notando che $(1 - 2c_j^\dagger c_j)^2 = 1$ e che $\left[(1 - 2c_j^\dagger c_j), (1 - 2c_i^\dagger c_i) \right] = 0$ per

$i \neq j$:

$$\begin{aligned}
a_i^\dagger a_{i+1} &= c_i^\dagger \prod_{j<i} (1 - 2c_j^\dagger c_j) \prod_{k<i+1} (1 - 2c_k^\dagger c_k) c_{i+1} \\
&= c_i^\dagger \prod_{j<i} (1 - 2c_j^\dagger c_j)^2 (1 - 2c_i^\dagger c_i) c_{i+1} \\
&= c_i^\dagger (1 - 2c_i^\dagger c_i) c_{i+1} \\
&= c_i^\dagger c_{i+1}
\end{aligned} \tag{1.17a}$$

$$\begin{aligned}
a_i a_{i+1} &= \prod_{j<i} (1 - 2c_j^\dagger c_j) c_i \prod_{k<i+1} (1 - 2c_k^\dagger c_k) c_{i+1} \\
&= c_i \prod_{j<i} (1 - 2c_j^\dagger c_j) \prod_{k<i+1} (1 - 2c_k^\dagger c_k) c_{i+1} \\
&= c_i (1 - 2c_i^\dagger c_i) c_{i+1} \\
&= -c_i c_{i+1}
\end{aligned} \tag{1.17b}$$

$$a_i a_{i+1}^\dagger = a_{i+1}^\dagger a_i = (a_i^\dagger a_{i+1})^\dagger = (c_i^\dagger c_{i+1})^\dagger = c_{i+1}^\dagger c_i = -c_i c_{i+1}^\dagger \tag{1.17c}$$

$$a_i^\dagger a_{i+1}^\dagger = a_{i+1}^\dagger a_i^\dagger = (a_i a_{i+1})^\dagger = -(c_i c_{i+1})^\dagger = -c_{i+1}^\dagger c_i^\dagger = c_i^\dagger c_{i+1}^\dagger \tag{1.17d}$$

Calcoliamo adesso i termini di bordo con $i = N$; teniamo presente che:

$$\begin{aligned}
(1 - 2c_1^\dagger c_1) c_1 &= c_1 - 2c_1^\dagger c_1 c_1 = c_1 - 2(1 - c_1 c_1^\dagger) c_1 = c_1 - 2c_1 + 2c_1 c_1^\dagger c_1 \\
&= -c_1 + 2c_1 c_1^\dagger c_1 = -c_1 (1 - 2c_1^\dagger c_1)
\end{aligned} \tag{1.18}$$

quindi si ha:

$$\begin{aligned}
a_N^\dagger a_{N+1} &= a_N^\dagger a_1 = c_N^\dagger \prod_{j<N} (1 - 2c_j^\dagger c_j) c_1 = c_N^\dagger (1 - 2c_1^\dagger c_1)^2 \prod_{j<N} (1 - 2c_j^\dagger c_j) c_1 \\
&= c_N^\dagger (1 - 2c_1^\dagger c_1) \prod_{j<N} (1 - 2c_j^\dagger c_j) (1 - 2c_1^\dagger c_1) c_1 \\
&= c_N^\dagger (1 - 2c_1^\dagger c_1) \prod_{j<N} (1 - 2c_j^\dagger c_j) (1 - 2c_N^\dagger c_N) c_1 \\
&= c_N^\dagger (1 - 2c_1^\dagger c_1) \prod_{j<N+1} (1 - 2c_j^\dagger c_j) c_1 \\
&= c_N^\dagger (1 - 2c_1^\dagger c_1) c_1 \prod_{j=2}^N (1 - 2c_j^\dagger c_j) = -c_N^\dagger c_1 \prod_{j<N+1} (1 - 2c_j^\dagger c_j) \\
&= -c_N^\dagger c_1 (-1)^{N_F}
\end{aligned} \tag{1.19a}$$

$$\begin{aligned}
a_N a_{N+1} &= a_N a_1 = \prod_{j<N} (1 - 2c_j^\dagger c_j) c_N c_1 = \prod_{j<N} (1 - 2c_j^\dagger c_j) (1 - 2c_1^\dagger c_1)^2 c_N c_1 \\
&= \prod_{j<N} (1 - 2c_j^\dagger c_j) (1 - 2c_N^\dagger c_N)^2 c_N c_1 \\
&= \prod_{j<N+1} (1 - 2c_j^\dagger c_j) (1 - 2c_N^\dagger c_N) c_N c_1 = \prod_{j<N+1} (1 - 2c_j^\dagger c_j) c_N c_1 \\
&= c_N c_1 (-1)^{N_F}
\end{aligned} \tag{1.19b}$$

$$\begin{aligned}
a_N a_{N+1}^\dagger &= a_N a_1^\dagger = a_1^\dagger a_N = (a_N^\dagger a_1)^\dagger = (-c_N^\dagger c_1)^\dagger (-1)^{N_F} = -c_1^\dagger c_N (-1)^{N_F} \\
&= c_N c_1^\dagger (-1)^{N_F}
\end{aligned} \tag{1.19c}$$

$$\begin{aligned}
a_N^\dagger a_{N+1}^\dagger &= a_N^\dagger a_1^\dagger = a_1^\dagger a_N^\dagger = (a_N a_1)^\dagger = (c_N c_1)^\dagger (-1)^{N_F} = c_1^\dagger c_N^\dagger (-1)^{N_F} \\
&= -c_N^\dagger c_1^\dagger (-1)^{N_F}
\end{aligned} \tag{1.19d}$$

Sostituendo infine nella (1.6) si ottiene:

$$H = J \sum_{i=1}^N 2g c_i^\dagger c_i - J \sum_{i=1}^{N-1} \left[c_i^\dagger c_{i+1}^\dagger + c_i^\dagger c_{i+1} - c_i c_{i+1}^\dagger - c_i c_{i+1} \right] \\ + J (-1)^{N_F} \left[c_N^\dagger c_1^\dagger + c_N^\dagger c_1 - c_N c_1^\dagger - c_N c_1 \right] - JgN. \quad (1.20)$$

Definiamo ora i seguenti operatori, detti di *parità*:

$$P^\pm = \frac{1}{2} \left[1 \pm e^{-\pi i \sum_{j=1}^{i-1} c_j^\dagger c_j} \right] = \frac{1}{2} \left[1 \pm (-1)^{N_F} \right] \quad (1.21)$$

si vede che P^+ vale +1 se N_F è pari, mentre vale 0 se N_F è dispari; viceversa P^- vale 0 se N_F è pari, mentre vale +1 se N_F è dispari. Si può dimostrare che $[H, P^\pm] = 0$, e quindi che sia la parità sia $(-1)^{N_F}$ sono quantità conservate. Osserviamo che per ogni valore di g il ground state del sistema ha parità positiva ([4], [5]) e riscriviamo la (1.20); a questo scopo definiamo:

$$c_{N+1} = -c_1 \quad (1.22a)$$

$$c_{N+1}^\dagger = -c_1^\dagger \quad (1.22b)$$

scegliamo cioè condizioni al contorno *anti-periodiche* per gli operatori fermionici. Sostituendo in (1.20) e ricordando che N_F è pari otteniamo:

$$H = J \sum_{i=1}^N \left[2g c_i^\dagger c_i - c_i^\dagger c_{i+1}^\dagger - c_i^\dagger c_{i+1} + c_i c_{i+1}^\dagger + c_i c_{i+1} \right] - JgN. \quad (1.23)$$

1.2 Trasformata di Fourier discreta

Introdurremo adesso la trasformata di Fourier discreta degli operatori definiti da (1.7a) e da (1.7b):

$$\tilde{c}_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{ikr_j} c_j^\dagger \quad (1.24)$$

con

$$k = \frac{2\pi}{Na} \left(n_k + \frac{1}{2} \right) \quad (1.25a)$$

$$r_j = aj \quad (1.25b)$$

dove n_k può assumere i valori $0, 1, \dots, N-1$ e con a pari alla distanza tra due siti della catena unidimensionale. Mostriamo che la (1.24) può essere invertita nel seguente modo:

$$c_j^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k \in BZ} e^{-ikr_j} \tilde{c}_k^\dagger \quad (1.26)$$

dove con la scrittura $k \in BZ$ intendiamo che k è della forma (1.25a) e che la somma è sull'indice $n_k = 0, 1, \dots, N-1$. Mostriamo che la formula d'inversione è corretta:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_k^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{ikr_j} c_j^\dagger \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{ikr_j} \sum_{m \in BZ} e^{-imr_j} \tilde{c}_m^\dagger \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m \in BZ} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i(m-k)r_j} \tilde{c}_m^\dagger \end{aligned} \quad (1.27)$$

Valutiamo adesso separatamente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i(m-k)r_j} &= \frac{1}{N} \frac{1}{1 - e^{-i(m-k)a}} (1 - e^{-i(m-k)aN}) \\ &= \frac{1}{N} \frac{1}{1 - e^{-\frac{i2\pi}{N}(n_m - n_k)}} (1 - e^{-i2\pi(n_m - n_k)}) \end{aligned} \quad (1.28)$$

poiché $(n_m - n_k)$ è un numero intero, tutti i termini della somma sono nulli, tranne quelli per cui anche $\frac{1}{N}(n_m - n_k)$ è intero. Poiché n_k e n_m sono interi compresi tra 0 e $N-1$, questo può avvenire solo quando $n_k = n_m$, e cioè quando $k = m$. Pertanto:

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i(m-k)r_j} = \delta_{k,m} \quad (1.29)$$

cosicché:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_k^\dagger &= \frac{1}{N} \sum_{m \in BZ} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i(m-k)r_j} \tilde{c}_m^\dagger \\ &= \sum_{m \in BZ} \delta_{k,m} \tilde{c}_m^\dagger = \tilde{c}_k^\dagger \end{aligned} \quad (1.30)$$

Considero adesso la seguente espressione:

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i(m+k)r_j} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i2\pi \frac{j}{N}(n_m+n_k+1)} \quad (1.31)$$

adesso definisco $n_{k'} = N - n_k - 1$ che può assumere i valori interi $0, \dots, N - 1$; la precedente diventa quindi:

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i2\pi \frac{j}{N}(n_m+N-n_{k'})} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i2\pi \frac{j}{N}(n_m-n_{k'})} \quad (1.32)$$

Tenendo presente le considerazioni che ci hanno condotto alla (1.29), abbiamo che la precedente è sempre nulla tranne che per $n_{k'} = n_m$, cioè $n_k = N - n_m - 1$, nel qual caso vale 1. Pertanto la precedente è nulla per tutti i k tranne che per:

$$\begin{aligned} k &= \frac{2\pi}{Na} \left(n_k + \frac{1}{2} \right) = \frac{2\pi}{Na} \left(N - n_m - 1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{2\pi}{Na} \left(N - n_m - \frac{1}{2} \right) \\ &= -\frac{2\pi}{Na} \left(n_m + \frac{1}{2} \right) + \frac{2\pi}{a} = -m + \frac{2\pi}{a} \\ &= -\frac{2\pi}{Na} \left(n_{k'} + \frac{1}{2} \right) + \frac{2\pi}{a} \end{aligned} \quad (1.33)$$

Quando k fa parte di una fase che contenga $r_j = ja$ possiamo a tutti gli effetti ignorare il termine $\frac{2\pi}{a}$, pertanto scriveremo:

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i(m+k)r_j} = \delta_{m,-k} \quad (1.34)$$

tenendo presente che $-k$ è definito secondo:

$$-k = \frac{2\pi}{Na} \left(n_{k'} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.35)$$

con $n_{k'} = N - n_k - 1$ ed $n_k = 0, \dots, N - 1$. Verifichiamo che la definizione data nella (1.24) della trasformata di Fourier soddisfi le condizioni al contorno (1.22b):

$$\begin{aligned} c_{j+N}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k \in BZ} e^{-ikr_{j+N}} \tilde{c}_j^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k \in BZ} e^{-ik(j+N)a} \tilde{c}_j^\dagger \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k \in BZ} e^{-ikr_j} e^{-ikNa} \tilde{c}_j^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k \in BZ} e^{-ikr_j} e^{-i\frac{2\pi}{Na}(n_k+\frac{1}{2})Na} \tilde{c}_j^\dagger \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k \in BZ} e^{-ikr_j} e^{-i2\pi n_k} e^{-i\pi} \tilde{c}_j^\dagger = -c_j^\dagger \end{aligned} \quad (1.36)$$

Mostriamo adesso che gli operatori definiti dalla (1.24) soddisfano regole di anti-commutazione analoghe alle (1.12), (1.13), (1.14) e (1.16).

$$\begin{aligned}
\{\tilde{c}_k, \tilde{c}_{k'}^\dagger\} &= \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^{N-1} e^{-ikr_j} e^{ik'r_i} \{c_j, c_i^\dagger\} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^{N-1} e^{-ikr_j} e^{ik'r_i} \delta_{i,j} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} e^{-i(k-k')r_j} = \delta_{k,k'}
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Analogamente si mostra che:

$$\{\tilde{c}_k^\dagger, \tilde{c}_{k'}^\dagger\} = \{\tilde{c}_k, \tilde{c}_{k'}\} = 0 \tag{1.38}$$

Utilizzando la (1.26) riscriviamo ora i singoli termini della (1.20); si noti che gli N siti della catena unidimensionale definita nella (1.1) sono stati numerati a partire da 1 fino ad N , mentre nella (1.24) l'indice di somma sui siti è $j = 0, \dots, N-1$; per rendere compatibili queste due differenti indicizzazioni dei siti è sufficiente riscrivere la (1.25b) come $r_j = a(j-1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N c_i^\dagger c_i &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{l,m \in BZ} e^{-ilr_i} e^{imr_i} \tilde{c}_l^\dagger \tilde{c}_m \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{l,m \in BZ} e^{-i(m-l)r_i} \tilde{c}_l^\dagger \tilde{c}_m \\
&= \sum_{k \in BZ} \tilde{c}_k^\dagger \tilde{c}_k
\end{aligned} \tag{1.39a}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N c_i^\dagger c_{i+1} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{l,m \in BZ} e^{-ilr_i} e^{imr_{i+1}} \tilde{c}_l^\dagger \tilde{c}_m \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{l,m \in BZ} e^{ima} e^{-i(m-l)r_i} \tilde{c}_l^\dagger \tilde{c}_m \\
&= \sum_{k \in BZ} e^{ika} \tilde{c}_k^\dagger \tilde{c}_k
\end{aligned} \tag{1.39b}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N c_i c_{i+1}^\dagger &= - \left(\sum_{i=1}^N c_i^\dagger c_{i+1} \right)^\dagger \\
&= - \left(\sum_{k \in BZ} e^{ika} \tilde{c}_k^\dagger \tilde{c}_k \right)^\dagger \\
&= - \sum_{k \in BZ} e^{-ika} \tilde{c}_k \tilde{c}_k^\dagger \\
&= - \sum_{k \in BZ} e^{-ika} (1 - \tilde{c}_k^\dagger \tilde{c}_k) \\
&= - \sum_{k \in BZ} e^{-ika} + \sum_{k \in BZ} e^{-ika} \tilde{c}_k^\dagger \tilde{c}_k \\
&= \sum_{k|inBZ} e^{-ika} \tilde{c}_k^\dagger \tilde{c}_k
\end{aligned} \tag{1.39c}$$

dove si è usato che $\sum_{k \in BZ} e^{-ika} = 0$ per via dell'insieme in cui varia ka ; inoltre abbiamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N c_i^\dagger c_{i+1}^\dagger &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{l,m \in BZ} e^{-ilr_i} e^{-imr_{i+1}} \tilde{c}_l^\dagger \tilde{c}_m^\dagger \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{l,m \in BZ} e^{ima} e^{-i(m+l)r_i} \tilde{c}_l^\dagger \tilde{c}_m^\dagger \\
&= \sum_{k \in BZ} e^{ika} \tilde{c}_k^\dagger \tilde{c}_{-k}^\dagger \\
&= \sum_{k \in BZ} (\cos(ka) + i \sin ka) \tilde{c}_k^\dagger \tilde{c}_{-k}^\dagger
\end{aligned} \tag{1.39d}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N c_i c_{i+1} &= - \left(\sum_{i=1}^N c_i^\dagger c_{i+1}^\dagger \right)^\dagger \\
&= - \left(\sum_{k \in BZ} e^{ika} \tilde{c}_k^\dagger \tilde{c}_{-k}^\dagger \right)^\dagger \\
&= \sum_{k \in BZ} e^{-ika} \tilde{c}_k \tilde{c}_{-k} \\
&= \sum_{k \in BZ} (\cos ka - i \sin ka) \tilde{c}_k \tilde{c}_{-k}
\end{aligned} \tag{1.39e}$$

Sottraendo la (1.39b) da (1.39c) si ottiene:

$$\sum_{i=1}^N \left(c_i c_{i+1}^\dagger - c_i^\dagger c_{i+1} \right) = \sum_{k \in BZ} \left(e^{-ika} - e^{ika} \right) \tilde{c}_k^\dagger \tilde{c}_k = -2 \sum_{k \in BZ} \sin ka \tilde{c}_k^\dagger \tilde{c}_k \quad (1.40)$$

Calcoliamo adesso:

$$\sum_{k \in BZ} \cos ka \tilde{c}_k^\dagger \tilde{c}_{-k}^\dagger = \sum_{\substack{k \in BZ \\ n_k < N/2}} \cos ka \tilde{c}_k^\dagger \tilde{c}_{-k}^\dagger + \sum_{\substack{k \in BZ \\ n_k > N/2}} \cos ka \tilde{c}_k^\dagger \tilde{c}_{-k}^\dagger \quad (1.41)$$

dove la sommatoria è stata divisa in due parti; possiamo ottenere i termini della seconda sommatoria sostituendo $n_k < N/2$ al vincolo $n_k > N/2$ e $n_k + N/2$ a n_k ; effettuando le sostituzioni:

$$ka = \frac{2\pi}{N} \left(n_k + \frac{1}{2} \right) \rightarrow \frac{2\pi}{N} \left(n_k + \frac{N}{2} + \frac{1}{2} \right) = ka + \pi \quad (1.42a)$$

$$\tilde{c}_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{ikr_j} c_j^\dagger \rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i(k+\frac{\pi}{a})r_j} c_j^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{ikr_j} e^{i\frac{\pi}{a}ja} c_j^\dagger = -\tilde{c}_k^\dagger \quad (1.42b)$$

$$\tilde{c}_{-k}^\dagger \rightarrow -\tilde{c}_{-k}^\dagger \quad (1.42c)$$

si ha:

$$\sum_{\substack{k \in BZ \\ n_k < N/2}} \cos ka \tilde{c}_k^\dagger \tilde{c}_{-k}^\dagger + \sum_{\substack{k \in BZ \\ n_k < N/2}} \cos (ka + \pi) \tilde{c}_k^\dagger \tilde{c}_{-k}^\dagger = \sum_{\substack{k \in BZ \\ n_k < N/2}} \cos ka \tilde{c}_k^\dagger \tilde{c}_{-k}^\dagger - \cos ka \tilde{c}_k^\dagger \tilde{c}_{-k}^\dagger = 0 \quad (1.43)$$

Pertanto le (1.39d) e (1.39e) diventano:

$$\sum_{i=1}^N c_i^\dagger c_{i+1}^\dagger = i \sum_{k \in BZ} \sin ka \tilde{c}_k^\dagger \tilde{c}_{-k}^\dagger \quad (1.44)$$

$$\sum_{i=1}^N c_i c_{i+1} = -i \sum_{k \in BZ} \sin ka \tilde{c}_k \tilde{c}_{-k} \quad (1.45)$$

Sostituendo infine le (1.39a), (1.39d), (1.39d), (1.39e) in (1.23) si ha:

$$H = J \sum_{k \in BZ} \left[2(g - \cos ka) c_k^\dagger c_k - i \sin ka \left(c_k^\dagger c_{-k}^\dagger + c_k c_{-k} \right) \right] - JgN \quad (1.46)$$

1.3 Trasformazione di Bogoliubov

Definisco i seguenti operatori:

$$\gamma_k = a_k^* c_k + b_k^* c_{-k}^\dagger \quad (1.47a)$$

$$\gamma_k^\dagger = a_k c_k^\dagger + b_k c_{-k} \quad (1.47b)$$

$$\gamma_{-k} = a_{-k}^* c_{-k} + b_{-k}^* c_k^\dagger \quad (1.47c)$$

$$\gamma_{-k}^\dagger = a_{-k} c_{-k}^\dagger + b_{-k} c_k \quad (1.47d)$$

con a_k e b_k funzioni di k da determinare. Imponiamo che gli operatori appena definiti siano dei fermioni:

$$\begin{aligned} \{\gamma_k, \gamma_{k'}^\dagger\} &= \gamma_k \gamma_{k'}^\dagger + \gamma_{k'}^\dagger \gamma_k \\ &= a_k^* a_{k'} \{c_k, c_{k'}^\dagger\} + a_k^* b_{k'} \{c_k, c_{-k'}\} + b_k^* a_{k'} \{c_{-k}^\dagger, c_{k'}^\dagger\} + b_k^* b_{k'} \{c_{-k}^\dagger, c_{-k'}\} \\ &= \delta_{k,k'} (a_k^* a_{k'} + b_k^* b_{k'}) = \delta_{k,k'} \Rightarrow |a_k|^2 + |b_k|^2 = 1 \end{aligned} \quad (1.48a)$$

$$\begin{aligned} \{\gamma_k^\dagger, \gamma_{k'}^\dagger\} &= \gamma_k^\dagger \gamma_{k'}^\dagger + \gamma_{k'}^\dagger \gamma_k^\dagger \\ &= a_k a_{k'} \{c_k^\dagger, c_{k'}^\dagger\} + a_k b_{k'} \{c_k^\dagger, c_{-k'}\} + b_k a_{k'} \{c_{-k}, c_{k'}^\dagger\} + b_k b_{k'} \{c_{-k}, c_{-k'}\} \\ &= \delta_{k,k'} (a_{-k} b_{k'} + b_{-k} a_{k'}) = 0 \Rightarrow (a_{-k} b_k + b_{-k} a_k) = 0 \end{aligned} \quad (1.48b)$$

in particolare la seconda significa che se a_k dovesse essere una funzione pari di k , b_k dovrà esserne una funzione dispari, o viceversa. Non si ricavano altre informazioni imponendo $\{\gamma_k, \gamma_{k'}\} = 0$. Supponiamo ora di invertire le (1.47a), (1.47b), (1.47c), (1.47d) nel seguente modo:

$$c_k = a_k \gamma_k + b_k \gamma_{-k}^\dagger \quad (1.49a)$$

$$c_k^\dagger = a_k^* \gamma_k^\dagger + b_k^* \gamma_{-k} \quad (1.49b)$$

$$c_{-k} = a_{-k} \gamma_{-k} + b_{-k} \gamma_k^\dagger \quad (1.49c)$$

$$c_{-k}^\dagger = a_{-k}^* \gamma_{-k}^\dagger + b_{-k}^* \gamma_k \quad (1.49d)$$

ricaviamo le condizioni da imporre affinché tali formule siano valide:

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= a_k^* c_k + b_k^* c_{-k}^\dagger \\
&= a_k^* (a_k \gamma_k + b_k \gamma_{-k}^\dagger) + b_k^* (a_{-k}^* \gamma_{-k}^\dagger + b_{-k}^* \gamma_k) \\
&= |a_k|^2 \gamma_k + a_k^* b_k \gamma_{-k}^\dagger + b_k^* a_{-k} \gamma_{-k}^\dagger + b_k^* b_{-k}^* \gamma_k = \gamma_k \\
&\Rightarrow |a_k|^2 + b_k^* b_{-k}^* = 1 \quad , \quad a_k^* b_k + a_{-k}^* b_{-k} = 0 \\
&\Rightarrow b_{-k}^* = b_k \quad , \quad a_k^* b_k + b_{-k} a_{-k}^* = 0
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Tenendo presente anche le precedenti condizioni ricavate su a_k e b_k , si vede che vi è una certa libertà nella scelta sia della parità, sia delle parti reali ed immaginarie di queste funzioni. Ad esempio, se scegliamo a_k reale e pari, b_k sarà immaginaria pura e dispari.

