Programma di Metodi Matematici della Fisica

Laurea magistrale in Fisica

Prof. Paolo Facchi

1. **Spazi metrici**

   Definizione di metrica. Esempi. Insiemi aperti, insiemi chiusi, intorni. Spazi topologici e di Hausdorff. Applicazioni continue. Insiemi densi, spazi separabili. Successioni convergenti e di Cauchy. Completezza. Esempi. Teorema del sottospazio completo. Teorema sulle applicazioni continue. Completamento di uno spazio metrico.

2. **Spazi di Banach**

   Richiami sugli spazi vettoriali. Spazi normati. Completezza e spazi di Banach. Disuguaglianze notevoli: di Hölder, di Minkowski. Esempi: spazi finito-dimensionali, spazi di successioni, spazi di funzioni. Teorema del completamento. Teorema di compattezza. Lemma di Riesz. Applicazioni continue.

   Operatori lineari. Immagine e spazio nullo. Operatore inverso e inverso di un prodotto. Operatori lineari limitati. Continuità e limitatezza. Teorema dell'estensione lineare limitata.

   Funzionali lineari continui e spazio duale. Spazio di Banach degli operatori limitati. Teorema di Hanh-Banach. Spazio biduale e spazi riflessivi. Teorema di completezza. Esempio: $\ell_p = \ell_q^*$, $1 \leq q < \infty$.

3. **Introduzione alla teoria della misura**

   Integrale di Lebesgue. Sigma algebre e misure di Borel. Funzioni misurabili. Convergenza monotona e dominata. Lemma di Fatou. Teorema di Fubini. Esempi: misura assolutamente continua, misura di Dirac, misura di Cantor. Teorema di decomposizione di Lebesgue. Completezza degli spazi L^p.

4. **Spazi di Hilbert**

   Prodotto scalare. Spazi euclidei e spazi di Hilbert. Ortogonalità, teorema di Pitagora. Disuguaglianza di Bessel e di Cauchy-Schwarz. Disuguaglianza triangolare. Legge del parallelogramma e identità di polarizzazione. Esempi: ℓ_2, $L^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}\mu)$. Somma diretta. Teorema della proiezione ortogonale. Lemma di Riesz-Fréchet. Teorema di struttura delle forme sesquilineari limitate.

   Sistemi ortonormali e coefficienti di Fourier. Basi ortonormali e uguaglianza di Parseval. Spazi di Hilbert separabili. Metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Isomorfismo con ℓ_2. Prodotto tensoriale e basi prodotto. Isomorfismi naturali di spazi prodotto.

5. **Operatori lineari negli spazi di Hilbert**

   C^* algebra degli operatori limitati. Operatori normali, autoaggiunti, unitari e di proiezione ortogonale. Operatori di rango finito e operatori compatti. Teorema della categoria di Baire. Principio della limitatezza uniforme di Banach-Steinhaus. Convergenza uniforme, forte e debole. Teorema di compattezza debole. Convergenza operatoriale forte e debole.

   Richiami dei postulati della meccanica quantistica. Operatori non limitati. Aggiunto di un operatore. Operatori simmetrici e autoaggiunti. Forme quadratiche. Esempi: operatori di moltiplicazione in $L^2(\mathbb{R})$; operatore di derivazione in $L^2(0, 2\pi)$. Operatori essenzialmente autoaggiunti. Criterio fondamentale di autoaggiunzione e di essenziale autoaggiunzione. Grafico e chiusura di un operatore e del suo inverso. Teorema del grafico chiuso e di Hellinger-Toeplitz.

Operatori positivi, forme quadratiche e domini di forma. Estensione autoaggiunta degli operatori positivi. Esempio: energia cinetica nell'intervallo. Teorema di autoaggiunzione degli operatori osservabili.

6. **Proprietà spettrali e dinamica**

   Risolvente, insieme risolvente e spettro. Esempi: operatore posizione e impulso. Prima formula del risolvente e proprietà analitiche del risolvente. Serie di Neumann. Spettro e criterio di Weyl. Spettro e autovalori dell'inverso. Caratterizzazione dello spettro degli operatori autoaggiunti, unitari e di proiezione ortogonale. Operatori simmetrici con una base di autovettori.

   Misure a valori di proiezione e loro proprietà. Risoluzione dell'identità. Integrale sui proiettori delle funzioni limitate e teorema di omomorfismo. Estensione alle funzioni non limitate. Valore di aspettazione del risolvente, trasformata di Borel e formula di inversione di Stieltjes. Famiglia spettrale di un operatore autoaggiunto e teorema spettrale. Calcolo funzionale. Proiettori spettrali e caratterizzazione dello spettro. Tipi e sottospazi spettrali.

   Dinamica quantistica e gruppi unitari di evoluzione. Conservazione dell'energia. Teorema di Stone. Sottospazi invarianti e essenziale autoaggiunzione. Probabilità di ritorno e di transizione. Lemma di Riemann-Lebesgue e di Wiener. Tipi spettrali e probabilità di ritorno. Spettro puntuale e orbite quasiperiodiche. Teorema RAGE.

Riferimenti bibliografici

[1] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Dover, New York, 1999

[2] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Volume 1, Academic Press, New York, 1980

[3] G. Teschl, *Mathematical Methods in Quantum Mechanics*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 99, American Mathematical Society, Providence, 2009.

[4] Dispense del corso, disponibili alla pagina web
`http://www.ba.infn.it/~facchi/Sito/Lectures.html`