Imponiamo adesso che l'hamiltoniana sia diagonale nei nuovi operatori:

$$H = \sum_{k \in BZ} \epsilon_k \gamma_k^\dagger \gamma_k + const. \tag{1.51}$$

Per determinare gli operatori γ_k che rendono possibile la scrittura della (1.46) nella forma della precedente calcoleremo la quantità $[H, \gamma_k^\dagger]$ in due modi diversi, uguagliando poi i risultati ottenuti; il calcolo del commutatore presenta anche il vantaggio di eliminare la costante presente nella precedente e di permettere quindi di rinviarne il calcolo. Prima di procedere abbiamo bisogno di ricavare alcuni risultati preliminari:

$$\begin{aligned}
[c_l^\dagger c_l, c_k^\dagger] &= c_l^\dagger c_l c_k^\dagger - c_k^\dagger c_l^\dagger c_l \\
&= c_l^\dagger c_l c_k^\dagger - c_k^\dagger c_l^\dagger c_l \\
&= c_l^\dagger (\delta_{k,l} - c_k^\dagger c_l) - c_k^\dagger c_l^\dagger c_l \\
&= c_l^\dagger \delta_{k,l} + c_k^\dagger c_l^\dagger c_l - c_k^\dagger c_l^\dagger c_l \\
&= c_l^\dagger \delta_{k,l}
\end{aligned} \tag{1.52a}$$

$$[c_l^\dagger c_{-l}^\dagger, c_k^\dagger] = c_l^\dagger c_{-l}^\dagger c_k^\dagger - c_k^\dagger c_l^\dagger c_{-l}^\dagger = 0 \tag{1.52b}$$

$$\begin{aligned}
\left[c_l c_{-l}, c_k^\dagger \right] &= c_l c_{-l} c_k^\dagger - c_k^\dagger c_l c_{-l} \\
&= c_l \left(\delta_{k,-l} - c_k^\dagger c_{-l} \right) - c_k^\dagger c_l c_{-l} \\
&= c_l \delta_{k,-l} - c_l c_k^\dagger c_{-l} - c_k^\dagger c_l c_{-l} \\
&= c_l \delta_{k,-l} - \left(\delta_{k,l} - c_k^\dagger c_l \right) c_{-l} - c_k^\dagger c_l c_{-l} \\
&= c_l \delta_{k,-l} - c_{-l} \delta_{k,l}
\end{aligned} \tag{1.52c}$$

In maniera del tutto analoga è possibile mostrare che:

$$\left[c_l^\dagger c_l, c_{-k} \right] = -c_{-k} \delta_{k,-l} \tag{1.52d}$$

$$\left[c_l^\dagger c_{-l}^\dagger, c_{-k} \right] = c_k^\dagger \delta_{k,l} - c_k^\dagger \delta_{k,-l} \tag{1.52e}$$

$$\left[c_l c_{-l}, c_{-k} \right] = 0 \tag{1.52f}$$

Osservando che la (1.52a) vale anche per gli operatori γ_k (avendo usato per la sua derivazione solo le regole di anti-commutazione fermioniche), procediamo al calcolo di $\left[H, \gamma_k^\dagger \right]$:

$$\begin{aligned}
\left[H, \gamma_k^\dagger \right] &= \sum_{l \in BZ} \epsilon_l \left[\gamma_l^\dagger \gamma_l, \gamma_k^\dagger \right] \\
&= \epsilon_k \gamma_k^\dagger = \epsilon_k \left(a_k c_k^\dagger + b_k c_{-k} \right)
\end{aligned} \tag{1.53}$$

d'altra parte:

$$\left[H, \gamma_k^\dagger \right] = \left[H, a_k c_k^\dagger + b_k c_{-k} \right] = a_k \left[H, c_k^\dagger \right] + b_k \left[H, c_{-k} \right] \tag{1.54}$$

calcolo separatamente i due commutatori utilizzando le (1.52a), (1.52b), (1.52c), (1.52d), (1.52e), (1.52f):

$$\begin{aligned}
\left[H, c_k^\dagger \right] &= \left[J \sum_{l \in BZ} \left[2(g - \cos la) c_l^\dagger c_l - i \sin la \left(c_l^\dagger c_{-l}^\dagger + c_l c_{-l} \right) \right] - JgN, c_k^\dagger \right] \\
&= J \sum_{l \in BZ} \left[2(g - \cos la) \left[c_l^\dagger c_l, c_k^\dagger \right] - i \sin la \left(\left[c_l^\dagger c_{-l}^\dagger, c_k^\dagger \right] + \left[c_l c_{-l}, c_k^\dagger \right] \right) \right] \\
&= J \left[2(g - \cos ka) c_k^\dagger + i \sin ka c_{-k} - i \sin(-ka) c_{-k} \right] \\
&= 2J \left[(g - \cos ka) c_k^\dagger + i \sin ka c_{-k} \right]
\end{aligned} \tag{1.55a}$$

$$\begin{aligned}
[H, c_{-k}] &= \left[J \sum_{l \in BZ} \left[2(g - \cos la) c_l^\dagger c_l - i \sin la (c_l^\dagger c_{-l}^\dagger + c_l c_{-l}) \right] - JgN, c_{-k} \right] \\
&= J \sum_{l \in BZ} \left[2(g - \cos la) [c_l^\dagger c_l, c_{-k}] - i \sin la \left([c_l^\dagger c_{-l}^\dagger, c_{-k}] + [c_l c_{-l}, c_{-k}] \right) \right] \\
&= J \left[-2(g - \cos(-ka)) c_{-k} - i \sin ka c_k^\dagger + i \sin(-ka) c_k^\dagger \right] \\
&= 2J \left[-(g - \cos ka) c_{-k} - i \sin ka c_k^\dagger \right]
\end{aligned} \tag{1.55b}$$

sostituendo le due precedenti nella (1.54) si ha:

$$[H, \gamma_k^\dagger] = 2J [(g - \cos ka) a_k - i \sin ka b_k] c_k^\dagger + 2J [i \sin ka a_k - (g - \cos ka) b_k] c_{-k} \tag{1.56}$$

uguagliando la (1.53) e la precedente si ha:

$$\epsilon_k \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = 2J \begin{pmatrix} g - \cos ka & -i \sin ka \\ i \sin ka & -(g - \cos ka) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} \quad \forall k \tag{1.57}$$

Abbiamo dunque ottenuto N equazioni agli autovalori indipendenti per ϵ_k , una per ogni k . Risolvendo si trovano due autovalori:

$$\begin{aligned}
\epsilon_k^{(\pm)} &= \pm 2J \sqrt{(g - \cos ka)^2 + \sin^2 ka} \\
&= \pm 2J \sqrt{g^2 - 2g \cos ka + 1}
\end{aligned} \tag{1.58}$$

Si può notare che $\epsilon_k = \epsilon_{-k}$; inoltre per $g = 0$, cioè quando non c'è un accoppiamento tra gli spin, la precedente si riduce a $\epsilon_k = \pm 2J$; d'altra parte per $g = 1$ si ha $\epsilon_k = 4J \sin \frac{ka}{2}$. Indico con $\begin{pmatrix} a_k^{(+)} \\ b_k^{(+)} \end{pmatrix}$ l'autovettore relativo all'autovalore positivo $\epsilon_k^{(+)}$, mentre con $\begin{pmatrix} a_k^{(-)} \\ b_k^{(-)} \end{pmatrix}$ quello relativo all'autovalore negativo $\epsilon_k^{(-)}$. Scegliendo a_k reale e pari e b_k immaginaria pura e dispari si può verificare che l'autovettore corrispondente a $\epsilon_k^{(+)}$ è:

$$a_k^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{g - \cos ka}{\frac{\epsilon_k}{2J}}} \tag{1.59a}$$

$$b_k^{(+)} = \frac{i \operatorname{sign}(k)}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{g - \cos ka}{\frac{\epsilon_k}{2J}}} \tag{1.59b}$$

Stabiliamo adesso la relazione tra l'autovettore corrispondente a $\epsilon_k^{(+)}$ e quello corrispondente a $\epsilon_k^{(-)}$; considerando la prima componente della (1.57) per l'autovalore positivo si ha:

$$\epsilon_k^{(+)} a_k^{(+)} = 2J(g - \cos ka) a_k^{(+)} - 2J(i \sin ka) b_k^{(+)} \quad (1.60)$$

Considerando la seconda componente della (1.57) per l'autovalore negativo e ricordando che $\epsilon_k^{(+)} = -\epsilon_k^{(-)}$ si ha:

$$\begin{aligned} \epsilon_k^{(-)} b_k^{(-)} &= -2J(g - \cos ka) b_k^{(-)} + 2J(i \sin ka) a_k^{(-)} & \Rightarrow \\ \epsilon_k^{(+)} b_k^{*(-)} &= 2J(g - \cos ka) b_k^{*(-)} + 2J(i \sin ka) a_k^{*(-)} \end{aligned} \quad (1.61)$$

da cui si ha:

$$b_k^{*(-)} = a_k^{(+)} \quad \Rightarrow \quad b_k^{(-)} = a_k^{(+)} \quad (1.62a)$$

$$a_k^{*(-)} = -b_k^{(+)} \quad \Rightarrow \quad a_k^{(-)} = b_k^{(+)} \quad (1.62b)$$

Notiamo che l'esistenza di autovalori positivi e negativi e dei relativi autovettori permette la definizione di operatori $\gamma_k^{(+)}$ e $\gamma_k^{(-)}$; osserviamo che:

$$\begin{aligned} \gamma_k^{(-)} &= a_k^{*(-)} c_k + b_k^{*(-)} c_{-k}^\dagger \\ &= -b_k^{(+)} c_k + a_k^{(+)} c_{-k}^\dagger \\ &= b_{-k}^{(+)} c_k + a_{-k}^{(+)} c_{-k}^\dagger \\ &= \gamma_{-k}^{\dagger(+)} \end{aligned} \quad (1.63)$$

pertanto la creazione di un fermione (1.47a) ad energia positiva ed impulso $-k$ è equivalente alla distruzione di un fermione ad energia negativa di impulso k . Per via delle relazioni appena trovate, d'ora in poi useremo prevalentemente i simboli relativi all'autovalore positivo ed all'autovettore ad esso relativo intendendo che: $\epsilon_k^{(+)} = \epsilon_k$, $a_k^{(+)} = a_k$ e $b_k^{(+)} = b_k$.

Poiché abbiamo trovato due autovalori distinti come soluzione della (1.57) riscriviamo la (1.51) e poniamo uguale a zero la costante:

$$H = \sum_{k \in BZ} \epsilon_k^{(+)} \gamma_k^{\dagger(+)} \gamma_k^{(+)} + \epsilon_k^{(-)} \gamma_k^{\dagger(-)} \gamma_k^{(-)} \quad (1.64)$$

Possiamo interpretare la hamiltoniana come la somma su k delle energie del numero di fermioni $\gamma_k^{\dagger(+)}\gamma_k^{(+)}$ ad energia positiva $\epsilon_k^{(+)}$ e del numero di fermioni $\gamma_k^{\dagger(-)}\gamma_k^{(-)}$ ad energia negativa $\epsilon_k^{(-)}$; proseguendo abbiamo:

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{k \in BZ} \epsilon_k^{(+)} \left[\gamma_k^{\dagger(+)}\gamma_k^{(+)} - \gamma_k^{\dagger(-)}\gamma_k^{(-)} \right] \\
&= \sum_{k \in BZ} \epsilon_k^{(+)} \left[\gamma_k^{\dagger(+)}\gamma_k^{(+)} + \gamma_k^{(-)}\gamma_k^{\dagger(-)} - \left\{ \gamma_k^{\dagger(-)}, \gamma_k^{(-)} \right\} \right] \\
&= \sum_{k \in BZ} \epsilon_k^{(+)} \left[\gamma_k^{\dagger(+)}\gamma_k^{(+)} + \gamma_k^{(-)}\gamma_k^{\dagger(-)} \right] - \sum_{k \in BZ} \epsilon_k^{(+)}
\end{aligned} \tag{1.65}$$

Definiamo ora il *ground state* nel seguente modo:

$$\gamma_k^{(+)} |GS\rangle = 0 \tag{1.66a}$$

$$\gamma_k^{\dagger(-)} |GS\rangle = \gamma_{-k}^{(+)} |GS\rangle = 0 \tag{1.66b}$$

ovvero lo stato in cui i livelli ad energia positiva sono tutti vuoti, mentre quelli ad energia negativa sono tutti pieni: è cioè lo stato in cui l'energia è minima.

Abbiamo che:

$$\langle GS | H | GS \rangle = - \sum_{k \in BZ} \epsilon_k^{(+)} \tag{1.67}$$

Dalla (1.65) e poichè $\gamma_k^{(-)}\gamma_k^{\dagger(-)} = \gamma_{-k}^{\dagger(+)}\gamma_{-k}^{(+)}$ possiamo considerare il termine $\gamma_k^{(-)}\gamma_k^{\dagger(-)}$ come il numero di anti-fermioni di impulso $-k$ ed energia $\epsilon_k^{(+)}$, e quindi interpretare la hamiltoniana come la somma di tre termini: l'energia dei fermioni (positiva), degli anti-fermioni (anch'essa positiva) e quella del ground state, infatti:

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{k \in BZ} \epsilon_k^{(+)} \gamma_k^{\dagger(+)}\gamma_k^{(+)} + \epsilon_k^{(+)} \gamma_k^{(-)}\gamma_k^{\dagger(-)} - \sum_{k \in BZ} \epsilon_k^{(+)} \\
&= \sum_{k \in BZ} \epsilon_k^{(+)} \gamma_k^{\dagger(+)}\gamma_k^{(+)} + \epsilon_{-k}^{(+)} \gamma_{-k}^{\dagger(+)}\gamma_{-k}^{(+)} - \sum_{k \in BZ} \epsilon_k^{(+)} \\
&= 2 \sum_{k \in BZ} \epsilon_k^{(+)} \gamma_k^{\dagger(+)}\gamma_k^{(+)} - \sum_{k \in BZ} \epsilon_k^{(+)} \\
&= 2 \sum_{k \in BZ} \epsilon_k^{(+)} \left[\gamma_k^{\dagger(+)}\gamma_k^{(+)} - \frac{1}{2} \right]
\end{aligned} \tag{1.68}$$

Mostriamo adesso che:

$$|GS\rangle = \prod_{k \in BZ} |GS\rangle_k = \prod_{k \in BZ} \left(a_k^* + b_k^* c_{-k}^\dagger c_k^\dagger \right) |0\rangle \quad (1.69)$$

dove $|0\rangle = \prod_{k \in BZ} |0\rangle_k$ è lo stato tale che $c_k |0\rangle_k = 0$, $\forall k$. In primo luogo abbiamo che:

$$\begin{aligned} & \gamma_k^{(+)} \prod_{l \in BZ} \left(a_l^* + b_l^* c_{-l}^\dagger c_l^\dagger \right) |0\rangle \\ &= (a_k^* c_k + b_k^*) \prod_{l \in BZ} \left(a_l^* + b_l^* c_{-l}^\dagger c_l^\dagger \right) |0\rangle \\ &= \left[\prod_{l < k} \left(a_l^* + b_l^* c_{-l}^\dagger c_l^\dagger \right) \right] [a_k^* c_k + b_k^*] [a_k^* c_k + b_k^*] \left[\prod_{l > k} \left(a_l^* + b_l^* c_{-l}^\dagger c_l^\dagger \right) \right] |0\rangle \\ &= \prod_{l < k} (\dots) \left[a_k^{*2} c_k + a_k^* b_k^* c_k c_{-k}^\dagger c_k^\dagger + b_k^* a_k^* c_{-k}^\dagger \right] \prod_{l > k} (\dots) |0\rangle \\ &= \prod_{l < k} (\dots) \left[a_k^{*2} c_k - a_k^* b_k^* \left(c_{-k}^\dagger + c_k^\dagger c_{-k}^\dagger c_k \right) + b_k^* a_k^* c_{-k}^\dagger \right] \prod_{l > k} (\dots) |0\rangle \\ &= \prod_{l < k} (\dots) \left[a_k^{*2} c_k - a_k^* b_k^* c_k^\dagger c_{-k}^\dagger c_k \right] \prod_{l > k} (\dots) |0\rangle = 0 \end{aligned} \quad (1.70)$$

resta da dimostrare che questo stato è unico. Notiamo che un generico stato $|\psi\rangle$ può essere scritto:

$$|\psi\rangle = \prod_{k \in BZ} \alpha_k^* |GS\rangle_k + \beta_k^* |EX\rangle_k \quad (1.71)$$

infatti questo equivale a dire che il generico stato è il prodotto su k di una combinazione lineare tra $|GS\rangle_k$ e $|EX\rangle_k$, dove quest'ultimo stato è definito come:

$$|EX\rangle_k = \gamma_{-k}^{\dagger(+)} \gamma_k^{\dagger(+)} |GS\rangle_k = \gamma_k^{(-)} \gamma_k^{\dagger(+)} |GS\rangle_k \quad (1.72)$$

in altre parole a partire da $|GS\rangle$, cioè da *uno* stato in cui i livelli ad energia positiva sono tutti vuoti ($\gamma_k(t) |GS\rangle = 0$) e quelli ad energia negativa sono tutti pieni ($\gamma_k^{\dagger(-)}(t) |GS\rangle = \gamma_{-k}(t) |GS\rangle = 0$), viene riempito un livello ad energia positiva ϵ_k ed impulso k e viene liberato un livello ad energia negativa $-\epsilon_k$ ed impulso k : viene in altre parole creata una coppia di impulso k . La (1.71)

equivale a dire semplicemente che $\forall k$ può essere stata creata una coppia, oppure no. Mostriamo adesso che $|EX\rangle_k$ può essere scritto come:

$$\begin{aligned}
|EX\rangle_k &= \gamma_{-k}^{\dagger(+)} \gamma_k^{\dagger(+)} \left[a_k^* + b_k^* c_{-k}^\dagger c_k^\dagger \right] |0\rangle_k \\
&= -\gamma_k^{\dagger(+)} \gamma_{-k}^{\dagger(+)} \left[a_k^* + b_k^* c_{-k}^\dagger c_k^\dagger \right] |0\rangle_k \\
&= -\left(a_k c_k^\dagger + b_k c_{-k} \right) \left(a_{-k} c_{-k}^\dagger + b_{-k} c_k \right) \left[a_k + b_k c_k^\dagger c_{-k}^\dagger \right] |0\rangle_k \\
&= -\left(a_k c_k^\dagger + b_k c_{-k} \right) \left(a_k c_{-k}^\dagger - b_k c_k \right) \left(a_k(t) + b_k(t) c_k^\dagger c_{-k}^\dagger \right) |0\rangle_k \\
&= -\left(a_k a_k c_k^\dagger c_{-k}^\dagger - a_k b_k c_k^\dagger c_k + b_k a_k c_{-k} c_{-k}^\dagger - b_k b_k c_{-k} c_k \right) \left(a_k(t) + b_k(t) c_k^\dagger c_{-k}^\dagger \right) |0\rangle_k \\
&= -\left[a_k a_k a_k c_k^\dagger c_{-k}^\dagger - a_k a_k b_k c_k^\dagger c_k + a_k b_k a_k c_{-k} c_{-k}^\dagger - a_k b_k b_k c_{-k} c_k + b_k a_k a_k c_k^\dagger c_{-k}^\dagger c_k c_{-k}^\dagger - \right. \\
&\quad \left. - a_k b_k b_k c_k^\dagger c_k c_{-k}^\dagger c_{-k}^\dagger + b_k a_k b_k c_{-k}^\dagger c_k^\dagger c_{-k}^\dagger - b_k b_k b_k c_{-k} c_k c_k^\dagger c_{-k}^\dagger \right] |0\rangle_k \\
&= -\left[a_k^3 c_k^\dagger c_{-k}^\dagger + a_k^2 b_k - a_k b_k^2 c_k^\dagger c_{-k}^\dagger - b_k^3 \right] |0\rangle_k \\
&= -\left[a_k (a_k^2 - b_k^2) c_k^\dagger c_{-k}^\dagger + b_k (a_k^2 - b_k^2) \right] |0\rangle_k \\
&= -\left(a_k c_k^\dagger c_{-k}^\dagger + b_k \right) |0\rangle_k \\
&= \left(-b_k + a_k c_{-k}^\dagger c_k^\dagger \right) |0\rangle_k
\end{aligned} \tag{1.73}$$

e che:

$$\begin{aligned}
\gamma_k^{(+)} |EX\rangle_k &= \left(a_k^* c_k + b_k^* c_{-k}^\dagger \right) \left(-b_k + a_k c_{-k}^\dagger c_k^\dagger \right) |0\rangle_k \\
&= -\left(a_k^* b_k c_k - a_k a_k^* c_k c_{-k}^\dagger c_k^\dagger + b_k^* b_k c_{-k}^\dagger - a_k b_{-k}^* c_{-k}^\dagger c_{-k}^\dagger c_k^\dagger \right) |0\rangle_k \\
&= -\left(|a_k|^2 c_k c_k^\dagger c_{-k}^\dagger + |b_k|^2 c_{-k}^\dagger \right) |0\rangle_k \\
&= -\left[|a_k|^2 \left(1 - c_k^\dagger c_k \right) c_{-k}^\dagger + |b_k|^2 c_{-k}^\dagger \right] |0\rangle_k \\
&= -\left[\left(|a_k|^2 + |b_k|^2 \right) c_{-k}^\dagger + |a_k|^2 c_k^\dagger c_{-k}^\dagger c_k \right] |0\rangle_k \\
&= -c_{-k}^\dagger |0\rangle_k \neq 0
\end{aligned} \tag{1.74}$$

pertanto l'unica possibilità per il ground state del sistema è:

$$|GS\rangle = \prod_{k \in BZ} |GS\rangle_k \tag{1.75}$$

con lo stato $|GS\rangle_k$ della (1.69). Mostriamo che questo stato è correttamente normalizzato:

$$\begin{aligned}
\langle GS | GS \rangle &= \langle 0 | \left[\prod_{l \in BZ} (a_l + b_l c_k c_{-l}) \right] \left[\prod_{m \in BZ} (a_m^* + b_m^* c_{-m}^\dagger c_m^\dagger) \right] | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \prod_{l \in BZ} (a_l + b_l c_k c_{-l}) (a_l^* + b_l^* c_{-l}^\dagger c_l^\dagger) | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \prod_{l \in BZ} [|a_l|^2 + a_l b_l^* c_{-l}^\dagger c_l^\dagger + b_l a_l^* c_l c_{-l} + |b_l|^2 c_l c_{-l} c_{-l}^\dagger c_l^\dagger] | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \prod_{l \in BZ} [|a_l|^2 + |b_l|^2] | 0 \rangle = \langle 0 | 0 \rangle = 1
\end{aligned} \tag{1.76}$$

dove si è supposto $\langle 0 | 0 \rangle = 1$ e fatto uso del seguente risultato valido per $i \neq j$:

$$\begin{aligned}
& \left[a_i + b_i c_i c_{-i}, a_j^* + b_j^* c_{-j}^\dagger c_j^\dagger \right] = \\
& = a_i a_j^* [1, 1] + a_i b_j^* [c_{-j}^\dagger c_j^\dagger, 1] + a_j^* b_i [1, c_i c_{-i}] + b_i b_j [c_i c_{-i}, c_{-j}^\dagger c_j^\dagger] = 0
\end{aligned} \tag{1.77}$$

in cui l'ultimo commutatore è nullo, infatti:

$$c_i c_{-i}, c_{-j}^\dagger c_j^\dagger = -c_i c_{-j}^\dagger c_{-i} c_j^\dagger = c_{-j}^\dagger c_i c_{-i} c_j^\dagger = -c_{-j}^\dagger c_i c_j^\dagger c_{-i} = c_{-j}^\dagger c_j^\dagger c_i c_{-i} \tag{1.78}$$

In maniera analoga è possibile mostrare che:

$${}_k \langle GS | GS \rangle_k = 1 \tag{1.79a}$$

$${}_k \langle GS | EX \rangle_k = 0 \tag{1.79b}$$

$${}_k \langle EX | EX \rangle_k = 1 \tag{1.79c}$$

Calcoliamo infine la norma del generico stato $|\psi\rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle \psi | \psi \rangle &= \langle GS | \left[\prod_{l \in BZ} (\alpha_l + \beta_l \gamma_k \gamma_{-l}) \right] \left[\prod_{m \in BZ} (\alpha_m^* + \beta_m^* \gamma_{-m}^\dagger \gamma_m^\dagger) \right] | GS \rangle \\
&= \langle GS | \prod_{l \in BZ} (\alpha_l + \beta_l \gamma_k \gamma_{-l}) (\alpha_l^* + \beta_l^* \gamma_{-l}^\dagger \gamma_l^\dagger) | GS \rangle \\
&= \langle GS | \prod_{l \in BZ} [|\alpha_l|^2 + \alpha_l \beta_l^* \gamma_{-l}^\dagger \gamma_l^\dagger + \beta_l \alpha_l^* \gamma_l \gamma_{-l} + |\beta_l|^2 \gamma_l \gamma_{-l} \gamma_{-l}^\dagger \gamma_l^\dagger] | GS \rangle \\
&= \langle GS | \prod_{l \in BZ} [|\alpha_l|^2 + |\beta_l|^2] | GS \rangle
\end{aligned} \tag{1.80}$$

e vediamo che per essere correttamente normalizzato deve essere $|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2 = 1, \forall k$.

Seguiamo adesso un approccio differente. Trascuriamo le soluzioni negative della (1.57): pertanto avremo solo gli operatori $\gamma_k^{(+)}$ che scriveremo semplicemente γ_k . Calcoliamo adesso la costante presente in (1.51); notiamo che l'energia totale del sistema è proprio pari alla costante quando $\forall k$ il numero di fermioni $\gamma_k^\dagger \gamma_k$ è nullo. Definiamo quindi lo stato che chiamiamo *ground state* nel seguente modo:

$$\gamma_k |GS\rangle = 0 \quad (1.81)$$

ed è evidentemente lo stato in cui il numero totale di fermioni $\sum_{k \in BZ} \gamma_k^\dagger \gamma_k = 0$; pertanto la costante sarà pari a:

$$\begin{aligned} \langle GS | H | GS \rangle &= J \sum_{k \in BZ} 2(g - \cos ka) \langle GS | c_k^\dagger c_k | GS \rangle - i \sin ka \langle GS | c_k^\dagger c_{-k}^\dagger | GS \rangle \\ &\quad - i \sin ka \langle GS | c_k c_{-k} | GS \rangle - JgN \end{aligned} \quad (1.82)$$

calcoliamo i valori di attesa sul ground state dei vari termini:

$$\begin{aligned} \langle GS | c_k^\dagger c_k | GS \rangle &= \langle GS | (a_k^* \gamma_k^\dagger + b_{-k} \gamma_{-k}) (a_k \gamma_k + b_{-k}^* \gamma_{-k}^\dagger) | GS \rangle \\ &= b_{-k} b_{-k}^* \langle GS | \gamma_{-k} \gamma_{-k}^\dagger | GS \rangle \\ &= |b_{-k}|^2 = |b_k|^2 \end{aligned} \quad (1.83a)$$

$$\langle GS | c_k^\dagger c_{-k}^\dagger | GS \rangle = b_k^* a_{-k}^* = -a_k b_k \quad (1.83b)$$

$$\langle GS | c_k c_{-k} | GS \rangle = a_k b_{-k} = -a_k b_k \quad (1.83c)$$

Sostituendo le precedenti espressioni e tenendo conto delle (1.58), (1.59a) e (1.59b), con una serie di passaggi algebrici si ha:

$$\langle GS | H | GS \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{k \in BZ} \epsilon_k \quad (1.84a)$$

$$H = \sum_{k \in BZ} \epsilon_k \left(\gamma_k^\dagger \gamma_k - \frac{1}{2} \right) \quad (1.84b)$$

Riepilogando, abbiamo quindi che, considerando sia le soluzioni ad energia positiva che quelle ad energia negativa di (1.57) e ponendo la costante che compare in (1.51) pari a 0, la hamiltoniana è uguale al doppio della hamiltoniana che invece si ottiene considerando solo le soluzioni ad energia positiva. D'altra parte abbiamo che:

$$\sum_{k \in BZ} \gamma_k^{(-)} \gamma_k^{\dagger(-)} = \sum_{k \in BZ} \gamma_{-k}^{\dagger(+)} \gamma_{-k}^{(+)} = \sum_{k \in BZ} \gamma_k^{\dagger(+)} \gamma_k^{(+)} \quad (1.85)$$

cioè il numero totale di fermioni e di anti-fermioni è lo stesso: pertanto la creazione di fermioni procede per coppie. Abbiamo detto che la distruzione di un fermione ad energia negativa equivale alla creazione di un anti-fermione: la creazione di una coppia di impulso k equivale allora ad una transizione di un sistema a due livelli, dove lo stato di partenza ha zero fermioni, zero anti-fermioni ed energia nulla; lo stato di arrivo ha un fermione, un anti-fermione ed un'energia pari a: $\epsilon_k^{(+)} - \epsilon_k^{(-)} = 2\epsilon_k^{(+)}$; per questa ragione la hamiltoniana calcolata tenendo conto di entrambi gli autovalori è il doppio di quella calcolata trascurando l'autovalore negativo.

Calcoliamo adesso il valore di attesa del numero di fermioni (o di coppie) di impulso k su di un generico stato:

$$\begin{aligned} \langle \psi | \gamma_k^{\dagger} \gamma_k | \psi \rangle &= \left[\prod_{l \in BZ} \alpha_l |GS\rangle + \beta_l |EX\rangle \right] \gamma_k^{\dagger} \gamma_k \left[\prod_{m \in BZ} \alpha_m^* |GS\rangle_m + \beta_m^* |EX\rangle_m \right] \\ &= [\alpha_k |GS\rangle + \beta_k |EX\rangle] \gamma_k^{\dagger} \gamma_k [\alpha_k^* |GS\rangle_k + \beta_k^* |EX\rangle_k] \\ &= |\beta_k|^2 \langle EX | \gamma_k^{\dagger} \gamma_k | EX \rangle_k \\ &= |\beta_k|^2 \langle GS | \gamma_k \gamma_{-k} \gamma_k^{\dagger} \gamma_k \gamma_{-k} \gamma_k^{\dagger} | GS \rangle_k \\ &= |\beta_k|^2 \langle GS | \gamma_k \gamma_k^{\dagger} \gamma_{-k} \gamma_{-k}^{\dagger} | GS \rangle_k \\ &= |\beta_k|^2 \end{aligned} \quad (1.86)$$

Osserviamo che ponendo $g = 0$ in (1.1) ed in (1.84b) e uguagliando le due

espressioni otteniamo:

$$\begin{aligned}
2J \sum_{k \in BZ} \gamma_k^\dagger \gamma_k - \frac{1}{2} &= -J \sum_{i=1}^N \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z \Rightarrow \\
\sum_{k \in BZ} \gamma_k^\dagger \gamma_k &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} (1 - \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z)
\end{aligned} \tag{1.87}$$

il termine nella sommatoria al secondo membro è pari a 0 quando gli spin di due siti adiacenti sono orientati concordemente, mentre è pari a 1 quando sono orientati discordemente. Complessivamente il secondo membro è noto come il numero di *difetti topologici* presenti nel sistema, il cui valore di attesa può essere calcolato, per $g = 0$, nel seguente modo:

$$\langle \psi | \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} (1 - \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z) | \psi \rangle = \sum_{k \in BZ} \langle \psi | \gamma_k^\dagger \gamma_k | \psi \rangle = \sum_{k \in BZ} |\beta_k|^2 \tag{1.88}$$

Facciamo un'ultima osservazione; riscriviamo la (1.71):

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \prod_{k \in BZ} \alpha_k^* |GS\rangle_k + \beta_k^* |EX\rangle_k \\
&= \prod_{k \in BZ} \alpha_k^* |GS\rangle_k + \sum_{l \in BZ} \beta_l^* |EX\rangle_l \prod_{k \neq l} \alpha_k^* |GS\rangle_k + \\
&\quad + \sum_{l, m \in BZ} \beta_l^* \beta_m^* |EX\rangle_l |EX\rangle_m \prod_{k \neq l, m} \alpha_k^* |GS\rangle_k + \dots
\end{aligned} \tag{1.89}$$

ricordiamoci che $|\psi\rangle$ è normalizzato e ricalcoliamone la norma:

$$1 = \langle \psi | \psi \rangle = \prod_{k \in BZ} |\alpha_k^*|^2 + \sum_{l \in BZ} |\beta_l^*|^2 \prod_{k \neq l} |\alpha_k^*|^2 + \sum_{l, m \in BZ} |\beta_l^*|^2 |\beta_m^*|^2 \prod_{k \neq l, m} |\alpha_k^*|^2 + \dots \tag{1.90}$$

se $|\beta_k^*|^2 \sim 0$, e quindi $|\alpha_k^*|^2 \sim 1, \forall k$, abbiamo che:

$$1 = \langle \psi | \psi \rangle \simeq \prod_{k \in BZ} |\alpha_k^*|^2 + \sum_{k \in BZ} |\beta_k^*|^2 \tag{1.91}$$

ricordando la 1.86:

$$\sum_{k \in BZ} \langle \psi | \gamma_k^\dagger \gamma_k | \psi \rangle = \sum_{k \in BZ} |\beta_k^*|^2 \simeq 1 - \prod_{k \in BZ} |\alpha_k^*|^2 \tag{1.92}$$

In altre parole: se la probabilità che il modo k sia nello stato eccitato è piccola $\forall k$, abbiamo che il valore di attesa del numero totale di fermioni è circa pari a $1 - \prod_{k \in BZ} |\alpha_k^*|^2$, che è la probabilità che il sistema nel suo complesso *non* si trovi nel ground state.

Capitolo 2

Hamiltoniana dipendente dal tempo

Modifichiamo adesso la (1.1):

$$g \rightarrow g(t) \quad (2.1)$$

senza specificare per ora la funzione $g(t)$.

Nel caso del problema in cui la hamiltoniana non dipenda esplicitamente dal tempo la diagonalizzazione (1.84b) fornisce lo spettro dell'energia. Nel caso in cui la hamiltoniana dipenda esplicitamente dal tempo è ancora possibile diagonalizzare la hamiltoniana e ricavarne gli autovalori istante per istante:

$$H = \sum_{k \in BZ} 2\epsilon_k(t) \left(\gamma_k^\dagger(t) \gamma_k(t) - \frac{1}{2} \right) \quad (2.2)$$

dove

$$\epsilon_k(t) = 2J \sqrt{g(t)^2 - 2g(t) \cos ka + 1} \quad (2.3a)$$

$$\gamma_k(t) = a_k^*(t) c_k + b_k^*(t) c_{-k}^\dagger \quad (2.3b)$$

e le $a_k(t)$ e $b_k(t)$ si ottengono a partire dalle a_k e b_k effettuando la sostituzione $g \rightarrow g(t)$. Introduciamo $|GS(t)\rangle_k$ e $|EX(t)\rangle_k$:

$$\gamma_k(t) |GS(t)\rangle_k = 0 \quad (2.4a)$$

$$|EX(t)\rangle_k = \gamma_{-k}^\dagger(t) \gamma_k^\dagger(t) |GS(t)\rangle_k \quad (2.4b)$$

Avremo ancora:

$$|GS(t)\rangle = \prod_{k \in BZ} |GS(t)\rangle_k = \prod_{k \in BZ} \left(a_k^*(t) + b_k^*(t) c_{-k}^\dagger c_k^\dagger \right) |0\rangle \quad (2.5a)$$

$$|EX(t)\rangle_k = \left(-b_k(t) + a_k(t) c_{-k}^\dagger c_k^\dagger \right) |0\rangle_k \quad (2.5b)$$

e tra gli stati appena definiti valgono relazioni di ortonormalità perfettamente analoghe a quelle ottenute nel capitolo precedente. Il generico stato $|\psi\rangle$ sarà:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \prod_{k \in BZ} \alpha_k^*(t) |GS(t)\rangle_k + \beta_k^*(t) |EX(t)\rangle_k \\ &= \prod_{k \in BZ} \left(\alpha_k^*(t) + \beta_k^*(t) \gamma_{-k}^\dagger(t) \gamma_k^\dagger(t) \right) |GS(t)\rangle \end{aligned} \quad (2.6)$$

dove i coefficienti α_k e β_k dipendono dal tempo perché, nel corso dell'evoluzione, sono possibili transizioni tra autostati istantanei differenti.

Scriviamo ora la (2.2) in rappresentazione spettrale; notiamo che quando $\gamma_k^\dagger(t) \gamma_k(t)$ vale 0 l'energia associata al modo k sarà $-\epsilon_k(t)$, mentre quando vale 1 l'energia associata al modo k sarà $+\epsilon_k(t)$, pertanto avremo:

$$\sum_{k \in BZ} H_k(t) = \sum_{k \in BZ} \left[\epsilon_k^{GS}(t) |GS(t)\rangle_k \langle GS(t)| + \epsilon_k^{EX}(t) |EX(t)\rangle_k \langle EX(t)| \right] \quad (2.7)$$

con $\epsilon_k^{GS}(t) = \epsilon_k^-(t) = -\epsilon_k(t)$ ed $\epsilon_k^{EX}(t) = \epsilon_k(t)$. La precedente è la hamiltoniana di N sistemi indipendenti a due livelli, con $\epsilon_k^{GS}(t)$ energia del livello inferiore e $|GS(t)\rangle_k$ autostato relativo, e con $\epsilon_k^{EX}(t)$ energia del livello superiore e $|EX(t)\rangle_k$ autostato relativo.

2.1 Breve riepilogo sulla rappresentazione di Heisenberg

Gli operatori in rappresentazione di Heisenberg sono definiti da:

$$\hat{O}^{(H)}(t) = \hat{U}^\dagger(t, 0) \hat{O}(t) \hat{U}(t, 0) \quad (2.8)$$

dove $\hat{O}(t)$ è l'operatore dipendente esplicitamente dal tempo in rappresentazione di Schroedinger, mentre $\hat{U}(t, 0)$ è la soluzione dell'equazione:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t, 0) = H(t) \hat{U}(t, 0) \quad (2.9a)$$

$$\hat{U}(0, 0) = 1 \quad (2.9b)$$

L'equazione del moto per $\hat{O}^{(H)}$ è ([6]):

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{O}^{(H)}(t) = \hat{U}^\dagger(t, 0) \left([\hat{O}(t), H(t)] + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{O}(t) \right) \hat{U}(t, 0) \quad (2.10)$$

2.2 Trasformazioni di Bogoliubov dipendenti dal tempo

Definiamo tramite una nuova trasformazione di Bogoliubov ([4], [5]) gli operatori $\tilde{\gamma}_k(t)$ (in rappresentazione di Schroedinger); a questo scopo notiamo che gli operatori c_k non dipendono esplicitamente dal tempo: pertanto con il simbolo $c_k(t)$ intenderemo, senza pericolo di ambiguità, gli operatori c_k in rappresentazione di Heisenberg. Abbiamo:

$$\tilde{\gamma}_k(t) = u_k^*(t) c_k + v_k^*(t) c_{-k}^\dagger \quad (2.11a)$$

con inversa:

$$c_k = u_k(t) \tilde{\gamma}_k(t) + v_k(t) \tilde{\gamma}_{-k}^\dagger(t) \quad (2.11b)$$

mentre in rappresentazione di Heisenberg abbiamo:

$$\tilde{\gamma}_k^{(H)}(t) = u_k^*(t) c_k(t) + v_k^*(t) c_{-k}^\dagger(t) \quad (2.11c)$$

con inversa:

$$c_k(t) = u_k(t) \tilde{\gamma}_k^{(H)}(t) + v_k(t) \tilde{\gamma}_{-k}^{\dagger(H)}(t) \quad (2.11d)$$

Osserviamo che, imponendo che $\tilde{\gamma}_k(t)$ siano ancora operatori fermionici, le $u_k(t)$ e $v_k(t)$ soddisfano, per ogni istante di tempo, le stesse proprietà soddisfatte dalle a_k e b_k :

$$u_k(t) = u_{-k}(t) = u_k^*(t) \quad (2.12a)$$

$$v_k(t) = -v_{-k}(t) = -v_k^*(t) \quad (2.12b)$$

Ricordando che la (2.4a) e la (2.3b) permettono di derivare la (2.5a); in maniera completamente analoga, se imponiamo, per un generico stato che [4]:

$$\tilde{\gamma}_k(t) |\psi(t)\rangle = 0 \quad (2.13)$$

allora, usando la (2.11a), possiamo scrivere:

$$|\psi(t)\rangle = \prod_{k \in BZ} \left(u_k^*(t) + v_k^*(t) c_{-k}^\dagger c_k^\dagger \right) |0\rangle \quad (2.14)$$

Mostriamo che la precedente e la (2.6) sono equivalenti se poniamo:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_k(t) \\ v_k(t) \end{pmatrix} &= \alpha_k(t) \begin{pmatrix} a_k(t) \\ b_k(t) \end{pmatrix} + \beta_k(t) \begin{pmatrix} a_k^{(-)}(t) \\ b_k^{(-)}(t) \end{pmatrix} \\ &= \alpha_k(t) \begin{pmatrix} a_k(t) \\ b_k(t) \end{pmatrix} + \beta_k(t) \begin{pmatrix} b_k(t) \\ a_k(t) \end{pmatrix} \quad \forall k \end{aligned} \quad (2.15)$$

infatti:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \prod_{k \in BZ} \left(u_k^*(t) + v_k^*(t) c_{-k}^\dagger c_k^\dagger \right) |0\rangle \\ &= \prod_{k \in BZ} \left[(\alpha_k^*(t) a_k^*(t) + \beta_k^*(t) b_k^*(t)) + (\alpha_k^*(t) b_k^*(t) + \beta_k^*(t) a_k^*(t)) c_{-k}^\dagger c_k^\dagger \right] |0\rangle \\ &= \prod_{k \in BZ} \alpha_k^*(t) \left(a_k^*(t) + b_k^*(t) c_{-k}^\dagger c_k^\dagger \right) |0\rangle + \beta_k^*(t) \left(b_k^*(t) + a_k^*(t) c_{-k}^\dagger c_k^\dagger \right) |0\rangle \\ &= \prod_{k \in BZ} \alpha_k^*(t) \left(a_k^*(t) + b_k^*(t) c_{-k}^\dagger c_k^\dagger \right) |0\rangle + \beta_k^*(t) \left(-b_k(t) + a_k(t) c_{-k}^\dagger c_k^\dagger \right) |0\rangle \\ &= \prod_{k \in BZ} \alpha_k^*(t) |GS(t)\rangle_k + \beta_k^*(t) \gamma_{-k}^\dagger \gamma_k^\dagger |GS(t)\rangle_k \\ &= \prod_{k \in BZ} \left(\alpha_k^*(t) + \beta_k^*(t) \gamma_{-k}^\dagger \gamma_k^\dagger \right) |GS(t)\rangle_k \\ &= \prod_{k \in BZ} \alpha_k^*(t) |GS(t)\rangle_k + \beta_k^*(t) |EX(t)\rangle_k \end{aligned} \quad (2.16)$$

e procedendo come nella (1.86) si ha:

$$\langle \psi(t) | \gamma_k^\dagger(t) \gamma_k(t) | \psi(t) \rangle = |\beta_k(t)|^2 \quad (2.17)$$

la stessa quantità può essere calcolata anche utilizzando la (2.3b) e la (2.14):

$$\begin{aligned}
\langle \psi(t) | \gamma_k^\dagger(t) \gamma_k(t) | \psi(t) \rangle &= \left[\prod_{l \in BZ} \langle 0 | (u_l(t) + v_l(t) c_l c_{-l}) \right] \gamma_k^\dagger \gamma_k \\
&\quad \left[\prod_{m \in BZ} \left(u_m^*(t) + v_m^*(t) c_{-m}^\dagger c_m^\dagger \right) | 0 \rangle \right] \\
&= \left[\prod_{l \in BZ} \langle 0 | (u_l(t) + v_l(t) c_l c_{-l}) \right] \left[a_k(t) c_k^\dagger + b_k(t) c_{-k} \right] \\
&\quad \left[a_k^*(t) c_k + b_k^*(t) c_{-k}^\dagger \right] \left[\prod_{m \in BZ} \left(u_m^*(t) + v_m^*(t) c_{-m}^\dagger c_m^\dagger \right) | 0 \rangle \right] \\
&= [\langle 0 | (u_k(t) + v_k(t) c_k c_{-k})] \left[a_k(t) c_k^\dagger + b_k(t) c_{-k} \right] \\
&\quad \left[a_k^*(t) c_k + b_k^*(t) c_{-k}^\dagger \right] \left[\left(u_k^*(t) + v_k^*(t) c_{-k}^\dagger c_k^\dagger \right) | 0 \rangle \right] \\
&= |a_k(t)|^2 |v_k(t)|^2 \langle 0 | c_k c_{-k} c_k^\dagger c_k c_{-k}^\dagger c_k^\dagger | 0 \rangle + \\
&\quad + a_k(t) b_k^*(t) v_k(t) u_k^*(t) \langle 0 | c_k c_{-k} c_k^\dagger c_{-k}^\dagger | 0 \rangle + \\
&\quad + b_k(t) a_k^*(t) u_k(t) v_k^*(t) \langle 0 | c_{-k} c_k c_{-k}^\dagger c_k^\dagger | 0 \rangle + \\
&\quad + |b_k(t)|^2 |u_k(t)|^2 \langle 0 | c_{-k} c_{-k}^\dagger | 0 \rangle \\
&= |a_k(t)|^2 |v_k(t)|^2 + 2a_k(t) b_k(t) v_k(t) u_k(t) + |b_k(t)|^2 |u_k(t)|^2
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Anche in questo caso si ha che, se $|\beta_k^*(t)|^2 \sim 0$, e quindi $|\alpha_k^*(t)|^2 \sim 1$, $\forall k$:

$$\sum_{k \in BZ} \langle \psi(t) | \gamma_k^\dagger(t) \gamma_k(t) | \psi(t) \rangle = \sum_{k \in BZ} |\beta_k^*(t)|^2 \simeq 1 - \prod_{k \in BZ} |\alpha_k^*(t)|^2 \tag{2.19}$$

Cerchiamo adesso lo stato che soddisfa l'equazione di Schroedinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle \tag{2.20}$$

ricordiamo l'ipotesi fatta in precedenza:

$$\tilde{\gamma}_k(t) |\psi(t)\rangle = 0 \tag{2.21}$$

che equivale a supporre che lo stato soluzione dell'equazione di Schroedinger abbia anche un numero di fermioni (definiti dalla (2.11a)) pari a zero. Mostriamo

che l'ipotesi appena fatta può essere riformulata; abbiamo:

$$\begin{aligned}
0 &= \tilde{\gamma}_k(t) |\psi(t)\rangle \\
&= i\hbar \frac{d}{dt} [\tilde{\gamma}_k(t) |\psi(t)\rangle] \\
&= i\hbar \frac{d}{dt} [\tilde{\gamma}_k(t)] |\psi(t)\rangle + \tilde{\gamma}_k(t) i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \\
&= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} [\tilde{\gamma}_k(t)] |\psi(t)\rangle + \tilde{\gamma}_k(t) H(t) |\psi(t)\rangle \\
&= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} [\tilde{\gamma}_k(t)] |\psi(t)\rangle + [\tilde{\gamma}_k(t), H(t)] |\psi(t)\rangle \\
&= \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} [\tilde{\gamma}_k(t)] + [\tilde{\gamma}_k(t), H(t)] \right] |\psi(t)\rangle \\
&= \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} [\tilde{\gamma}_k(t)] + [\tilde{\gamma}_k(t), H(t)] \right] U(t, 0) |\psi(0)\rangle
\end{aligned} \tag{2.22}$$

poiché il precedente risultato deve valere per ogni condizione iniziale, si ha:

$$\begin{aligned}
\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} [\tilde{\gamma}_k(t)] + [\tilde{\gamma}_k(t), H(t)] \right] U(t, 0) &= 0 \Rightarrow \\
i\hbar \frac{\partial}{\partial t} [\tilde{\gamma}_k(t)] &= -[\tilde{\gamma}_k(t), H(t)]
\end{aligned} \tag{2.23}$$

sostituendo in (2.21):

$$i\hbar \frac{d}{dt} \tilde{\gamma}_k^{(H)}(t) = 0 \tag{2.24}$$

Scriviamo adesso l'equazione (2.10) per $c_k(t)$:

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_k(t) = \hat{U}^\dagger(t, 0) [c_k, H(t)] \hat{U}(t, 0) \tag{2.25}$$

calcoliamo esplicitamente $[c_k, H(t)]$ usando la (1.46):

$$\begin{aligned}
[c_k, H(t)] &= J \sum_{l \in BZ} 2(g(t) - \cos la) [c_k, c_l^\dagger c_l] - i \sin la [c_k, c_l^\dagger c_{-l}^\dagger] - i \sin la [c_k, c_l c_{-l}] \\
&= J \left[2(g(t) - \cos ka) c_k - i \sin ka c_{-k}^\dagger + i \sin(-ka) c_{-k}^\dagger \right] \\
&= 2J \left[(g(t) - \cos ka) c_k - i \sin ka c_{-k}^\dagger \right]
\end{aligned} \tag{2.26}$$

dove si sono utilizzate delle relazioni del tutto analoghe alle (1.52a), (1.52e) e (1.52f). Sostituisco in (2.25) e ottengo:

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{d}{dt} c_k(t) &= 2J \left[(g(t) - \cos ka) c_k(t) - i \sin ka c_{-k}^\dagger(t) \right] \\
&= 2J \left[(g(t) - \cos ka) \left(u_k(t) \tilde{\gamma}_k^{(H)}(t) + v_k(t) \tilde{\gamma}_{-k}^{\dagger(H)}(t) \right) \right] - \\
&\quad - 2J \left[i \sin ka \left(u_{-k}^*(t) \tilde{\gamma}_{-k}^{\dagger(H)}(t) + v_{-k}^*(t) \tilde{\gamma}_k^{(H)}(t) \right) \right] \quad (2.27) \\
&= 2J \left[(g(t) - \cos ka) u_k(t) - i \sin ka v_{-k}^*(t) \right] \tilde{\gamma}_k^{(H)}(t) + \\
&\quad + 2J \left[(g(t) - \cos ka) v_k(t) - i \sin ka u_{-k}^*(t) \right] \tilde{\gamma}_{-k}^{\dagger(H)}(t)
\end{aligned}$$

Ora calcoliamo $\frac{d}{dt} c_k(t)$ per un'altra via. Ricordando la (2.24), deriviamo la (2.11d) rispetto al tempo; otteniamo:

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_k(t) = i\hbar \left(\frac{d}{dt} u_k(t) \right) \tilde{\gamma}_k^{(H)}(t) + i\hbar \left(\frac{d}{dt} v_k(t) \right) \tilde{\gamma}_{-k}^{\dagger(H)}(t) \quad (2.28)$$

uguagliamo la precedente e la (2.27) e abbiamo:

$$i\hbar \frac{d}{dt} u_k(t) = 2J \left[(g(t) - \cos ka) u_k(t) - i \sin ka v_k(t) \right] \quad (2.29a)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} v_k(t) = 2J \left[(g(t) - \cos ka) v_k(t) - i \sin ka u_k(t) \right] \quad (2.29b)$$

consideriamo la complessa coniugata della seconda, ricordando le proprietà di $u_k(t)$ e $v_k(t)$:

$$i\hbar \frac{d}{dt} v_k(t) = 2J \left[-(g(t) - \cos ka) v_k(t) + i \sin ka u_k(t) \right] \quad (2.29c)$$

in forma matriciale:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_k(t) \\ v_k(t) \end{pmatrix} = 2J \begin{pmatrix} g(t) - \cos ka & -i \sin ka \\ i \sin ka & -(g(t) - \cos ka) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k(t) \\ v_k(t) \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

la precedente è detta equazione di Bogoliubov - de Gennes. Notiamo che nel caso in cui la hamiltoniana dipenda esplicitamente dal tempo abbiamo ottenuto ancora una volta N sistemi di equazioni differenziali indipendenti, uno per ogni k . Risolvendo la precedente ed inserendo $u_k(t)$ e $v_k(t)$ in (2.14) si ottiene lo stato soluzione dell'equazione di Schroedinger; inoltre è possibile calcolare $\langle \psi(t) | \gamma_k^\dagger(t) \gamma_k(t) | \psi(t) \rangle$ facendo uso della (2.18).

Capitolo 3

Approssimazione adiabatica-impulsiva

Verranno ora presentate due approssimazioni utili per studiare sistemi con hamiltoniana dipendente dal tempo; come vedremo, quella adiabatica si applica quando la hamiltoniana varia *lentamente*, mentre quella impulsiva si applica nel caso in cui la hamiltoniana varia *rapidamente*. Chiariamo in che senso intendiamo una variazione lenta o rapida della hamiltoniana.

Supponiamo che $[t_0, t_f]$ sia l'intervallo temporale in cui varia la hamiltoniana $H(t)$; definiamo $T = t_f - t_0$ e $s = \frac{t-t_0}{T}$. Diremo che la hamiltoniana varia in maniera infinitamente lenta se $T \rightarrow \infty$ e che varia in maniera infinitamente veloce $T \rightarrow 0$. Indicheremo l'operatore di evoluzione temporale $U(t_0, t_f)$ con $U_T(s)$.

3.1 Teorema adiabatico

L'approssimazione adiabatica si basa su di un risultato noto come *teorema adiabatico*, che adesso enunciamo (per una dimostrazione dettagliata si veda [7]). Supponiamo che la hamiltoniana $H(s)$ abbia spettro discreto e non degenere costituito dagli n autovalori: $\epsilon_1(s), \epsilon_2(s), \dots, \epsilon_n(s)$, ed indichiamo

con $P_1(s), \dots, P_n(s)$ i proiettori relativi ai sottospazi individuati da ciascun autovalore. Supponiamo inoltre che:

- gli autovalori ϵ_j siano funzioni continue di s
- gli autovalori ϵ_j rimangano distinti per l'intera evoluzione temporale, escludendo cioè la possibilità di un *crossing* tra i livelli energetici
- i proiettori P_j siano funzioni continue di s e le loro derivate $\frac{d}{dt}P_j$ e $\frac{d^2}{dt^2}P_j$ siano continue a tratti durante l'intera evoluzione temporale

abbiamo che:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} U_T(s) P_j(0) = P_j(s) \lim_{T \rightarrow \infty} U_T(s) \quad (3.1)$$

per rendere più esplicito il risultato moltiplichiamo ambo i membri per l'autostato $|j(0)\rangle$ realativo all'autovalore $\epsilon_j(0)$:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} U_T(s) P_j(0) |j(0)\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} U_T(s) |j(0)\rangle = P_j(s) \lim_{T \rightarrow \infty} U_T(s) |j(0)\rangle \quad (3.2)$$

Vediamo che, se lo stato iniziale è $|j(0)\rangle$, cioè un'autostato della hamiltoniana, lo stato al tempo $t = t_0 + sT$ si ottiene nel seguente modo: si fa evolvere lo stato iniziale attraverso l'operatore $\lim_{T \rightarrow \infty} U_T(s)$ e si proietta dunque lo stato ottenuto sul sottospazio relativo all'autovalore $\epsilon_j(s)$. In altre parole sono escluse transizioni da $\epsilon_j(s)$ ad $\epsilon_k(s)$, con $j \neq k$. Dalla precedente, espandendo lo stato $\lim_{T \rightarrow \infty} U_T(s) |j(0)\rangle$ sulla base degli autostati istantanei dell'energia e ammettendo che l'operatore di evoluzione (che è unitario) possa aggiungere una fase ad ognuno degli autostati dell'energia, si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} U_T(s) |j(0)\rangle &= P_j(s) \lim_{T \rightarrow \infty} U_T(s) |j(0)\rangle \\ &= P_j(s) \sum_i a_i(t) e^{i\phi_i(t)} |i(t)\rangle \\ &= e^{i\phi_j(t)} |j(t)\rangle \end{aligned} \quad (3.3)$$

In questo senso usualmente si dice che, se sono soddisfatte le ipotesi le teorema adiabatico, dato uno stato iniziale $|\psi(0)\rangle$, si ottiene lo stato evoluto $|\psi(t)\rangle$ *derivandolo con continuità* dallo stato iniziale.

3.2 Approssimazione adiabatica

L'approssimazione adiabatica consiste nell'estendere la validità del teorema adiabatico dal caso $T \rightarrow \infty$, al caso in cui T è molto grande. Per capire i limiti di applicabilità di questa approssimazione calcoliamo la probabilità che essa fallisca.

Vogliamo ricavare un'equazione equivalente all'equazione di Schroedinger; iniziamo espandendo un generico stato sugli autostati istantanei della hamiltoniana:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_i a_i(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \epsilon_i(t') dt'} |i(t)\rangle \quad (3.4)$$

deriviamo la precedente ed otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle &= \sum_i \left(a_i'(t) |i(t)\rangle + a_i(t) \frac{d}{dt} |i(t)\rangle - \frac{i}{\hbar} a_i(t) \epsilon_i(t) |i(t)\rangle \right) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \epsilon_i(t') dt'} \\ &= \sum_i \left(a_i'(t) |i(t)\rangle + a_i(t) \frac{d}{dt} |i(t)\rangle - \frac{i}{\hbar} a_i(t) H(t) |i(t)\rangle \right) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \epsilon_i(t') dt'} \end{aligned} \quad (3.5)$$

dove il ' indica l'operazione di derivazione rispetto al tempo. Facciamo uso dell'equazione di Schroedinger e abbiamo:

$$\sum_i \left(a_i'(t) |i(t)\rangle + a_i(t) \frac{d}{dt} |i(t)\rangle \right) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \epsilon_i(t') dt'} = 0 \quad (3.6)$$

che è ad essa equivalente. Adesso moltiplichiamo la precedente per $\langle j(t)|$ e, ricorrendo alle proprietà di ortonormalità degli autostati istantanei della hamiltoniana, abbiamo:

$$a_j'(t) = - \sum_i a_i(t) \langle j(t)| \frac{d}{dt} |i(t)\rangle e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \epsilon_j(t') - \epsilon_i(t') dt'} \quad (3.7)$$

Valutiamo separatamente $\langle j(t)| \frac{d}{dt} |i(t)\rangle$; derivando l'equazione agli autovalori dell'energia:

$$H(t) |i(t)\rangle = \epsilon_i(t) |i(t)\rangle \quad (3.8)$$

e moltiplicando ambo i membri per $\langle j(t)|$ si ricava facilmente che:

$$\langle j(t)| \frac{d}{dt} |i(t)\rangle = \frac{-\langle j(t)| \frac{dH}{dt} |i(t)\rangle}{\epsilon_j(t) - \epsilon_i(t)} \quad (3.9)$$

distinguiamo il termine $\langle j(t) | \frac{d}{dt} |j(t)\rangle$ dagli altri; notiamo preliminarmente che:

$$\frac{d}{dt} \langle j(t) | j(t) \rangle = 0 \Rightarrow \langle j(t) | \frac{d}{dt} |j(t)\rangle = -\frac{d}{dt} [\langle j(t) |] |j(t)\rangle = -\left(\langle j(t) | \frac{d}{dt} |j(t)\rangle \right)^* \quad (3.10)$$

e che quindi $\langle j(t) | \frac{d}{dt} |j(t)\rangle$ deve essere o immaginario puro o nullo; mostriamo che questa quantità può sempre essere annullata attraverso una opportuna scelta di fase. Aggiungiamo una fase a $|j(t)\rangle$ effettuando la sostituzione:

$$|j(t)\rangle \rightarrow e^{i\phi(t)} |j(t)\rangle \quad (3.11)$$

abbiamo:

$$\langle j(t) | e^{-i\phi(t)} \frac{d}{dt} e^{i\phi(t)} |j(t)\rangle = \langle j(t) | \frac{d}{dt} |j(t)\rangle + i \frac{d}{dt} \phi(t) \quad (3.12)$$

pertanto, scegliendo:

$$\phi(t) = i \int_{t_0}^t \langle j(t') | \frac{d}{dt'} |j(t')\rangle dt' \quad (3.13)$$

si può annullare la quantità esaminata. La (3.7) allora diventa:

$$a'_j(t) = \sum_{i \neq j} a_i(t) \frac{\langle j(t) | \frac{dH}{dt} |i(t)\rangle}{\epsilon_j(t) - \epsilon_i(t)} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \epsilon_j(t') - \epsilon_i(t') dt'} \quad (3.14)$$

Facciamo due ipotesi semplificative:

- poiché la hamiltoniana varia lentamente supponiamo che tutte le quantità al secondo membro dipendenti dal tempo possano essere sostituite con il loro valore al tempo iniziale t_0 .
- supponiamo inoltre che a t_0 il sistema si trovi in un autostato di $H(t_0)$, ad esempio quello relativo all'autovalore $\epsilon_k(t_0)$.

$$a_i(t_0) = \delta_{k,i} \quad (3.15)$$

abbiamo pertanto:

$$a'_j(t) = \frac{\langle j(t) | \frac{dH}{dt} |k(t)\rangle(t_0)}{\epsilon_j(t_0) - \epsilon_k(t_0)} e^{\frac{i}{\hbar} [(\epsilon_j(t_0) - \epsilon_k(t_0))(t - t_0)]} \quad (3.16)$$

Integrando la precedente da t_0 a t abbiamo, per $j \neq k$:

$$\begin{aligned} a_j(t) &= \frac{\langle j(t) | \frac{dH}{dt} | k(t) \rangle (t_0)}{\epsilon_j(t_0) - \epsilon_k(t_0)} \int_{t_0}^t e^{\frac{i}{\hbar}[(\epsilon_j(t_0) - \epsilon_k(t_0))(t-t_0)]} dt' \\ &= \frac{i\hbar \langle j(t) | \frac{dH}{dt} | k(t) \rangle (t_0)}{(\epsilon_j(t_0) - \epsilon_k(t_0))^2} \left(1 - e^{\frac{i}{\hbar}[(\epsilon_j(t_0) - \epsilon_k(t_0))(t-t_0)]} \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

calcoliamo il modulo quadro della precedente:

$$|a_j(t)|^2 = \frac{4\hbar^2 \left| \langle j(t) | \frac{dH}{dt} | k(t) \rangle (t_0) \right|^2}{(\epsilon_j(t_0) - \epsilon_k(t_0))^4} \sin^2 \left[\frac{1}{2\hbar} (\epsilon_j(t_0) - \epsilon_k(t_0)) (t - t_0) \right] \quad (3.18)$$

adesso possiamo immaginare che le quantità $\langle j(t) | \frac{dH}{dt} | k(t) \rangle$ e $\epsilon_j(t) - \epsilon_k(t)$ non siano, come invece fatto in precedenza, indipendenti dal tempo, in tal caso avremo:

$$|a_j(t)|^2 = \frac{4\hbar^2 \left| \langle j(t) | \frac{dH}{dt} | k(t) \rangle \right|^2}{(\epsilon_j(t) - \epsilon_k(t))^4} \sin^2 \left[\frac{1}{2\hbar} (\epsilon_j(t) - \epsilon_k(t)) (t - t_0) \right] \quad (3.19)$$

la precedente esprime la probabilità che, al tempo t , il sistema sia in nell'autostato $|k(t)\rangle$ con $j \neq k$; allora la probabilità che l'evoluzione non sia stata adiabatica è:

$$\sum_{k \neq j} |a_j(t)|^2 \quad (3.20)$$

e quindi possiamo considerare l'approssimazione valida per quei t tali che:

$$\sum_{k \neq j} |a_j(t)|^2 \ll 1 \quad (3.21)$$

Definiamo adesso:

$$|\eta_j(t)|^2 \equiv \frac{\left| \langle j(t) | \frac{dH}{dt} | k(t) \rangle \right|^2}{(\epsilon_j(t) - \epsilon_k(t))^4} \quad (3.22)$$

dalle (3.19) e (3.21) abbiamo che possiamo considerare l'approssimazione valida per quei t tali che:

$$\sum_{k \neq j} |\eta_j(t)|^2 \ll \frac{1}{\hbar^2} \quad (3.23)$$

Nel caso particolare in cui la hamiltoniana sia un sistema a due livelli abbiamo che la precedente si riduce a:

$$\frac{\left| \langle j(t) | \frac{dH}{dt} | k(t) \rangle \right|^2}{(\epsilon_j(t) - \epsilon_k(t))^4} \ll \frac{1}{\hbar^2} \quad (3.24)$$

potremo quindi considerare l'evoluzione come adiabatica *a partire* dall'istante iniziale t_0 , *fino* all'istante t per cui continua ad essere valida la (3.23) o la (3.24).

Abbandoniamo adesso l'ipotesi che a t_0 il sistema si trovi in un autostato della hamiltoniana. Definiamo una nuova base tramite la trasformazione unitaria $R(t)$, a partire dagli autostati istantanei dell'energia:

$$|\tilde{i}(t)\rangle \equiv R(t) |i(t)\rangle \quad (3.25a)$$

gli stati $|\tilde{i}(t)\rangle$ saranno autostati, istante per istante, dell'operatore

$$R(t) H(t) R^\dagger(t) \equiv \tilde{H}(t) \quad (3.25b)$$

con autovalori $\epsilon_i(t)$. Se $|\psi(t)\rangle$ è la soluzione dell'equazione di Schroedinger, vogliamo adesso determinare l'equazione soddisfatta da $|\tilde{\psi}(t)\rangle = R(t) |\psi(t)\rangle$; abbiamo:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle &= H(t) |\psi(t)\rangle \\ &= R^\dagger(t) R(t) H(t) R(t) |\psi(t)\rangle \\ &= R^\dagger(t) \tilde{H}(t) |\tilde{\psi}(t)\rangle \end{aligned} \quad (3.26)$$

moltiplicando a sinistra per $R(t)$ si ha:

$$\begin{aligned} i\hbar R(t) \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle &= i\hbar \frac{d}{dt} [R(t) |\psi(t)\rangle] - i\hbar \frac{dR}{dt} |\psi(t)\rangle \\ &= i\hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\psi}(t)\rangle - i\hbar \frac{dR}{dt} R^{-1}(t) |\tilde{\psi}(t)\rangle \\ &= \tilde{H}(t) |\tilde{\psi}(t)\rangle \end{aligned} \quad (3.27)$$

da cui:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\psi}(t)\rangle = \left[i\hbar \frac{dR}{dt} R^{-1}(t) + \tilde{H}(t) \right] |\tilde{\psi}(t)\rangle \quad (3.28)$$

che ha ancora la forma di un'equazione di Schroedinger. Chiamiamo $\tilde{U}(t, t_0)$ il propagatore della precedente; abbiamo che:

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = \tilde{U}(t, t_0) |\tilde{\psi}(t_0)\rangle \quad (3.29)$$

Sviluppiamo adesso lo stato $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ facendo uso della (3.4):

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = R(t) |\psi(t)\rangle = \sum_i a_i(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \epsilon_i(t') dt'} |\tilde{i}(t)\rangle \quad (3.30)$$

Procediamo esattamente come nel caso precedente e giungiamo a:

$$a'_j(t) = - \sum_i a_i(t) \langle \tilde{j}(t) | \left[\frac{d}{dt} - \frac{dR}{dt} R^{-1}(t) \right] |\tilde{i}(t)\rangle e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \epsilon_j(t') - \epsilon_i(t') dt'} \quad (3.31)$$

Calcoliamo separatamente:

$$\begin{aligned} & \langle \tilde{j}(t) | \left[\frac{d}{dt} - \frac{dR}{dt} R^{-1}(t) \right] |\tilde{i}(t)\rangle \\ &= \langle j(t) | R^{-1}(t) \left[\frac{d}{dt} - \frac{dR}{dt} R^{-1}(t) \right] R(t) |i(t)\rangle \\ &= \langle j(t) | R^{-1}(t) \left[\frac{d}{dt} R(t) - \frac{dR}{dt} R \right] |i(t)\rangle \end{aligned} \quad (3.32)$$

Valutiamo l'azione dell'operatore tra parentesi quadre su di uno stato $|\psi(t)\rangle$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} R(t) - \frac{dR}{dt} \right] |\psi(t)\rangle &= \frac{d}{dt} (R |\psi(t)\rangle) - \frac{dR}{dt} |\psi(t)\rangle \\ &= \frac{dR}{dt} |\psi(t)\rangle + R(t) \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle - \frac{dR}{dt} |\psi(t)\rangle \\ &= R(t) \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \end{aligned} \quad (3.33)$$

sostituendo in (3.32) abbiamo:

$$\begin{aligned} \langle j(t) | R^{-1}(t) \left[\frac{d}{dt} R(t) - \frac{dR}{dt} R \right] |i(t)\rangle &= \langle j(t) | R^{-1}(t) R(t) \frac{d}{dt} |i(t)\rangle \\ &= \langle j(t) | \frac{d}{dt} |i(t)\rangle \end{aligned} \quad (3.34)$$

usando la (3.31) riotteniamo la (3.7). Facciamo le due ipotesi analoghe a quelle fatte nel caso precedente:

- poiché la hamiltoniana varia lentamente supponiamo che tutte le quantità al secondo membro dipendenti dal tempo possano essere sostituite con il loro valore al tempo iniziale t_0 .

- supponiamo inoltre che a t_0 il sistema si trovi in un autostato $|\tilde{k}(t_0)\rangle$ di $\tilde{H}(t_0)$, ad esempio quello relativo all'autovalore $\epsilon_k(t_0)$.

Procedendo come nel caso precedente e tenendo conto delle (3.7) e (3.22) riotteniamo che possiamo considerare l'approssimazione valida per quei t tali che:

$$\sum_{k \neq j} |\eta_j(t)|^2 \ll \frac{1}{\hbar^2} \quad (3.35)$$

Naturalmente nel caso in cui la hamiltoniana sia un sistema a due livelli la precedente si riduce ancora una volta alla (3.24).

Ora, qualunque sia lo stato di partenza $|\tilde{k}(t_0)\rangle$, possiamo sempre trovare una trasformazione $R(t_0)$ tale che: $|\tilde{k}(t_0)\rangle = R(t_0)|k(t_0)\rangle$; per estendere la $R(t_0)$ agli istanti successivi osserviamo che:

$$\begin{aligned} |\tilde{k}(t)\rangle &= \tilde{U}(t, t_0) |\tilde{k}(t_0)\rangle \\ &= \tilde{U}(t, t_0) R(t_0) |k(t_0)\rangle \\ &= \tilde{U}(t, t_0) R(t_0) U^\dagger(t, t_0) |k(t)\rangle \end{aligned} \quad (3.36)$$

dove abbiamo usato la (3.29). Dalla (3.25a) definiamo:

$$R(t) \equiv \tilde{U}(t, t_0) R(t_0) U^\dagger(t, t_0) \quad (3.37)$$

Possiamo allora concludere che le condizioni (3.23) e (3.24) sono indipendenti dallo stato del sistema a t_0 .

3.3 Approssimazione impulsiva

L'approssimazione impulsiva, così come quella adiabatica, si basa su di un teorema che, a differenza del caso precedente, può essere facilmente dimostrato.

Scriviamo l'equazione per l'operatore di evoluzione $U_T(s)$ in forma integrale:

$$U_T(s) = 1 - \frac{i}{\hbar} T \int_0^s H(s) U_T(s) ds \quad (3.38a)$$

$$U_T(0) = 1 \quad (3.38b)$$

vediamo che per $T \rightarrow 0$ si ha:

$$\lim_{T \rightarrow 0} U_T(s) = 1 \quad (3.39)$$

e cioè lo stato al tempo $t = t_0 + sT$ è identico a quello al tempo $t = t_0$; in questo senso possiamo dire che lo stato è *congelato*.

L'approssimazione impulsiva consiste nell'estendere la validità del teorema precedente dal caso $T \rightarrow 0$ al caso in cui T è molto piccolo. Esattamente come per l'approssimazione adiabatica, per capire i limiti di applicabilità dell'approssimazione impulsiva calcoliamo la probabilità che essa fallisca. Supponiamo che lo stato iniziale del sistema sia $|\psi(0)\rangle$; notiamo che il valore di attesa dell'operatore $Q_0 = 1 - |\psi(0)\rangle \langle \psi(0)|$ calcolato sullo stato evoluto al tempo $t_f = t_0 + sT$, cioè $U_T(s) |\psi(0)\rangle$, è:

$$\langle \psi(0) | U_T^\dagger(s) Q_0 U_T(s) | \psi(0) \rangle \quad (3.40)$$

e rappresenta la probabilità che il sistema sia al tempo t in uno stato *diverso* da $|\psi(0)\rangle$ e quindi la probabilità che l'approssimazione impulsiva fallisca al tempo t ; per valutare questa quantità in modo approssimato consideriamo lo sviluppo di Dyson della (3.38a):

$$U_T(s) = 1 - \frac{i}{\hbar} T \int_0^s H(s_0) ds_0 + \left(\frac{i}{\hbar} T \right)^2 \int_0^s ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 H(s_1) H(s_2) + \dots \quad (3.41)$$

e ponendo

$$\bar{H}(t) = \int_0^s H(s_0) ds_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^t H(t') dt' \quad (3.42)$$

abbiamo:

$$\langle \psi(0) | U_T^\dagger(s) Q_0 U_T(s) | \psi(0) \rangle = \frac{T^2}{\hbar^2} \langle \psi(0) | \bar{H}(t) Q_0 \bar{H}(t) | \psi(0) \rangle + O(T^3) \quad (3.43)$$

considerando che:

$$\begin{aligned} \langle \psi(0) | \bar{H}(t) Q_0 \bar{H}(t) | \psi(0) \rangle &= \langle \psi(0) | \bar{H}^2(t) | \psi(0) \rangle - \langle \psi(0) | \bar{H}(t) | \psi(0) \rangle^2 \\ &= (\Delta \bar{H})^2(t) \end{aligned} \quad (3.44)$$

dove la quantità $(\Delta\bar{H})^2(t)$ rappresenta chiaramente la varianza di $\bar{H}(t)$, cioè della media di $H(t)$ calcolata fino all'istante t . La probabilità che l'approssimazione impulsiva fallisca al tempo t è allora:

$$\frac{T^2 (\Delta\bar{H})^2(t)}{\hbar^2} + O(T^3) \quad (3.45)$$

Pertanto consideremo l'approssimazione valida *fino* al tempo t se:

$$T\Delta\bar{H}(t) \ll \hbar \quad (3.46)$$

Capitolo 4

Campo oscillante

Sono possibili più scelte per la forma del campo magnetico ([8],[9],[10]). Generalmente, per sondare il comportamento del sistema alla transizione di fase, si sceglie un campo magnetico che attraversa il punto critico, che, come abbiamo visto, è $g = 1$ ([11]-[15]). Ad esempio si può supporre che esso decresca linearmente con il tempo ([16]-[17]):

$$g(t) = -\frac{t}{\tau_Q} \quad (4.1)$$

con $t \in [-\infty, 0]$ e τ_Q una costante che definisce la velocità con cui varia il campo.

Il campo magnetico g che abbiamo scelto è invece:

$$g(t) = g_0 + A \cos \omega t \quad (4.2)$$

con $\omega t \in [0, \pi]$; g_0 e A saranno tali che $g(t) > 1, \forall t$, in modo che *non* venga attraversato il punto critico. L'andamento è illustrato nella figura 4.1 per $g_0 = 2$, $A = 0.9$.

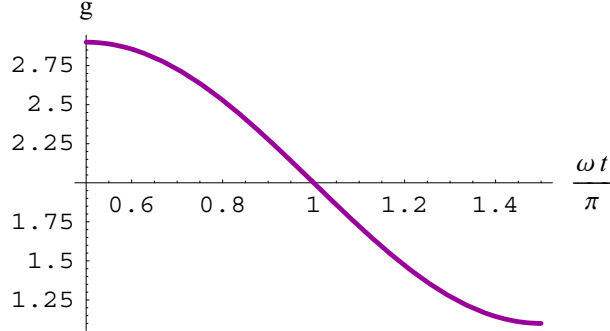


Figura 4.1: Andamento del campo magnetico $g(t) = g_0 + A \cos \omega t$ in funzione del tempo; i valori dei parametri sono: $g_0 = 2$, $A = 0.9$.

Applicheremo in seguito l'approssimazione adiabatica-impulsiva a ciascuno dei sistemi a due livelli di cui si compone la hamiltoniana (2.7) ([18]-[21]).

4.1 Approssimazione adiabatica-impulsiva

Determiniamo il comportamento di un sistema con $N = 20$ per differenti valori di A e ω . Supponiamo che il nostro stato iniziale sia:

$$|\psi(0)\rangle = |GS(0)\rangle = \sum_k |GS(0)\rangle_k \quad (4.3)$$

Ricordiamo che la hamiltoniana del sistema è la (2.7):

$$\sum_k H_k(t) = \sum_k [\epsilon_k^{GS}(t) |GS(t)\rangle_k \langle GS(t)| + \epsilon_k^{EX}(t) |EX(t)\rangle_k \langle EX(t)|] \quad (4.4)$$

essa rappresenta cioè N sistemi *indipendenti* a due livelli. Il gap tra i due livelli vale $\epsilon_k^{EX}(t) - \epsilon_k^{GS}(t) = 2\epsilon_k(t)$, $\forall k$. Mostriamo in figura 4.2 l'andamento di $2\epsilon_k(t)$ in funzione del tempo per $N = 20$, $g_0 = 2$, $A = 0.9$. I valori che assume ka sono (vedi la (1.25a)):

$$ka = \frac{2\pi}{N} \left(n_k + \frac{1}{2} \right) \quad (4.5)$$

con N pari al numero di siti, a pari al passo reticolare ed $n_k = 0, \dots, N-1$; in base alla (2.3a) $\epsilon_k(t)$ è una funzione periodica di ka ; si ha quindi che $\epsilon_k(t) = \epsilon_{k'}(t)$ con $k'a = \frac{2\pi}{N} \left[(n_k + jN) + \frac{1}{2} \right]$ e j intero.

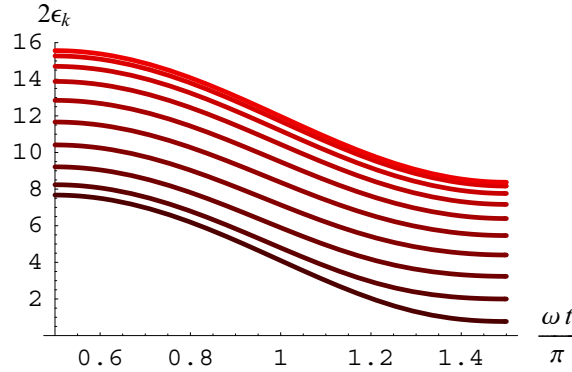


Figura 4.2: Andamento di $2\epsilon_k(t)$ in funzione del tempo. $g(t) = g_0 + A \cos \omega t$, $N = 20$, $g_0 = 2$, $A = 0.9$. Le curve si riferiscono a differenti valori di $ka = \frac{2\pi}{N} \left(n_k + \frac{1}{2} \right)$, la curva più scura, in basso, corrisponde $n_k = 0$, gradualmente le successive a $n_k = 1$, fino a $n_k = 9$.

Seguiremo due differenti strade per l'applicazione dell'approssimazione adiabatica-impulsiva; in entrambi i casi approssimeremo l'evoluzione del sistema distinguendo tre distinte fasi: una prima in cui essa sarà adiabatica, una seconda in cui sarà impulsiva ed una terza in cui sarà nuovamente adiabatica.

Nel primo caso, che chiameremo *approssimazione collettiva*, considereremo l'evoluzione del sistema nel suo complesso e, per stabilire l'applicabilità dell'approssimazione adiabatica, useremo la (3.23):

$$\sum_{k \neq j} |\eta_j(t)|^2 \ll \frac{1}{\hbar^2} \quad (4.6)$$

riferendoci alla (3.22) possiamo scrivere l'espressione per $|\eta_j(t)|^2$ nel nostro caso:

$$|\eta_j(t)|^2 = \frac{|\langle j(t) | \frac{dH}{dt} | GS(t) \rangle|^2}{(\epsilon^j(t) - \epsilon^{GS}(t))^4} \quad (4.7)$$

dove $|j(t)\rangle$ è un autostato di $H(t)$ e j è l'indice che lo contraddistingue, $\epsilon^j(t)$ è l'autovalore corrispondente, mentre $\epsilon^{GS}(t) = \sum_k \epsilon_k^{GS}(t)$ è l'energia del ground state del sistema. Il significato fisico della precedente può essere chiarito basandoci sui risultati dimostrati nel capitolo precedente; supponendo che all'istante iniziale $t = 0$ il sistema si trovi nello stato $|GS(0)\rangle$, e che la hamiltoniana varii lentamente, essa rappresenta la probabilità che all'istante t il sistema si trovi nello stato $|j(t)\rangle$.

Calcoliamo inizialmente i termini in cui:

$$|j(t)\rangle = |EX(t)\rangle_j \prod_{k \neq j} |GS(t)\rangle_k \quad (4.8)$$

cioè in cui nello stato finale *un solo modo* j si trova nello stato eccitato; definendo:

$$|GS(t)\rangle_{-[l]} = \prod_{k \neq l} |GS(t)\rangle_k \quad (4.9)$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} |\eta_j(t)|^2 &= \frac{\left| \langle EX(t) |_{-[j]} \langle GS(t) | \frac{d \sum_i H_i}{dt} |GS(t)\rangle \right|^2}{\left(\epsilon_j^{EX}(t) + \sum_{k \neq j} \epsilon_k^{GS}(t) - \sum_k \epsilon_k^{GS}(t) \right)^4} \\ &= \frac{\left| \sum_i [j \langle EX(t) |_{-[j]} \langle GS(t) | \frac{d H_i}{dt} |GS(t)\rangle] \right|^2}{\left(\epsilon_j^{EX}(t) - \epsilon_j^{GS}(t) \right)^4} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Calcoliamo il numeratore della (4.10); a questo scopo deriviamo in primo luogo la (2.7), essa vale $\forall k$:

$$\begin{aligned} &\underbrace{\left(\frac{d}{dt} \epsilon_k^{GS}(t) \right) |GS(t)\rangle_k \langle GS(t)|}_{1.} + \underbrace{\epsilon_k^{GS}(t) \left(\frac{d}{dt} |GS(t)\rangle_k \right) \langle GS(t)|}_{2.} \\ &+ \underbrace{\epsilon_k^{GS}(t) |GS(t)\rangle_k \left(\frac{d}{dt} \langle GS(t) | \right)}_{3.} + \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \epsilon_k^{EX}(t) \right) |EX(t)\rangle_k \langle EX(t)|}_{4.} \\ &+ \underbrace{\epsilon_k^{EX}(t) \left(\frac{d}{dt} |EX(t)\rangle_k \right) \langle EX(t)|}_{5.} + \underbrace{\epsilon_k^{EX}(t) |EX(t)\rangle_k \left(\frac{d}{dt} \langle EX(t) | \right)}_{6.} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Utilizzando la precedente, è possibile mostrare che della sommatoria al numeratore della (4.10) sopravvive solo il termine per cui $i = j$; eseguendo il calcolo nel dettaglio si ha che:

$$|\eta_j(t)|^2 = \frac{\left| {}_j \langle EX(t) | \frac{dH_j}{dt} | GS(t) \rangle_j \right|^2}{(\epsilon_j^{EX}(t) - \epsilon_j^{GS}(t))^4} \quad (4.12)$$

Calcoliamo allora, servendoci della (4.11), l'elemento di matrice (d'ora in poi sostituirò l'indice k all'indice j):

$${}_k \langle EX(t) | \frac{d}{dt} H_k(t) | GS(t) \rangle_k \quad (4.13)$$

Valutiamone separatamente gli addendi, ricordando che con il ' indichiamo l'operazione di derivazione rispetto al tempo:

1.

$$\begin{aligned} & {}_k \langle EX(t) | \left[\left(\frac{d}{dt} \epsilon_k^{GS}(t) \right) | GS(t) \rangle_k \right] | GS(t) \rangle_k \\ &= \left(\frac{d}{dt} \epsilon_k^{GS}(t) \right) {}_k \langle EX(t) | GS(t) \rangle_k {}_k \langle GS(t) | GS(t) \rangle_k = 0 \end{aligned} \quad (4.14a)$$

2.

$$\begin{aligned} & \epsilon_k^{GS}(t) {}_k \langle EX(t) | \left[\left(\frac{d}{dt} | GS(t) \rangle_k \right) | GS(t) \rangle_k \right] | GS(t) \rangle_k \\ &= \epsilon_k^{GS}(t) {}_k \langle EX(t) | \frac{d}{dt} | GS(t) \rangle_k \\ &= \epsilon_k^{GS}(t) \left[\langle 0 | (-b_k^*(t) + a_k^*(t) c_k c_{-k}) \frac{d}{dt} (a_k^*(t) + b_k^*(t) c_{-k}^\dagger c_k^\dagger) | 0 \rangle \right] \\ &= \epsilon_k^{GS}(t) \left[\langle 0 | (-b_k^*(t) + a_k^*(t) c_k c_{-k}) (a_k'^*(t) + b_k'^*(t) c_{-k}^\dagger c_k^\dagger) | 0 \rangle \right] \\ &= \epsilon_k^{GS}(t) \left[-b_k^*(t) a_k'^*(t) + a_k^*(t) b_k'^*(t) \langle 0 | (c_k c_{-k} c_{-k}^\dagger c_k^\dagger) | 0 \rangle \right] \\ &= \epsilon_k^{GS}(t) (-b_k^*(t) a_k'^*(t) + a_k^*(t) b_k'^*(t)) \\ &= \epsilon_k^{GS}(t) (b_k(t) a_k'(t) - a_k(t) b_k'(t)) \end{aligned} \quad (4.14b)$$

3.

$$\epsilon_k^{GS}(t) \langle EX(t) | \left[|GS(t)\rangle_k \left(\frac{d}{dt} \langle GS(t) | \right) \right] |GS(t)\rangle_k = 0 \quad (4.14c)$$

4.

$$\left(\frac{d}{dt} \epsilon_k^{EX}(t) \right) \langle EX(t) | [|EX(t)\rangle_k \langle EX(t)|] |GS(t)\rangle_k = 0 \quad (4.14d)$$

5.

$$\begin{aligned} & \epsilon_k^{EX}(t) \langle EX(t) | \left[\left(\frac{d}{dt} |EX(t)\rangle_k \right) \langle EX(t) | \right] |GS(t)\rangle_k \\ &= \epsilon_k^{EX}(t) \left(\frac{d}{dt} \langle EX(t) | \right) |GS(t)\rangle_k \\ &= \epsilon_k^{EX}(t) \left\{ \left[\frac{d}{dt} \langle 0 | (-b_k^*(t) + a_k^*(t) c_k c_{-k}) \right] \left(a_k^*(t) + b_k^*(t) c_{-k}^\dagger c_k^\dagger \right) |0\rangle \right\} \\ &= \epsilon_k^{EX}(t) \left[\langle 0 | (-b_k'^*(t) + a_k'^*(t) c_k c_{-k}) \left(a_k^*(t) + b_k^*(t) c_{-k}^\dagger c_k^\dagger \right) |0\rangle \right] \\ &= \epsilon_k^{EX}(t) \left[-b_k'^*(t) a_k^*(t) + a_k'^*(t) b_k^*(t) \langle 0 | \left(c_k c_{-k} c_{-k}^\dagger c_k^\dagger \right) |0\rangle \right] \\ &= \epsilon_k^{EX}(t) (-b_k'^*(t) a_k^*(t) + a_k'^*(t) b_k^*(t)) \\ &= \epsilon_k^{EX}(t) (b_k'(t) a_k(t) - a_k'(t) b_k(t)) \end{aligned} \quad (4.14e)$$

6.

$$\epsilon_k^{EX}(t) \langle EX(t) | \left[|EX(t)\rangle_k \frac{d}{dt} \langle EX(t) | \right] |GS(t)\rangle_k = 0 \quad (4.14f)$$

La loro somma vale pertanto:

$$\begin{aligned} & \epsilon_k^{GS}(t) (b_k(t) a_k'(t) - a_k(t) b_k'(t)) + \epsilon_k^{EX}(t) (b_k'(t) a_k(t) - a_k'(t) b_k(t)) \\ &= (\epsilon_k^{EX}(t) - \epsilon_k^{GS}(t)) (a_k(t) b_k'(t) - b_k(t) a_k'(t)) \\ &= 2\epsilon_k(t) (a_k(t) b_k'(t) - b_k(t) a_k'(t)) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Sostituendo nella (4.12) abbiamo:

$$\begin{aligned}
 |\eta_k(t)|^2 &= \frac{|\langle k | EX(t) | \frac{dH_k}{dt} | GS(t) \rangle_k|^2}{(2\epsilon_k(t))^4} \\
 &= \frac{|2\epsilon_k(t) (a_k(t) b'_k(t) - b_k(t) a'_k(t))|^2}{(2\epsilon_k(t))^4} \\
 &= \frac{|a_k(t) b'_k(t) - b_k(t) a'_k(t)|^2}{(2\epsilon_k(t))^2}
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

In figura 4.3 e 4.4 sono illustrati gli andamenti di $|\eta_k(t)|^2$ per $N = 20$, $g_0 = 2$, $A = 0.9$, $\omega = 10$.

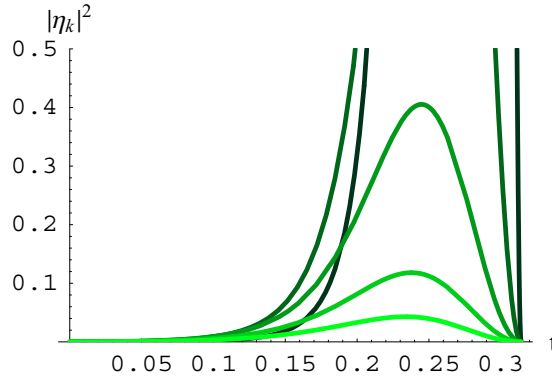


Figura 4.3: Andamento di $|\eta_k(t)|^2$ in funzione del tempo. I parametri utilizzati sono $N = 20$, $g_0 = 2$, $A = 0.9$, $\omega = 10$. Le curve si riferiscono a differenti valori di $ka = \frac{2\pi}{N} (n_k + \frac{1}{2})$; la curva più scura corrisponde a $n_k = 0$, gradualmente le successive a $n_k = 1$, fino a $n_k = 4$.

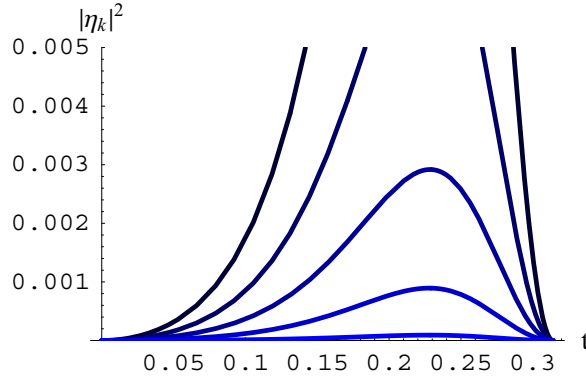


Figura 4.4: Andamento di $|\eta_k(t)|^2$ in funzione del tempo. I parametri utilizzati sono $N = 20$, $g_0 = 2$, $A = 0.9$, $\omega = 10$. Le curve si riferiscono a differenti valori di $ka = \frac{2\pi}{N} (n_k + \frac{1}{2})$; la curva più scura, in alto, corrisponde a $n_k = 5$, gradualmente le successive a $n_k = 6$, fino a $n_k = 9$.

Valutiamo ora i termini di (4.7) in cui:

$$|j(t)\rangle = |EX(t)\rangle_l |EX(t)\rangle_m |GS(t)\rangle_{-[l,m]} \quad (4.17)$$

cioè in cui *due soli modi* l e m si trovano nello stato eccitato; avendo definito:

$$|GS(t)\rangle_{-[l,m]} = \prod_{k \neq l,m} |GS(t)\rangle_k \quad (4.18)$$

Procedendo in maniera analoga a quanto fatto per calcolare la (4.10), calcoliamo ora l'elemento di matrice:

$$\begin{aligned} & {}_{-[l,m]} \langle GS(t) | {}_l \langle EX(t) | {}_m \langle EX(t) | \frac{d \sum_k H_k}{dt} |GS(t)\rangle \\ &= \sum_k {}_{-[l,m]} \langle GS(t) | {}_l \langle EX(t) | {}_m \langle EX(t) | \frac{dH_k}{dt} |GS(t)\rangle \end{aligned} \quad (4.19)$$

calcoliamo i singoli addendi:

1.

$$\begin{aligned} & \sum_k \left(\frac{d}{dt} \epsilon_k^{GS}(t) \right) ({}_1 \langle GS(t) | \dots {}_k \langle GS(t) | \dots {}_l \langle EX(t) | {}_m \langle EX(t) | \dots) \\ & (|GS(t)\rangle_k {}_k \langle GS(t) |) (|GS(t)\rangle_1 \dots |GS(t)\rangle_k \dots) = 0 \end{aligned} \quad (4.20a)$$

2.

$$\sum_k \epsilon_k^{GS}(t) ({}_1 \langle GS(t) | \dots {}_k \langle GS(t) | \dots {}_l \langle EX(t) | {}_m \langle EX(t) | \dots) \left[\left(\frac{d}{dt} |GS(t)\rangle_k \right) {}_k \langle GS(t) | \right] (|GS(t)\rangle_1 \dots |GS(t)\rangle_k \dots) = 0 \quad (4.20b)$$

3.

$$\sum_k \epsilon_k^{GS}(t) ({}_1 \langle GS(t) | \dots {}_k \langle GS(t) | \dots {}_l \langle EX(t) | {}_m \langle EX(t) | \dots) \left[|GS(t)\rangle_k \left(\frac{d}{dt} {}_k \langle GS(t) | \right) \right] (|GS(t)\rangle_1 \dots |GS(t)\rangle_k \dots) = 0 \quad (4.20c)$$

4.

$$\sum_k \left(\frac{d}{dt} \epsilon_k^{GS}(t) \right) ({}_1 \langle GS(t) | \dots {}_k \langle GS(t) | \dots {}_l \langle EX(t) | {}_m \langle EX(t) | \dots) \left[|EX(t)\rangle_k {}_k \langle EX(t) | \right] (|GS(t)\rangle_1 \dots |GS(t)\rangle_k \dots) = 0 \quad (4.20d)$$

5.

$$\sum_k \epsilon_k^{EX}(t) ({}_1 \langle GS(t) | \dots {}_k \langle GS(t) | \dots {}_l \langle EX(t) | {}_m \langle EX(t) | \dots) \left[\left(\frac{d}{dt} |EX(t)\rangle_k \right) {}_k \langle EX(t) | \right] (|GS(t)\rangle_1 \dots |GS(t)\rangle_k \dots) = 0 \quad (4.20e)$$

6.

$$\sum_k \epsilon_k^{GS}(t) ({}_1 \langle GS(t) | \dots {}_k \langle GS(t) | \dots {}_l \langle EX(t) | {}_m \langle EX(t) | \dots) \left[|EX(t)\rangle_k \frac{d}{dt} {}_k \langle EX(t) | \right] (|GS(t)\rangle_1 \dots |GS(t)\rangle_k \dots) = 0 \quad (4.20f)$$

In maniera analoga è possibile mostrare che tutti i termini (4.7) in cui nello stato finale è presente *più di un modo* nello stato eccitato sono nulli. Pertanto, nel caso che abbiamo chiamato approssimazione collettiva, basandoci su (4.7) e (4.12), per stabilire l'applicabilità dell'approssimazione adiabatica useremo la:

$$\sum_k \frac{|{}_k \langle EX(t) | \frac{dH_k}{dt} |GS(t)\rangle_k|^2}{(\epsilon_k^{EX}(t) - \epsilon_k^{GS}(t))^4} \ll \frac{1}{\hbar^2} \quad (4.21)$$

Nel secondo caso, che chiameremo *approssimazione con modi indipendenti*, considereremo l'evoluzione *modo per modo*. Ricordiamo che ad ogni modo k corrisponde un sistema a due livelli; i due autovalori dell'energia sono $\epsilon_k^{EX}(t)$ e $\epsilon_k^{GS}(t)$ e $|EX(t)\rangle_k$ e $|GS(t)\rangle_k$ sono gli autostati corrispondenti. Di conseguenza, usando la (3.24):

$$|\eta_k(t)|^2 \ll \frac{1}{\hbar^2} \quad (4.22)$$

abbiamo che per stabilire l'applicabilità dell'approssimazione adiabatica al modo k useremo la:

$$\frac{|{}_k\langle EX(t) | \frac{dH_k}{dt} | GS(t)\rangle_k|^2}{(\epsilon_k^{EX}(t) - \epsilon_k^{GS}(t))^4} \ll \frac{1}{\hbar^2} \quad (4.23)$$

4.1.1 Approssimazione collettiva

L'approssimazione adiabatica è applicabile, come visto nel capitolo precedente fino a che:

$$\sum_k |\eta_k(t)|^2 \ll \frac{1}{\hbar^2} \quad (4.24)$$

con $|\eta_k(t)|^2$ calcolata in (4.12); poniamo $\hbar = 1$ e stabiliamo arbitrariamente che l'approssimazione sia vera per

$$\sum_k |\eta_k(t)|^2 \leq 0.01 \quad (4.25)$$

Come si deduce dalla figura 4.5 potremo considerare l'evoluzione adiabatica fino ad un istante che chiamiamo \hat{t}_1 che è quindi definito dalla seguente equazione:

$$\sum_k |\eta_k(\hat{t}_1)|^2 = 0.01 \quad (4.26)$$

Tenendo conto della (2.6), la probabilità che il sistema *non* si trovi nel ground state istantaneo a \hat{t}_1 vale esattamente:

$$p^{GS}(\hat{t}_1) = 1 - \prod_k |\alpha_k^*(\hat{t}_1)|^2 \quad (4.27)$$

D'altra parte, secondo l'approssimazione adiabatica, lo stato a \hat{t}_1 è:

$$|\psi(\hat{t}_1)\rangle \simeq \prod_k |GS(\hat{t}_1)\rangle_k \quad (4.28)$$

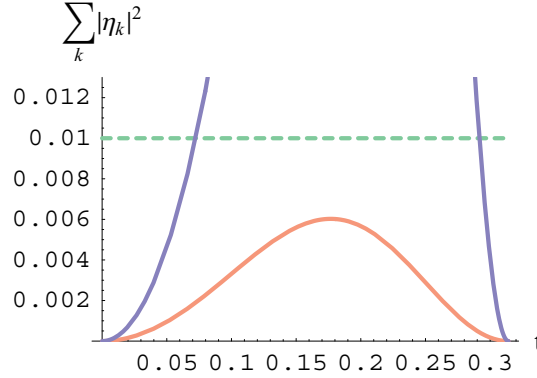


Figura 4.5: Andamento di $\sum_k |\eta_k(t)|^2$ in funzione del tempo; $g(t) = g_0 + A \cos \omega t$. Curva azzurra: i parametri utilizzati sono $N = 20$, $g_0 = 2$, $A = 0.3$, $\omega = 10$; curva rosa: i parametri utilizzati sono $N = 20$, $g_0 = 2$, $A = 0.1$, $\omega = 10$; la linea tratteggiata corrisponde al valore 0.01. Vediamo che l'equazione (4.26) o non ammette alcuna soluzione, oppure ammette due soluzioni: \hat{t}_1 e \hat{t}_2 . Con l'approssimazione fatta l'evoluzione è adiabatica da $t = 0$ fino a \hat{t}_1 , impulsiva da \hat{t}_1 a \hat{t}_2 e nuovamente adiabatica da \hat{t}_2 a $t = \frac{\pi}{\omega}$.

dove con il simbolo \simeq intendiamo che stiamo trascurando un fattore di fase globale. Chiamando $p_{approx}^{GS}(\hat{t}_1)$ la $p^{GS}(\hat{t}_1)$ calcolata nella nostra approssimazione, avremo che:

$$p^{GS}(\hat{t}_1) = 1 - \prod_k |\alpha_k^*(\hat{t}_1)|^2 \simeq 0 \quad (4.29)$$

Per avere un'idea della bontà dell'approssimazione fatta calcoliamo $p^{GS}(\hat{t}_1)$ anche tramite integrazione numerica dell'equazione di Schroedinger ($p_{num}^{GS}(\hat{t}_1)$). I risultati sono illustrati nella tabella 4.1. Notiamo il comportamento dei valori di $p^{GS}(\hat{t}_1)$, fissata A e all'aumentare di ω ; essa inizialmente è nulla, raggiunge poi un massimo, infine torna nulla.

A	ω	$p_{num}^{GS}(\hat{t}_1)$
0.1	15	0
0.1	50	0
0.1	100	0.0003
0.1	1000	0
0.3	1	0
0.3	5	0
0.3	10	0.0007
0.3	100	0
0.6	1	0
0.6	5	0.0042
0.6	10	0.0005
0.6	100	0
0.9	0.5	0.0082
0.9	0.65	0.0081
0.9	0.75	0.0081
0.9	1	0.0298
0.9	5	0.1981
0.9	10	0.0006
0.9	100	0

Tabella 4.1: Valori di $p_{num}^{GS}(\hat{t}_1)$ calcolati attraverso integrazione numerica dell'equazione di Schroedinger, per diversi valori di A e ω ; $g(t) = g_0 + A \cos \omega t$, $N = 20$, $g_0 = 2$. Notiamo che, fissata A e all'aumentare di ω , $p_{num}^{GS}(\hat{t}_1)$ è inizialmente nulla, raggiunge poi un massimo, infine torna nulla. L'approssimazione è soddisfacente per $A = 0.1, 0.3, 0.6$.

Confrontiamo i risultati in tabella 4.1 con la previsione fatta dall'approssimazione adiabatica in (4.27). Abbiamo che l'approssimazione è soddisfacente per $A = 0.1, 0.3, 0.6$, essendo i valori di $p_{num}^{GS}(\hat{t}_1)$ dell'ordine di 0.1% o meno. Per $A = 0.9$ i valori di $p_{num}^{GS}(\hat{t}_1)$ sono dell'ordine di 1%, tranne un caso isolato in cui sono $\sim 10\%$.

Continuiamo a seguire l'evoluzione del sistema; osservando la figura 4.5, notiamo che, si possono presentare due casi; l'equazione (4.26) non ammette alcuna soluzione: in tal caso l'evoluzione del sistema rimane adiabatica per tutto l'intervallo di tempo; viceversa l'equazione (4.26) può ammettere due soluzioni. In quest'ultimo caso, chiamiamo \hat{t}_2 la seconda soluzione dell'equazione (4.26).

Come abbiamo mostrato nel capitolo precedente, la condizione che permette di stabilire l'applicabilità dell'approssimazione adiabatica *non* dipende dallo stato di partenza, pertanto, *indipendentemente* dal comportamento del sistema tra \hat{t}_1 e \hat{t}_2 , potremo considerare la sua evoluzione come adiabatica da \hat{t}_2 a $t = \frac{\pi}{\omega}$. Facciamo l'ulteriore approssimazione che lo stato sia congelato da \hat{t}_1 a \hat{t}_2 :

$$|\psi(\hat{t}_2)\rangle \simeq \prod_k |GS(\hat{t}_1)\rangle_k \quad (4.30)$$

Vogliamo ora calcolare la probabilità che il modo k si trovi nello stato eccitato, in un istante t compreso tra \hat{t}_1 e \hat{t}_2 ; dalla (2.6) vediamo che essa vale $|\beta_k^*(t)|^2$; abbiamo che:

$$\begin{aligned} \beta_k^*(t) &= {}_k \langle EX(t) | \psi(t) \rangle_k \\ &= {}_k \langle EX(t) | GS(\hat{t}_1) \rangle_k \\ &= \langle 0 | (-b_k^*(t) + a_k^*(t) c_k c_{-k}) (a_k^*(\hat{t}_1) + b_k^*(\hat{t}_1) c_{-k}^\dagger c_k^\dagger) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \left(-b_k^*(t) a_k^*(\hat{t}_1) - b_k^*(t) b_k^*(\hat{t}_1) c_{-k}^\dagger c_k^\dagger + \right. \\ &\quad \left. + a_k^*(t) a_k^*(\hat{t}_1) c_k c_{-k} + a_k^*(t) b_k^*(\hat{t}_1) c_k c_{-k} c_{-k}^\dagger c_k^\dagger \right) | 0 \rangle \\ &= -b_k^*(t) a_k^*(\hat{t}_1) + a_k^*(t) b_k^*(\hat{t}_1) \\ &= a_k(\hat{t}_1) b_k(t) - a_k(t) b_k(\hat{t}_1) \end{aligned} \quad (4.31a)$$

analogamente è possibile calcolare:

$$\begin{aligned} \alpha_k^*(t) &= {}_k \langle GS(t) | \psi(t) \rangle_k \\ &= {}_k \langle GS(t) | GS(\hat{t}_1) \rangle_k \\ &= a_k^*(t) a_k^*(\hat{t}_1) + b_k(t) b_k^*(\hat{t}_1) \\ &= a_k(\hat{t}_1) a_k(t) - b_k(t) b_k(\hat{t}_1) \end{aligned} \quad (4.31b)$$

ricorrendo alle proprietà di a_k e b_k troviamo facilmente che:

$$\alpha_k^*(t) = \alpha_k(t) \quad (4.31c)$$

$$\beta_k^*(t) = -\beta_k(t) \quad (4.31d)$$

Cerchiamo adesso di capire meglio il ruolo di ogni modo; a tal fine rappresentiamo, singolarmente modo per modo, la probabilità $|\beta_k(\hat{t}_2)|^2$ che esso si

trovi nello stato eccitato al tempo \hat{t}_2 , nell'approssimazione fatta. La figura 4.6 illustra i valori di $|\beta_k(\hat{t}_2)|^2$, $\forall k$, per i valori dei parametri $N = 20$, $g_0 = 2$, $A = 0.6$, $\omega = 10$.

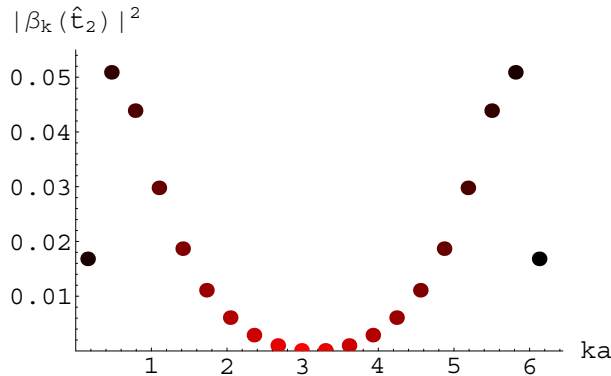


Figura 4.6: Andamento di $|\beta_k(\hat{t}_2)|^2$ in funzione di ka ; $g(t) = g_0 + A \cos \omega t$, $N = 20$, $g_0 = 2$, $A = 0.6$, $\omega = 10$. I punti si riferiscono a differenti valori di $ka = \frac{2\pi}{N} (n_k + \frac{1}{2})$. Il punto più scuro corrisponde a $n_k = 0$ e ad $n_k = 19$, gradualmente i successivi a $n_k = 1$ e ad $n_k = 18$, fino a $n_k = 9$ e ad $n_k = 10$. Si vede che ai modi centrali corrispondono valori di $|\beta_k(\hat{t}_2)|^2$ più piccoli.

Un quadro più completo si ha osservando la figura 4.7. In quest'ultima si è scelto un valore per A e si è effettuato un campionamento per differenti valori di ω ; la ω minima è stata scelta in maniera tale che al di sotto di essa i valori di $|\beta_k(\hat{t}_2)|^2$ fossero praticamente nulli, $\forall k$; la ω massima, invece, è stata scelta in maniera tale che al di sopra di essa i valori di $|\beta_k(\hat{t}_2)|^2$, $\forall k$ rimanessero invariati alla quarta cifra decimale.

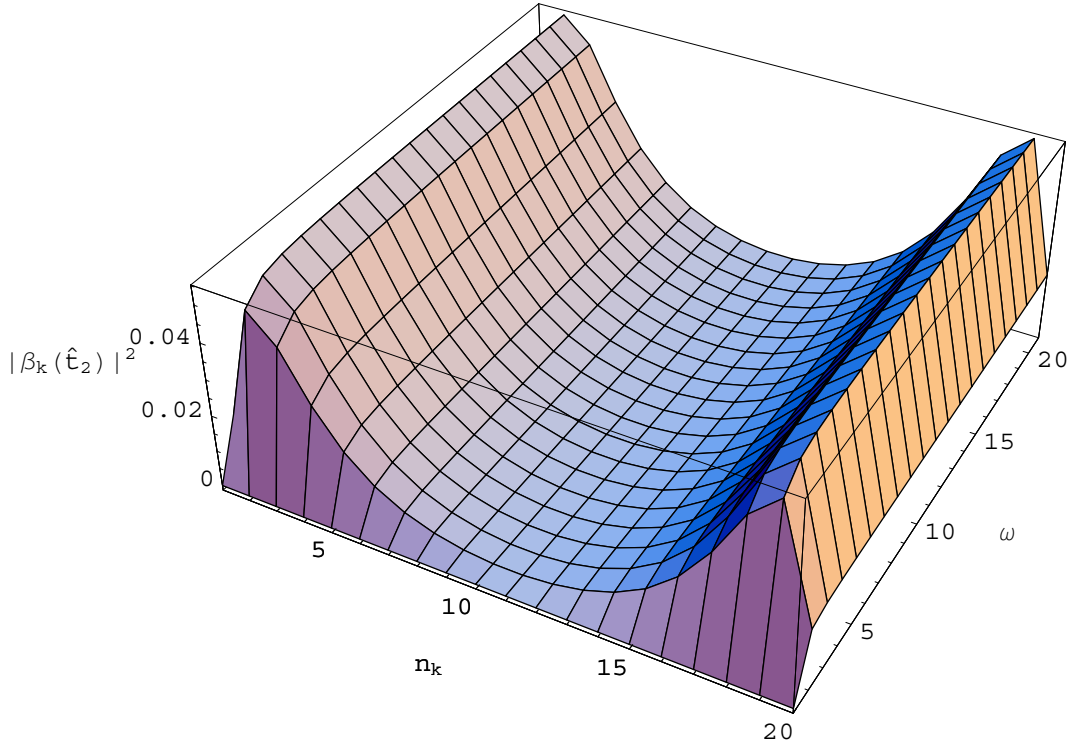


Figura 4.7: Andamento di $|\beta_k(\hat{t}_2)|^2$ in funzione di n_k (vedi (4.5)) e di ω . $g(t) = g_0 + A \cos \omega t$, $N = 20$, $g_0 = 2$, $A = 0.6$. Le ω sono state campionate a partire $\omega = 1$, fino a $\omega = 101$, con step di 5. Vi è un intervallo centrale di ka per cui le $|\beta_k(\hat{t}_2)|^2$ sono piccole, indipendentemente dal valore di ω .

Si ha che con $g_0 = 2$, $A = 0.6$ le $|\beta_k(\hat{t}_2)|^2$ sono sempre inferiori a 0.04; notiamo inoltre che esiste un intervallo di k per cui l'evoluzione è sempre adiabatica; esistono, in altre parole, due k di taglio al di sopra ed al di sotto dei quali le $|\beta_k(\hat{t}_2)|^2$ sono piccoli, indipendentemente dal valore di ω .

Dall'istante di tempo \hat{t}_2 fino a $t = \frac{\pi}{\omega}$, nell'approssimazione fatta, l'evoluzione del sistema prosegue adiabaticamente. Pertanto la probabilità che il singolo

modo k sia nello stato eccitato al tempo $t = \frac{\pi}{\omega}$ è:

$$|\beta_k^*(\hat{t}_2)|^2 \simeq \left| \beta_k^* \left(\frac{\pi}{\omega} \right) \right|^2 \quad (4.32)$$

La probabilità che il sistema nel suo complesso non si trovi nel ground state a $t = \frac{\pi}{\omega}$ è esattamente:

$$p^{GS} \left(\frac{\pi}{\omega} \right) = 1 - \prod_k \left| \alpha_k^* \left(\frac{\pi}{\omega} \right) \right|^2 \quad (4.33)$$

con, nell'approssimazione fatta:

$$|\alpha_k(\hat{t}_2)|^2 \simeq \left| \alpha_k \left(\frac{\pi}{\omega} \right) \right|^2 \quad (4.34)$$

Anche in questo caso, calcoliamo $p^{GS} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)$ in due modi: con l'approssimazione fatta, e quindi tramite la (4.34) ($p_{approx_G}^{GS} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)$); mediante l'integrazione numerica dell'equazione di Schroedinger ($p_{num}^{GS} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)$). Definiamo la deviazione relativa tra queste due grandezze:

$$\Delta_G = \frac{\left| p_{approx_G}^{GS} \left(\frac{\pi}{\omega} \right) - p_{num}^{GS} \left(\frac{\pi}{\omega} \right) \right|}{\frac{p_{approx_G}^{GS} \left(\frac{\pi}{\omega} \right) + p_{num}^{GS} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)}{2}} \quad (4.35)$$

I risultati sono illustrati nella tabella 4.2. Facciamo alcune annotazioni:

- fissata A , all'aumentare di ω , i valori di $p_{approx_G}^{GS} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)$ e di $p_{num}^{GS} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)$ aumentano, pur rimanendo dello stesso ordine di grandezza; per ω molto grande si stabilizzano.
- all'aumentare di A i valori di $p_{approx_G}^{GS} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)$ e di $p_{num}^{GS} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)$ aumentano e diventano di ordini di grandezza differenti.
- i valori di $p_{approx_G}^{GS} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)$ e di $p_{num}^{GS} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)$ sono sempre dello stesso ordine di grandezza. Solo per ω estremamente piccole il valore di Δ_G supera il 10%, altrimenti si mantiene sempre di ordine inferiore o uguale a 1%. L'approssimazione può essere considerata soddisfacente, tranne che per ω piccole.

- il valore di Δ_G diminuisce all'aumentare di ω , pertanto l'accuratezza dell'approssimazione aumenta all'aumentare di ω .

Cerchiamo di capire, facendo riferimento alla (2.19), quando possiamo interpretare la probabilità che il sistema non si trovi nel ground state come il numero totale di fermioni. È necessario valutare, $\forall k$, $|\beta_k(\hat{t}_2)|^2$, ed assicurarsi che sia circa nullo. Riportiamo i risultati:

- $A = 0.1$, nell'intervallo $10 \div 10^8$ di ω si ha che $|\beta_k(\hat{t}_2)|^2 < 0.002, \forall k$.
- $A = 0.3$, nell'intervallo $10 \div 10^5$ di ω si ha che $|\beta_k(\hat{t}_2)|^2 < 0.01, \forall k$.
- $A = 0.6$, si ha che $|\beta_k(\hat{t}_2)|^2 \simeq 0, \forall k$ solo per $\omega \simeq 1$; osservando la tabella 4.2 notiamo che per $\omega = 1$ l'evoluzione del sistema è adiabatica durante tutto l'intervallo di tempo.
- $A = 0.9$, si ha che $|\beta_k(\hat{t}_2)|^2 \simeq 0, \forall k$ solo per $\omega \simeq 0.1$; osservando la tabella 4.2 notiamo che per $\omega = 0.1$ l'evoluzione del sistema è adiabatica durante tutto l'intervallo di tempo.

A	ω	$p_{approx_G}^{GS}(\frac{\pi}{\omega})$	$p_{num}^{GS}(\frac{\pi}{\omega})$	Δ_G
0.1	15	0.0021	0.0076	1.1317
0.1	50	0.0078	0.0083	0.0639
0.1	65	0.0080	0.0083	0.0372
0.1	100	0.0082	0.0083	0.0155
0.1	200	0.0083	0.0083	0.0038
0.1	1000	0.0083	0.0083	0.0001
0.1	10000	0.0083	0.0083	$\sim 10^{-5}$
0.3	1	0	0.0003	2
0.3	5	0.0276	0.0357	0.2553
0.3	10	0.0615	0.0627	0.0197
0.3	20	0.0727	0.0730	0.0039
0.3	30	0.0750	0.0751	0.0017
0.3	50	0.0762	0.0762	0.0006
0.3	65	0.0765	0.0765	0.0008
0.3	100	0.0767	0.0767	0.0001
0.3	1000	0.0769	0.0769	$\sim 10^{-6}$
0.3	10000	0.0769	0.0769	$\sim 10^{-6}$
0.6	1	0	0.0113	2
0.6	5	0.2681	0.1877	0.3530
0.6	10	0.3085	0.2820	0.0880
0.6	30	0.3253	0.3222	0.0096
0.6	100	0.3275	0.3272	0.0009
0.6	200	0.3277	0.3276	0.0002
0.6	1000	0.3277	0.3277	$\sim 10^{-6}$
0.6	10000	0.3277	0.3277	$\sim 10^{-6}$
0.9	0.1	0	0.0044	2
0.9	0.15	0.0325	0.0164	0.6526
0.9	0.5	0.3827	0.1271	1.0025
0.9	0.65	0.4520	0.1675	0.9181
0.9	0.75	0.4870	0.1924	0.8672
0.9	1	0.5504	0.2479	0.7580
0.9	5	0.7439	0.6380	0.1531
0.9	10	0.7689	0.7397	0.0387
0.9	18	0.7771	0.7680	0.0116
0.9	25	0.7790	0.7743	0.0060
0.9	100	0.7812	0.7812	$\sim 10^{-6}$
0.9	1000	0.7812	0.7812	$\sim 10^{-6}$

Tabella 4.2: Valori di $p_{approx_G}^{GS}(\frac{\pi}{\omega})$ calcolati utilizzando la (4.33), di $p_{num}^{GS}(\frac{\pi}{\omega})$, calcolati attraverso integrazione numerica dell'equazione di Schroedinger e di Δ_G , definita in (4.35), per diversi valori di A e ω ; $g(t) = g_0 + A \cos \omega t$, $N = 20$, $g_0 = 2$. Per ogni valore di A si è scelta la ω minima in modo che $p^{GS}(\frac{\pi}{\omega})$ fosse nulla per ω inferiori. Notiamo l'efficacia dell'approssimazione, soprattutto per grandi valori di ω .

4.1.2 Approssimazione con modi indipendenti

Consideriamo adesso l'evoluzione del sistema *modo per modo*; in questo caso, l'approssimazione adiabatica è applicabile, per il singolo modo k , fino all'istante $\hat{t}_1^{(k)}$ definito dalla seguente equazione:

$$\left| \eta_k \left(\hat{t}_1^{(k)} \right) \right|^2 = 0.01 \quad (4.36)$$

con $\left| \eta_k \left(\hat{t}_1^{(k)} \right) \right|^2$ calcolata in (4.12). Secondo l'approssimazione adiabatica, lo stato relativo al modo k a $\hat{t}_1^{(k)}$ sarà:

$$\left| \psi \left(\hat{t}_1^{(k)} \right) \right\rangle_k \simeq \left| GS \left(\hat{t}_1^{(k)} \right) \right\rangle_k \quad (4.37)$$

dove con il simbolo \simeq intendiamo che stiamo trascurando un fattore di fase. Osservando la figura 4.8 notiamo che, $\forall k$, si possono presentare due casi: l'equazione (4.36) non ammette alcuna soluzione, ed in tal caso l'evoluzione del modo k rimane adiabatica per tutto l'intervallo di tempo; viceversa l'equazione (4.36) può ammettere due soluzioni. In quest'ultimo caso, chiamiamo $\hat{t}_2^{(k)}$ la seconda soluzione dell'equazione (4.36). Ragionando in maniera analoga al caso precedente, diremo che l'evoluzione del modo k sarà adiabatica da $\hat{t}_2^{(k)}$ a $t = \frac{\pi}{\omega}$. Anche in questo caso facciamo l'approssimazione che lo stato sia congelato da $\hat{t}_1^{(k)}$ a $\hat{t}_2^{(k)}$:

$$\left| \psi \left(\hat{t}_2^{(k)} \right) \right\rangle_k \simeq \left| GS \left(\hat{t}_1^{(k)} \right) \right\rangle_k \quad (4.38)$$

Così come abbiamo fatto per l'approssimazione collettiva, calcoliamo la probabilità che il modo k si trovi nello stato eccitato, in un istante t compreso tra $\hat{t}_1^{(k)}$ e $\hat{t}_2^{(k)}$; poiché

$$|\psi(t)\rangle_k = \alpha_k^*(t) |GS(t)\rangle_k + \beta_k^*(t) |EX(t)\rangle_k \quad (4.39)$$

questa probabilità vale $|\beta_k^*(t)|^2$; procedendo in maniera analoga a quanto fatto nelle (4.31a) e (4.31b), abbiamo che:

$$\begin{aligned} \beta_k^*(t) &= {}_k \langle EX(t) | \psi(t) \rangle_k \\ &= {}_k \langle EX(t) | GS \left(\hat{t}_1^{(k)} \right) \rangle_k \\ &= a_k \left(\hat{t}_1^{(k)} \right) b_k(t) - a_k(t) b_k \left(\hat{t}_1^{(k)} \right) \end{aligned} \quad (4.40a)$$

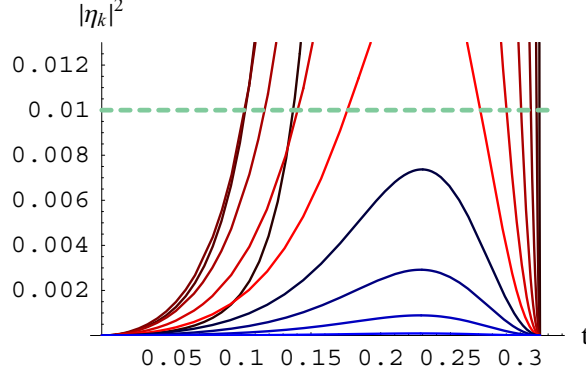


Figura 4.8: Andamento di $|\eta_k(t)|^2$ in funzione del tempo; $g(t) = g_0 + A \cos \omega t$, $N = 20$, $g_0 = 2$, $A = 0.9$, $\omega = 10$. Le curve si riferiscono a differenti valori di $ka = \frac{2\pi}{N} \left(n_k + \frac{1}{2}\right)$, con $n_k = 0, \dots, 9$. La linea tratteggiata corrisponde al valore 0.01. Curve rosse: la curva più scura corrisponde a $n_k = 0$, gradualmente le successive a $n_k = 1$, fino a $n_k = 5$. Vediamo che in questi casi l'equazione (4.36) ammette due soluzioni: $\hat{t}_1^{(k)}$ e $\hat{t}_2^{(k)}$; con l'approssimazione fatta, l'evoluzione del singolo modo k è adiabatica da $t = 0$ fino a $\hat{t}_1^{(k)}$, impulsiva da $\hat{t}_1^{(k)}$ a $\hat{t}_2^{(k)}$ e nuovamente adiabatica da $\hat{t}_2^{(k)}$ a $t = \frac{\pi}{\omega}$. Curve blu: la curva più scura corrisponde a $n_k = 6$, gradualmente le successive a $n_k = 7$, fino a $n_k = 9$. Vediamo che in questi casi l'equazione (4.36) non ammette soluzioni; con l'approssimazione fatta, l'evoluzione è adiabatica da $t = 0$ a $t = \frac{\pi}{\omega}$.

$$\begin{aligned}
 \alpha_k^*(t) &= {}_k \langle GS(t) | \psi(t) \rangle_k \\
 &= {}_k \langle GS(t) | GS(\hat{t}_1^{(k)}) \rangle_k \\
 &= a_k(\hat{t}_1^{(k)}) a_k(t) - b_k(t) b_k(\hat{t}_1^{(k)})
 \end{aligned} \tag{4.40b}$$

Definiamo adesso l'istante di tempo \hat{t}_1^{max} nel seguente modo:

$$\hat{t}_1^{max} \equiv \max_k \left[\hat{t}_1^{(k)} \right] \tag{4.41}$$

Esso è cioè l'istante di tempo in cui *tutti i modi* hanno abbandonato il regime adiabatico. Calcoliamo la probabilità che il sistema non si trovi nel ground state

a \hat{t}_1^{max} ; essa vale esattamente:

$$p^{GS}(\hat{t}_1^{max}) = 1 - \prod_k |\alpha_k^*(\hat{t}_1^{max})|^2 \quad (4.42)$$

con, nell'approssimazione fatta:

$$\alpha_k^*(\hat{t}_1^{max}) \simeq a_k(\hat{t}_1^{(k)}) a_k(\hat{t}_1^{max}) - b_k(\hat{t}_1^{max}) b_k(\hat{t}_1^{(k)}) \quad (4.43)$$

Possiamo calcolare $p^{GS}(\frac{\pi}{\omega})$ in due modi: con l'approssimazione fatta, e quindi tramite la (4.43) ($p_{approx_G}^{GS}(\frac{\pi}{\omega})$); mediante l'integrazione numerica dell'equazione di Schroedinger ($p_{num}^{GS}(\frac{\pi}{\omega})$). I risultati sono illustrati nella tabella 4.3.

A	ω	$p_{approx_{S1}}^{GS}(\hat{t}_1^{max})$	$p_{num}^{GS}(\hat{t}_1^{max})$
0.1	15	0	0.0051
0.1	50	0	0.0011
0.1	100	0	0.0083
0.1	1000	0	0.0084
0.3	1	0	0
0.3	5	0	0
0.3	10	0	0.0129
0.3	100	0.0010	0.0047
0.6	1	0	0
0.6	5	0.0009	0.0590
0.6	10	0.0074	0.0839
0.6	100	0.0027	0.0121
0.9	0.5	0	0.0208
0.9	0.65	0	0.0237
0.9	0.75	0.0029	0.0400
0.9	1	0	0.2473
0.9	5	0.0446	0.6380
0.9	10	0.0111	0.1070
0.9	100	0.0012	0.0072

Tabella 4.3: Valori di $p_{approx_{S1}}^{GS}(\hat{t}_1^{max})$ calcolati attraverso la (4.42) e la (4.43) e di $p_{num}^{GS}(\hat{t}_1^{max})$ calcolati attraverso l'integrazione numerica dell'equazione di Schroedinger, per diversi valori di A e ω ; $g(t) = g_0 + A \cos \omega t$, $N = 20$, $g_0 = 2$. Notiamo che per $A = 0.1, 0.3, 0.6$ le differenze tra $p_{approx_{S1}}^{GS}(\hat{t}_1^{max})$ e $p_{num}^{GS}(\hat{t}_1^{max})$ sono dell'ordine de 1%; per $A = 0.9$ le differenze diventano più significative.

Notiamo che per $A = 0.1, 0.3, 0.6$ le differenze tra $p_{approx_{S1}}^{GS}(\hat{t}_1^{max})$ e $p_{num}^{GS}(\hat{t}_1^{max})$ sono dell'ordine de 1%; per $A = 0.9$ le differenze si diventano più significative. L'approssimazione è efficace per $A = 0.1, 0.3, 0.6$.

Rappresentiamo adesso, singolarmente modo per modo, la probabilità $|\beta_k(\hat{t}_2^{(k)})|^2$ che esso si trovi nello stato eccitato al tempo $\hat{t}_2^{(k)}$, nell'approssimazione fatta. La figura 4.9 illustra i valori di $|\beta_k(\hat{t}_2^{(k)})|^2, \forall k$, per i valori dei parametri $N = 20, g_0 = 2, A = 0.9, \omega = 10$.

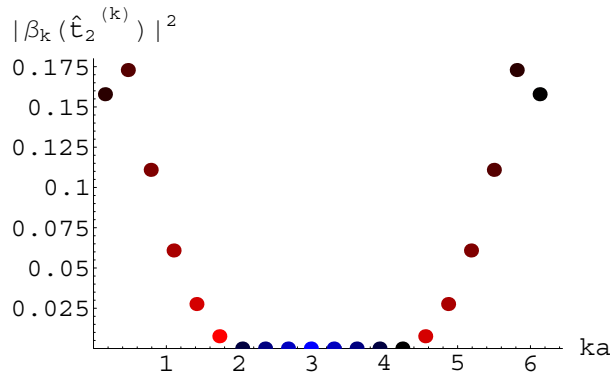


Figura 4.9: Andamento di $|\beta_k(\hat{t}_2^{(k)})|^2$ in funzione di ka ; $g(t) = g_0 + A \cos \omega t$, $N = 20, g_0 = 2, A = 0.9, \omega = 10$. I punti si riferiscono a differenti valori di $ka = \frac{2\pi}{N}(n_k + \frac{1}{2})$. I punti rossi corrispondono ai modi la cui evoluzione non è interamente adiabatica da $t = 0$ a $t = \frac{\pi}{\omega}$: il punto più scuro corrisponde a $n_k = 0$ e ad $n_k = 19$, gradualmente i successivi a $n_k = 1$ e ad $n_k = 18$, fino a $n_k = 5$ e ad $n_k = 14$. I punti blu corrispondono ai modi la cui evoluzione è interamente adiabatica da $t = 0$ a $t = \frac{\pi}{\omega}$: il punto più scuro corrisponde a $n_k = 6$ e ad $n_k = 13$, gradualmente i successivi a $n_k = 7$ e ad $n_k = 12$, fino a $n_k = 9$ e ad $n_k = 10$. Notiamo che per questi ultimi si ha che le $|\beta_k(\hat{t}_2^{(k)})|^2$ sono praticamente nulle.

Come si vede dalla 4.8 vi sono dei modi k per cui l'evoluzione resta sempre adiabatica; come mostra la figura 4.9 per tali modi si ha ovviamente che $|\beta_k(\hat{t}_2^{(k)})|^2 = 0$.

Un quadro più completo si ha osservando la figura 4.10. In quest'ultima si è scelto un valore per A e si è effettuato un campionamento per differenti valori di ω ; la ω minima è stata scelta in maniera tale che al di sotto di essa i valori di $|\beta_k(\hat{t}_2^{(k)})|^2$ fossero praticamente nulli, $\forall k$; la ω massima, invece, è stata scelta in maniera tale che al di sopra di essa i valori di $|\beta_k(\hat{t}_2^{(k)})|^2$, $\forall k$ rimanessero invariati alla seconda cifra decimale.

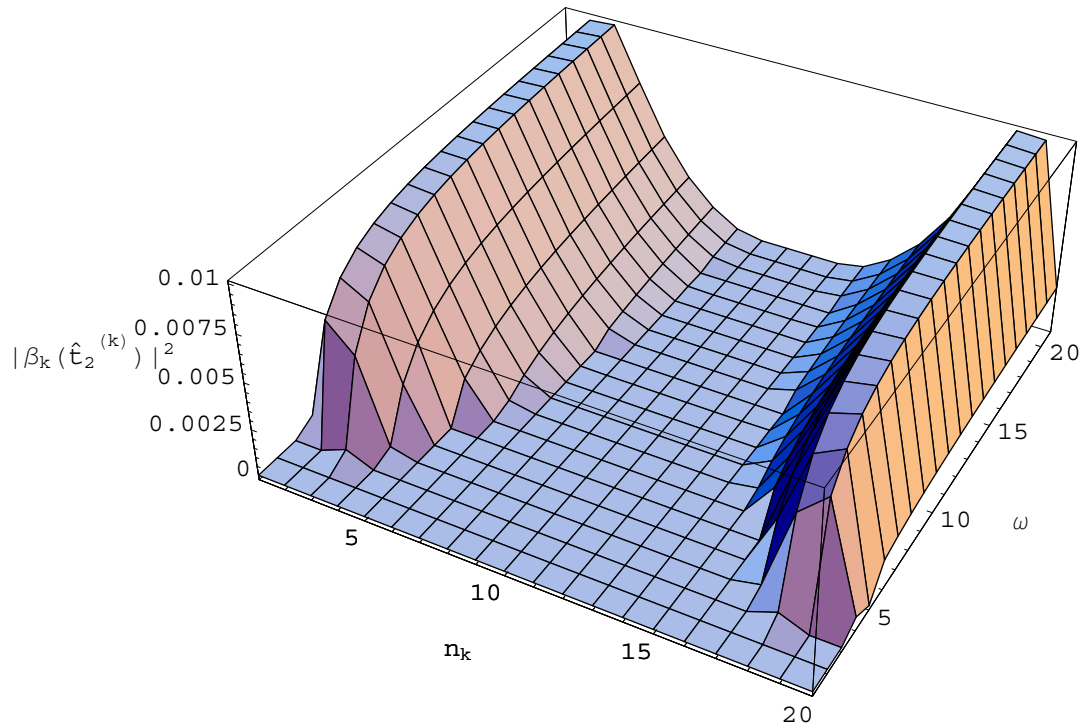


Figura 4.10: Andamento di $|\beta_k(t^{(k)})|^2$ in funzione di n_k (vedi (4.5)) e di ω . $g(t) = g_0 + A \cos \omega t$, $N = 20$, $g_0 = 2$, $A = 0.3$. Le ω sono state campionate a partire $\omega = 1$, fino a $\omega = 101$, con step di 5. Vi è un intervallo centrale di ka per cui le $|\beta_k(t^{(k)})|^2$ sono praticamente nulle, indipendentemente dal valore di ω .

Si ha che con $g_0 = 2$, $A = 0.3$ le $\left| \beta_k \left(\hat{t}_2^{(k)} \right) \right|^2$ sono sempre inferiori a 0.01; notiamo inoltre che esiste un intervallo di k per cui l'evoluzione è sempre adiabatica; esistono, in altre parole, due k di taglio al di sopra ed al di sotto dei quali le $\left| \beta_k \left(\hat{t}_2^{(k)} \right) \right|^2$ sono praticamente nulle, indipendentemente dal valore di ω .

Dall'istante di tempo $\hat{t}_2^{(k)}$ fino a $t = \frac{\pi}{\omega}$ l'evoluzione del singolo modo k , nell'approssimazione fatta, prosegue adiabaticamente. Pertanto la probabilità che il singolo modo k sia nello stato eccitato al tempo $t = \frac{\pi}{\omega}$ è:

$$\left| \beta_k \left(\hat{t}_2^{(k)} \right) \right|^2 \simeq \left| \beta_k \left(\frac{\pi}{\omega} \right) \right|^2 \quad (4.44)$$

La probabilità che il sistema nel suo complesso *non* si trovi nel ground state al tempo $t = \frac{\pi}{\omega}$ è esattamente:

$$p^{GS} \left(\frac{\pi}{\omega} \right) = 1 - \prod_k \left| \alpha_k^* \left(\frac{\pi}{\omega} \right) \right|^2 \quad (4.45)$$

con, nell'approssimazione fatta:

$$\left| \alpha_k \left(\hat{t}_2^{(k)} \right) \right|^2 \simeq \left| \alpha_k \left(\frac{\pi}{\omega} \right) \right|^2 \quad (4.46)$$

Anche in questo caso, possiamo calcolare $p^{GS} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)$ in due modi: con l'approssimazione fatta, e quindi tramite la (4.46) ($p_{approx_G}^{GS} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)$); mediante l'integrazione numerica dell'equazione di Schroedinger ($p_{num}^{GS} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)$). Definiamo la deviazione relativa tra queste due grandezze:

$$\Delta_S = \frac{\left| p_{approx_S}^{GS} \left(\frac{\pi}{\omega} \right) - p_{num}^{GS} \left(\frac{\pi}{\omega} \right) \right|}{\frac{p_{approx_S}^{GS} \left(\frac{\pi}{\omega} \right) + p_{num}^{GS} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)}{2}} \quad (4.47)$$

I risultati sono illustrati nella tabella 4.4. Facciamo alcune annotazioni:

- fissata A , all'aumentare di ω , i valori di $p_{approx_S}^{GS} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)$ e di $p_{num}^{GS} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)$ aumentano, pur rimanendo dello stesso ordine di grandezza; per ω molto grande si stabilizzano.
- all'aumentare di A i valori di $p_{approx_S}^{GS} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)$ e di $p_{num}^{GS} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)$ aumentano e diventano di ordini di grandezza differenti.

- i valori di $p_{approx_S}^{GS}(\frac{\pi}{\omega})$ e di $p_{num}^{GS}(\frac{\pi}{\omega})$ sono dello stesso ordine di grandezza solo per valori di ω medi e grandi. Il valore di Δ_G è spesso elevato, superando anche il 100%.
- il valore di Δ_S diminuisce all'aumentare di ω , per $A = 0.1, 0.3, 0.6$; per $A = 0.9$ si ha un comportamento anomalo: il valore di Δ_S è inizialmente elevato, oscilla poi tra ordini di 1% e 10% ed infine aumenta, pur mantenendosi dell'ordine di 10%. L'approssimazione aumenta la sua efficacia all'aumentare di ω e può essere considerata moderatamente efficace per $A = 0.9$.

Anche in questo caso, sempre facendo riferimento alla (2.19), cerchiamo di capire quando possiamo interpretare la probabilità che il sistema non si trovi nel ground state come il numero totale di fermioni. Valutando, $\forall k$, $\left| \beta_k \left(\hat{t}_2^{(k)} \right) \right|^2$, si ottengono gli stessi risultati ottenuti per l'approssimazione globale.

A	ω	$p_{approx_S}^{GS}(\frac{\pi}{\omega})$	$p_{num}^{GS}(\frac{\pi}{\omega})$	Δ_S
0.1	15	0	0.0076	2
0.1	50	0.0005	0.0083	1.7697
0.1	65	0.0010	0.0083	1.5756
0.1	100	0.0017	0.0083	1.3358
0.1	200	0.0026	0.0083	1.0514
0.1	1000	0.0039	0.0083	0.7206
0.1	10000	0.0045	0.0083	0.5981
0.3	1	0	0.0003	2
0.3	5	0	0.0357	2
0.3	10	0.0012	0.0627	1.9238
0.3	20	0.0103	0.0730	1.5061
0.3	30	0.0163	0.0751	1.2866
0.3	50	0.0231	0.0762	1.0697
0.3	65	0.0268	0.0765	0.9606
0.3	100	0.0319	0.0767	0.8252
0.3	1000	0.0454	0.0769	0.5145
0.3	10000	0.0465	0.0769	0.4932
0.6	1	0	0.0113	2
0.6	5	0.0442	0.1877	1.2371
0.6	10	0.0947	0.2820	0.9947
0.6	30	0.1720	0.3222	0.6079
0.6	100	0.2549	0.3272	0.2487
0.6	200	0.2701	0.3276	0.1924
0.6	1000	0.2972	0.3277	0.0978
0.6	10000	0.2985	0.3277	0.0933
0.9	0.1	0	0.0044	2
0.9	0.15	0	0.0164	2
0.9	0.5	0.1304	0.1271	0.0253
0.9	0.65	0.1553	0.1675	0.0758
0.9	0.75	0.1987	0.1924	0.0320
0.9	1	0.2930	0.2479	0.1667
0.9	5	0.6962	0.6380	0.0872
0.9	10	0.8315	0.7397	0.1169
0.9	18	0.8990	0.7680	0.1571
0.9	25	0.9261	0.7743	0.1785
0.9	100	0.9662	0.7812	0.2122
0.9	1000	0.9791	0.7812	0.2248

Tabella 4.4: Valori di $p_{approx_S}^{GS}(\frac{\pi}{\omega})$ calcolati utilizzando la (4.45), di $p_{num}^{GS}(\frac{\pi}{\omega})$, calcolati attraverso integrazione numerica dell'equazione di Schroedinger e di Δ_S , definita in (4.47), per diversi valori di A e ω ; $g(t) = g_0 + A \cos \omega t$, $N = 20$, $g_0 = 2$. Per ogni valore di A si sono scelti gli stessi valori riportati in 4.2. Notiamo la moderata efficacia dell'approssimazione per grandi ω e per $A = 0.9$.

4.2 Confronto tra le approssimazioni

Riportiamo di seguito dei grafici riepilogativi per effettuare un confronto visivo tra le due approssimazioni nell'intero intervallo temporale $[0, \frac{\pi}{\omega}]$. La curva celeste rappresenta l'andamento di $p_{approx_G}^{GS}(t)$ (*approssimazione collettiva*) in funzione del tempo e le due linee celesti verticali e tratteggiate sono poste in corrispondenza di \hat{t}_1 e \hat{t}_2 . È possibile dividere questa curva in tre tratti:

- da $t = 0$ a \hat{t}_1 l'evoluzione del sistema è adiabatica, e poiché il sistema inizia la sua evoluzione nel ground state, abbiamo $p_{approx_G}^{GS}(t) = 0$.
- da \hat{t}_1 a \hat{t}_2 l'evoluzione del sistema è impulsiva; è possibile calcolare $p^{GS}(t)$ esattamente attraverso la

$$p^{GS}(t) = 1 - \prod_k |\alpha_k^*(t)|^2 \quad (4.48)$$

e calcolare nell'approssimazione fatta $\alpha_k^*(t)$, ricordando la (4.31b).

- da \hat{t}_2 a $\frac{\pi}{\omega}$ l'evoluzione è nuovamente adiabatica e pertanto, nell'approssimazione fatta:

$$p_{approx_G}^{GS}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) \simeq p_{approx_G}^{GS}(\hat{t}_2) \quad (4.49)$$

La curva blu rappresenta l'andamento di $p_{approx_S}^{GS}(t)$ (*approssimazione con modi indipendenti*) in funzione del tempo e le due linee celesti verticali e tratteggiate sono poste in corrispondenza di \hat{t}_1^{min} e \hat{t}_2^{max} , definiti nel seguente modo:

$$\hat{t}_1^{min} \equiv \min_k \left[\hat{t}_1^{(k)} \right] \quad (4.50a)$$

$$\hat{t}_2^{max} \equiv \max_k \left[\hat{t}_2^{(k)} \right] \quad (4.50b)$$

essendo $\hat{t}_1^{(k)}$ l'istante di tempo in cui il modo k abbandona l'evoluzione adiabatica, abbiamo che per $t \in [0, \hat{t}_1^{min}]$ l'evoluzione di ogni modo è adiabatica; analogamente, essendo $\hat{t}_2^{(k)}$ l'istante di tempo in cui il modo k riprende l'evoluzione adiabatica, abbiamo che per $t \in [\hat{t}_2^{max}, 0]$ l'evoluzione di ogni modo è adiabatica. È possibile dividere questa curva in tre tratti:

- da $t = 0$ a \hat{t}_1^{min} l'evoluzione di ogni modo k è adiabatica, e poiché ogni modo inizia la sua evoluzione nel ground state, abbiamo $p_{approx_S}^{GS}(t) = 0$.
- da \hat{t}_1^{min} a \hat{t}_2^{max} vi possono essere dei modi la cui evoluzione è impulsiva; per ognuno di essi è possibile calcolare nell'approssimazione fatta $\alpha_k^*(t)$ attraverso la (4.40b). A questo punto tramite la (4.48) valutiamo $p_{approx_S}^{GS}(t)$.
- da \hat{t}_2^{max} a $\frac{\pi}{\omega}$ l'evoluzione di ogni modo k è nuovamente adiabatica e pertanto, nell'approssimazione fatta:

$$p_{approx_S}^{GS}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) \simeq p_{approx_S}^{GS}(\hat{t}_2^{max}) \quad (4.51)$$

La curva magenta rappresenta l'andamento di $p_{num}^{GS}(t)$ in funzione del tempo, calcolata tramite la (4.48), con $\alpha_k^*(t)$ valutati attraverso l'integrazione numerica dell'equazione di Schroedinger.

Osserviamo la figura 4.11; da essa segue che $\sum_k |\eta_k(t)|^2$ e $|\eta_k(t)|^2$ sono crescenti per t appartenente ad un intorno a cui appartengono rispettivamente \hat{t}_1 e \hat{t}_1^{min} , e invece decrescenti per t appartenente ad un intorno a cui appartengono rispettivamente \hat{t}_2 e \hat{t}_2^{max} ; poiché $\sum_k |\eta_k(t)|^2 > |\eta_k(t)|^2$ abbiamo che $\hat{t}_1 < \hat{t}_1^{min}$ e che $\hat{t}_2 > \hat{t}_2^{max}$. Pertanto l'intervallo in cui l'evoluzione del sistema è non adiabatica è più ampio nel caso dell'approssimazione collettiva che in quello dell'approssimazione effettuata singolarmente modo per modo.

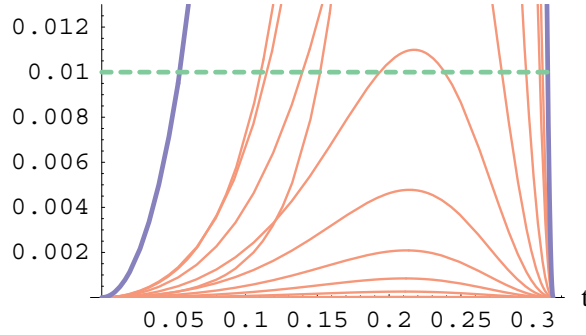


Figura 4.11: Curva azzurra: andamento di $\sum_k |\eta_k(t)|^2$ in funzione del tempo; curve rosa: andamento di $|\eta_k(t)|^2$ in funzione del tempo; le curve si riferiscono a differenti valori di $ka = \frac{2\pi}{N} (n_k + \frac{1}{2})$, con $n_k = 0, \dots, 9$. La linea tratteggiata corrisponde al valore 0.01. $g(t) = g_0 + A \cos \omega t$, $N = 20$, $g_0 = 2$, $A = 0.6$, $\omega = 10$. Vediamo che $\sum_k |\eta_k(t)|^2 > |\eta_k(t)|^2$ e che quindi $\hat{t}_1 < \hat{t}_1^{min}$ e che $\hat{t}_2 > \hat{t}_2^{max}$.

Notiamo che l'approssimazione collettiva è molto valida $\forall A$, tranne che per ω piccole. Riportiamo inoltre i valori di $p^{GS}(\frac{\pi}{\omega})$ calcolata in approssimazione globale tramite la 4.16, in approssimazione singola tramite la 4.17, ed infine mediante integrazione numerica dell'equazione di Schroedinger 4.18, rispetto ad A e ω .

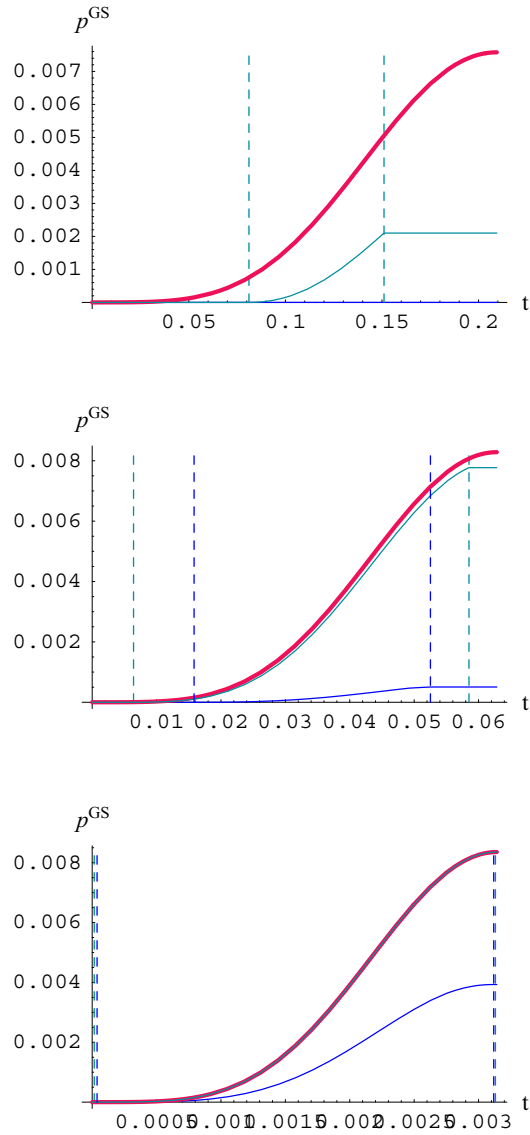


Figura 4.12: Curva celeste: andamento di $p_{approx_G}^{GS}(t)$ ((4.48) e (4.31b)) in funzione del tempo; le due linee celesti verticali e tratteggiate sono poste in corrispondenza di \hat{t}_1 e \hat{t}_2 . Curva blu: andamento di $p_{approx_S}^{GS}(t)$ in funzione del tempo ((4.48) e (4.40b)); le due linee celesti verticali e tratteggiate sono poste in corrispondenza di \hat{t}_1^{min} e \hat{t}_2^{max} . Curva magenta: andamento di $p_{num}^{GS}(t)$ (integrazione numerica dell'equazione di Schroedinger) in funzione del tempo; $g(t) = g_0 + A \cos \omega t$, $N = 20$, $g_0 = 2$, $A = 0.1$; in alto: $\omega = 15$, al centro $\omega = 50$, in basso $\omega = 1000$. Vediamo che le due approssimazioni migliorano la loro efficacia all'aumentare di ω ; la curva relativa all'approssimazione collettiva si sovrappone perfettamente a quella relativa all'approssimazione numerica per grandi ω .

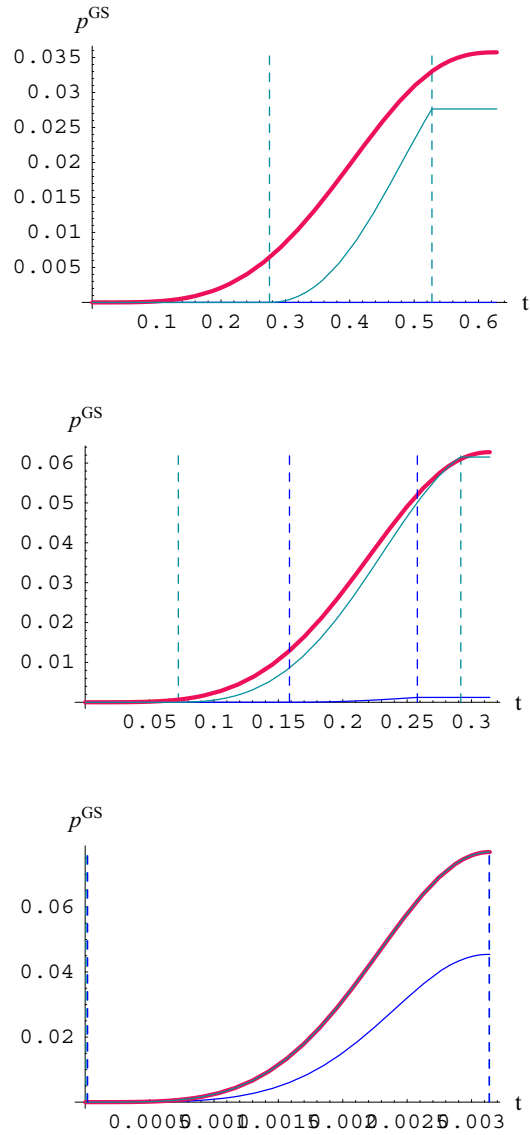


Figura 4.13: Curva celeste: andamento di $p_{approx_G}^{GS}(t)$ ((4.48) e (4.31b)) in funzione del tempo; le due linee celesti verticali e tratteggiate sono poste in corrispondenza di \hat{t}_1 e \hat{t}_2 . Curva blu: andamento di $p_{approx_S}^{GS}(t)$ in funzione del tempo ((4.48) e (4.40b)); le due linee celesti verticali e tratteggiate sono poste in corrispondenza di \hat{t}_1^{min} e \hat{t}_2^{max} . Curva magenta: andamento di $p_{num}^{GS}(t)$ (integrazione numerica dell'equazione di Schroedinger) in funzione del tempo; $g(t) = g_0 + A \cos \omega t$, $N = 20$, $g_0 = 2$, $A = 0.3$; in alto: $\omega = 5$, al centro $\omega = 10$, in basso $\omega = 1000$. Vediamo che le due approssimazioni migliorano la loro efficacia all'aumentare di ω ; la curva relativa all'approssimazione collettiva si sovrappone perfettamente a quella relativa all'approssimazione numerica per grandi ω .

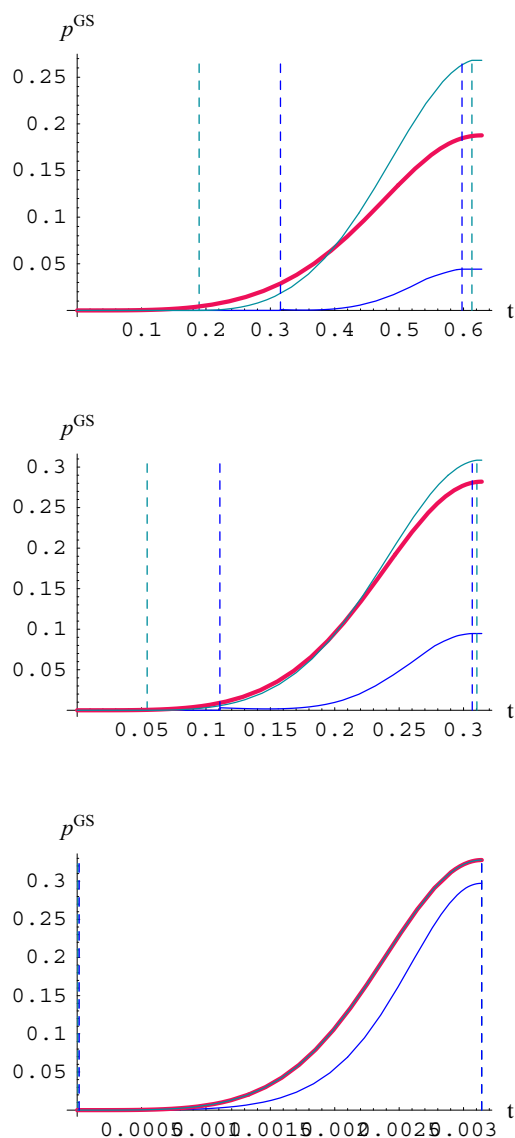


Figura 4.14: Curva celeste: andamento di $p_{approx_G}^{GS}(t)$ ((4.48) e (4.31b)) in funzione del tempo; le due linee celesti verticali e tratteggiate sono poste in corrispondenza di \hat{t}_1 e \hat{t}_2 . Curva blu: andamento di $p_{approx_S}^{GS}(t)$ in funzione del tempo ((4.48) e (4.40b)); le due linee celesti verticali e tratteggiate sono poste in corrispondenza di \hat{t}_1^{min} e \hat{t}_2^{max} . Curva magenta: andamento di $p_{num}^{GS}(t)$ (integrazione numerica dell'equazione di Schroedinger) in funzione del tempo; $g(t) = g_0 + A \cos \omega t$, $N = 20$, $g_0 = 2$, $A = 0.6$; in alto: $\omega = 5$, al centro $\omega = 10$, in basso $\omega = 1000$. Vediamo che le due approssimazioni migliorano la loro efficacia all'aumentare di ω ; la curva relativa all'approssimazione collettiva si sovrappone perfettamente a quella relativa all'approssimazione numerica per grandi ω .

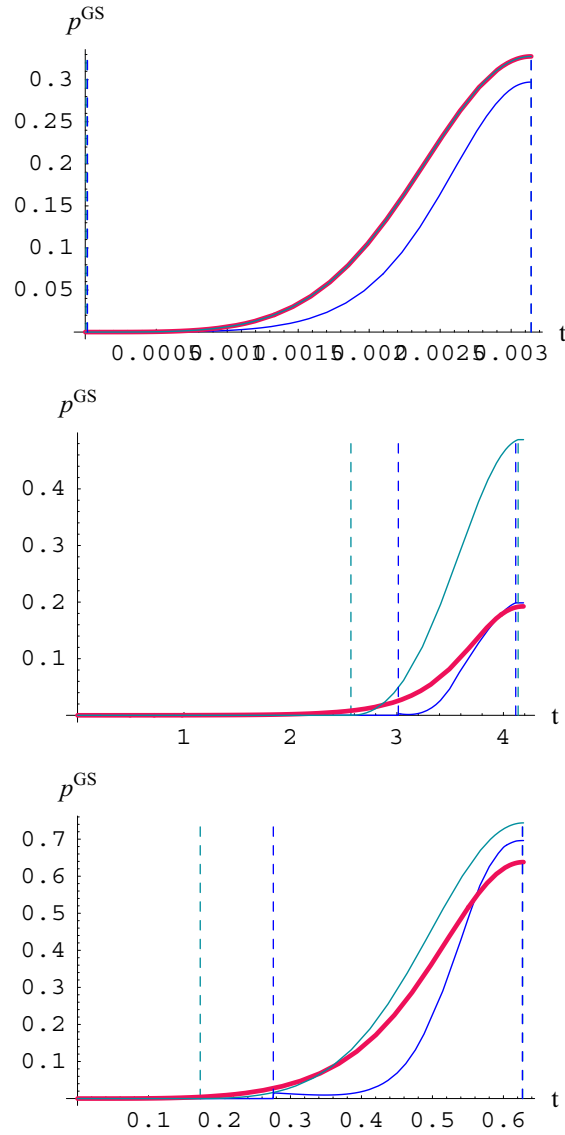


Figura 4.15: Curva celeste: andamento di $p_{approx_G}^{GS}(t)$ ((4.48) e (4.31b)) in funzione del tempo; le due linee celesti verticali e tratteggiate sono poste in corrispondenza di \hat{t}_1 e \hat{t}_2 . Curva blu: andamento di $p_{approx_S}^{GS}(t)$ in funzione del tempo ((4.48) e (4.40b)); le due linee celesti verticali e tratteggiate sono poste in corrispondenza di \hat{t}_1^{min} e \hat{t}_2^{max} . Curva magenta: andamento di $p_{num}^{GS}(t)$ (integrazione numerica dell'equazione di Schroedinger) in funzione del tempo; $g(t) = g_0 + A \cos \omega t$, $N = 20$, $g_0 = 2$, $A = 0.9$; in alto: $\omega = 0.75$, al centro $\omega = 5$, in basso $\omega = 10$. Vediamo che le due approssimazioni migliorano la loro efficacia all'aumentare di ω ; la curva relativa all'approssimazione collettiva si sovrappone perfettamente a quella relativa all'approssimazione numerica per grandi ω .

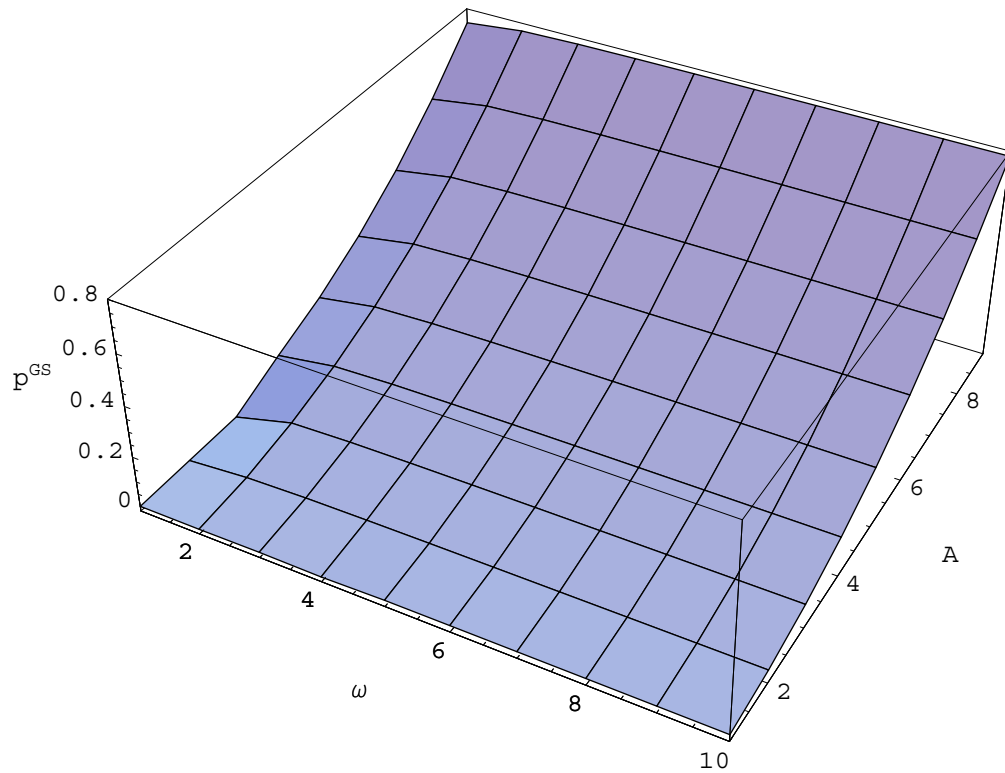


Figura 4.16: $p_{approx_G}^{GS}(\frac{\pi}{\omega})$ in funzione di A e ω . $g(t) = g_0 + A \cos \omega t$, $N = 20$, $g_0 = 2$, $A = 0.6$. Le ω sono state campionate a partire $\omega = 5$, fino a $\omega = 50$, con step di 5; le A sono state campionate a partire $A = 0.1$, fino a $A = 0.9$, con step di 0.1.

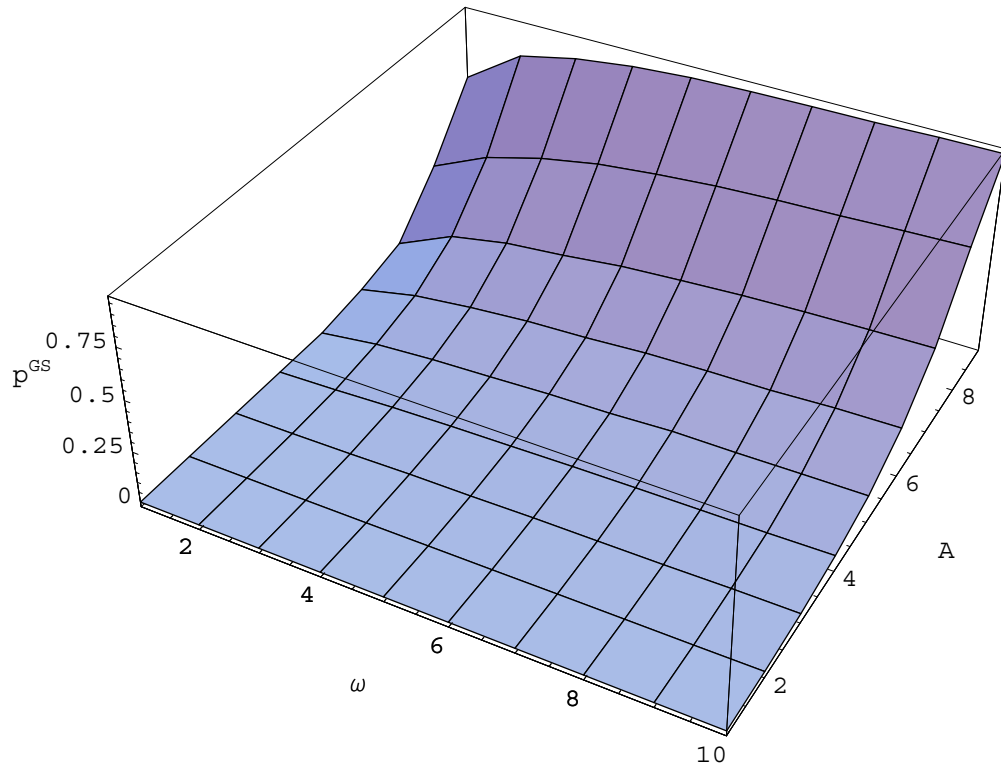


Figura 4.17: $p_{approx_S}^{GS}(\frac{\pi}{\omega})$ in funzione di A e ω . $g(t) = g_0 + A \cos \omega t$, $N = 20$, $g_0 = 2$, $A = 0.6$. Le ω sono state campionate a partire $\omega = 5$, fino a $\omega = 50$, con step di 5; le A sono state campionate a partire $A = 0.1$, fino a $A = 0.9$, con step di 0.1.

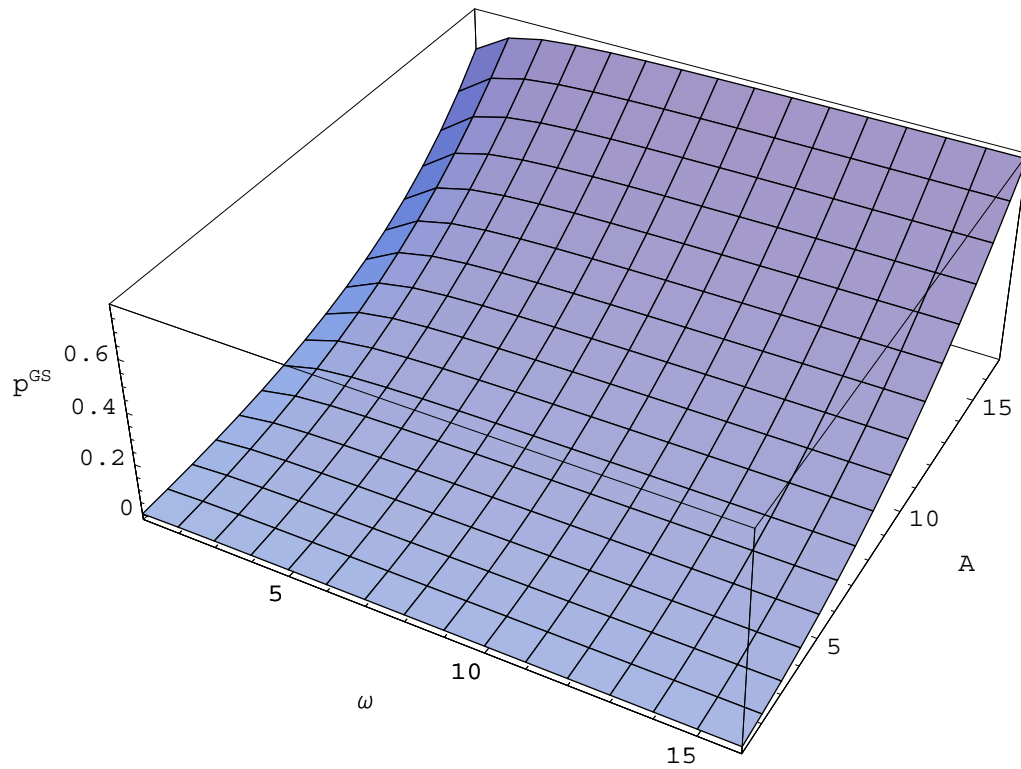


Figura 4.18: $p_{num}^{GS}(\frac{\pi}{\omega})$ in funzione di A e ω . $g(t) = g_0 + A \cos \omega t$, $N = 20$, $g_0 = 2$, $A = 0.6$. Le ω sono state campionate a partire $\omega = 5$, fino a $\omega = 50$, con step di 5; le A sono state campionate a partire $A = 0.1$, fino a $A = 0.9$, con step di 0.1.

Conclusioni

Finora per il modello di Ising quantistico unidimensionale con campo magnetico trasverso dipendente dal tempo non sono state trovate soluzioni generali; ai fini della comprensione della transizione di fase si è studiato soprattutto il caso in cui il campo è linearmente decrescente nel tempo.

Lo studio che abbiamo effettuato in questo lavoro di tesi è partito dalla estensione del formalismo utilizzato dagli studi precedentemente effettuati al fine di approssimare il problema generale di un generico campo dipendente dal tempo. Come punto di partenza abbiamo studiato una dipendenza di tipo cosinusoidale; data la complessità del sistema, si è presentata la necessità di effettuare delle approssimazioni, in particolare, abbiamo utilizzato l'approssimazione adiabatica-impulsiva. Mediante confronto con simulazioni numeriche, i risultati si sono rivelati validi per ampie regioni di variabilità dei parametri del campo, in particolare per alte frequenze di oscillazione del campo, indipendentemente dall'ampiezza considerata.

La grandezza che abbiamo studiato più in dettaglio è la probabilità che il sistema non si trovi nel ground state in un certo istante di tempo; abbiamo trovato che essa aumenta debolmente all'aumentare della frequenza di oscillazione del campo, mentre cresce più marcatamente con l'ampiezza del campo.

Lo studio effettuato si è rivelato particolarmente interessante almeno per due ordini di ragioni. In primo luogo, sembra che il formalismo elaborato possa essere applicato ad un generico campo magnetico dipendente dal tempo; in particolare, si pensa che i risultati trovati possano essere estesi, solo con poche modifiche, ad un'evoluzione del sistema che possa essere approssimata con un

andamento prima adiabatico, poi impulsivo e poi nuovamente adiabatico, come nel caso trattato. In secondo luogo, una comprensione più estesa del comportamento del sistema con un campo cosinusoidale può rivelarsi utile allo studio di un campo qualsiasi, in virtù della possibilità di trattare quest'ultimo mediante trasformazione di Fourier.

Una fase successiva nello studio del sistema considerato può essere l'ampliamento della regione di variabilità dei parametri del campo, in maniera tale che, ad esempio, venga attraversata la regione critica della transizione di fase.

Bibliografia

- [1] E. Lieb, T. Schultz, D. Mattis, *Two Soluble Models of an Antiferromagnetic Chain*, Annals of Physics **16**, 407 (1961)
- [2] T. Giamarchi, *Quantum Physics in One Dimension*, Oxford Science Publications, 2004
- [3] S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999
- [4] J. Dziarmaga, *Dynamics of a Quantum Phase Transition: Exact Solution of the Quantum Ising Model*, Phys. Rev. Lett. **95**, 245701 (2005)
- [5] J. Dziarmaga, *Dynamics of a Quantum Phase Transition in the Random Ising Model*, Phys. Rev. **B 74**, 064416 (2006)
- [6] G. Nardulli, *Meccanica Quantistica I, Principi*, FrancoAngeli, 2001
- [7] A. Messiah, *Quantum Physics*, Dover Publications, 1999
- [8] E. Barouch, B. McCoy, M. Dresden *Statistical Mechanics of the XY Model. I*, Phys. Rev. A **2**, 1075 (1970)
- [9] E. Barouch, B. McCoy *Statistical Mechanics of the XY Model. II. Spin-Correlation Functions*, Phys. Rev. A **3**, 786 (1971)
- [10] E. Barouch, B. McCoy *Statistical Mechanics of the XY Model. III.*, Phys. Rev. A **3**, 2137 (1971)

- [11] N. Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions*, Addison Wesley, New York, 1992
- [12] M. Vojta, *Quantum Phase Transitions*, Rep. Prog. Phys. **66**, 2069 (2003)
- [13] D.C. Domb, J.L. Lebowitz, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, Academic Press, 1991
- [14] J.G. Brankov, D.M. Danchev, N.S. Tonchev, *The Theory of Critical Phenomena in Finite-size Systems*, World Scientific Publishing, 2000
- [15] S.I. Sondhi, S.M. Girvin, J.P. Carini, D. Shahar, *Continuos Quantum Phase Transitions*, Rev. Mod. Phys. **69**, 315 (1997)
- [16] W. H. Zurek, U. Dorner, P. Zoller, *Dynamics of a Quantum Phase Transition*, Phys. Rev. Lett. **95**, 105701 (2005)
- [17] V. Mukherjee, U. Divakaran, A. Dutta, D. Sen, *Quenching Dynamics of a Quantum XY Spin 1/2 Chain in Presence of a Transverse Field* cond-mat/07080278v1 (2007)
- [18] B. Damsky, *The Simplest Quantum Model Supporting the Kibble-Zurek Mechanism of Topological Defect Production: Landau-Zener Transitions from a New Perspective*, Phys. Rev. Lett. **95**, 035701, (2005)
- [19] B. Damsky, W. H. Zurek, *Adiabatic-Impulse approximation for avoided level crossings: from phase transition dynamics to Landau-Zener evolution and back again*, cond-mat/0511709v2 (2006)
- [20] N. V. Vitanov, *Transition Times in the Landau-Zener Model*, Phys. Rev. A **59**, 988 (1999)
- [21] A. Polkovnikov, *Universal adiabatic dynamics in the vicinity of a quantum critical point*, Phys. Rev. **B 72**, 161201(R) (2005)

Ringraziamenti

Il momento dei ringraziamenti è quello in cui si scrive finalmente con la mente libera e l'animo leggero. È con questo spirito che desidero ringraziare:

- il Prof. Saverio Pascazio, per avermi guidato durante gli ultimi mesi del lavoro di tesi con esemplare pazienza ed irrinunciabile, maniacale pignoleria.
- il Prof. Rosario Fazio ed il Prof. Giuseppe Santoro, per avermi proposto l'argomento su cui si è sviluppato il lavoro di tesi, per averne seguito i primi sviluppi.
- il Prof. Paolo Facchi, per aver seguito la mia attività di tirocinio, per i numerosi e preziosi suggerimenti dispensati sul lavoro di tesi.
- la Dott.ssa Maria Valentina Carlucci, per le infinite discussioni di infinita durata su infiniti argomenti, per le infinite giornate, gli infiniti pomeriggi, le fortunatamente poche nottate spese nel tentativo di rendere questo lavoro il più coerente possibile.
- il Dott. Tommaso Caneva, il Dott. Dario Patanè ed il Dott. Giuseppe Florio per le brevi quanto illuminanti discussioni tra mense e building della SISSA e i corridoi del Dipartimento di Fisica di Bari.
- i dottorandi del Gruppo Teorico dell'Università Bari e del Settore di Fisica Statistica della SISSA, per la miriade di piccoli suggerimenti forniti.

È ora con il *cuore* leggero che desidero ringraziare:

Maria Valentina, per nessuna ragione, giacché non autenticamente inquadrabile in una descrizione di tipo causale della realtà.

mia madre e mio padre, per l'aiuto ed il calore mostrato durante i tre mesi di lavoro a Trieste, per l'ammirevole pazienza mostrata nelle ultime frenetiche settimane di lavoro.

tutti i miei amici, per aver collaborato a svuotare la mia mente quando era necessario.