

Programma di Metodi Matematici della Fisica

Laurea magistrale in Fisica
a.a. 2011/12

1. Spazi metrici

Definizione di metrica. Esempi. Insiemi aperti, insiemi chiusi, intorni. Spazi topologici e di Hausdorff. Applicazioni continue. Insiemi densi, spazi separabili. Successioni convergenti e di Cauchy. Completezza. Esempi. Teorema del sottospazio completo. Teorema sulle applicazioni continue. Completamento di uno spazio metrico.

Contrazioni e teorema di punto fisso. Metodo delle approssimazioni successive. Equazioni differenziali e teorema di Picard. Corollario del teorema di punto fisso. Equazioni integrali di Fredholm e di Volterra.

2. Spazi di Banach

Richiami sugli spazi vettoriali. Spazi normati. Completezza e spazi di Banach. Disuguaglianze notevoli: di Hölder, di Minkowski. Esempi: spazi finito-dimensionali, spazi di successioni, spazi di funzioni. Teorema del completamento. Teorema di compattezza. Lemma di Riesz. Applicazioni continue.

Operatori lineari. Immagine e spazio nullo. Operatore inverso e inverso di un prodotto. Operatori lineari limitati. Continuità e limitatezza. Teorema dell'estensione lineare limitata.

Funzionali lineari continui e spazio duale. Spazio di Banach degli operatori limitati. Teorema di Hanh-Banach. Spazio biduale e spazi riflessivi. Teorema di completezza. Esempio: $\ell_p = \ell_q^*$, $1 \leq q < \infty$.

3. Introduzione alla teoria della misura

Integrale di Lebesgue. Sigma algebre e misure di Borel. Funzioni misurabili. Convergenza monotona e dominata. Lemma di Fatou. Teorema di Fubini. Esempi: misura assolutamente continua, misura di Dirac, misura di Cantor. Teorema di decomposizione di Lebesgue. Completezza degli spazi L^p .

4. Spazi di Hilbert

Prodotto scalare. Spazi euclidei e spazi di Hilbert. Ortogonalità, teorema di Pitagora. Disuguaglianza di Bessel e di Cauchy-Schwarz. Disuguaglianza triangolare. Legge del parallelogramma e identità di polarizzazione. Esempi: ℓ_2 , $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu)$. Somma diretta. Teorema della proiezione ortogonale. Lemma di Riesz-Fréchet. Teorema di struttura delle forme sesquilineari limitate.

Sistemi ortonormali e coefficienti di Fourier. Basi ortonormali e uguaglianza di Parseval. Spazi di Hilbert separabili. Metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Isomorfismo con ℓ_2 . Prodotto tensoriale e basi prodotto. Isomorfismi naturali di spazi prodotto.

5. Operatori lineari negli spazi di Hilbert

C^* algebra degli operatori limitati. Operatori normali, autoaggiunti, unitari e di proiezione ortogonale. Operatori di rango finito e operatori compatti. Teorema della categoria di Baire. Principio della limitatezza uniforme di Banach-Steinhaus. Convergenza uniforme, forte e debole. Teorema di compattezza debole. Convergenza operatoriale forte e debole.

Richiami dei postulati della meccanica quantistica. Operatori non limitati. Aggiunto di un operatore. Operatori simmetrici e autoaggiunti. Forme quadratiche. Esempi: operatori di moltiplicazione in $L^2(\mathbb{R})$; operatore di derivazione in $L^2(0, 2\pi)$. Operatori essenzialmente

autoaggiunti. Criterio fondamentale di autoaggiunzione e di essenziale autoaggiunzione. Grafico e chiusura di un operatore e del suo inverso. Teorema del grafico chiuso e di Hellinger-Toeplitz.

Operatori positivi, forme quadratiche e domini di forma. Estensione autoaggiunta degli operatori positivi. Esempio: energia cinetica nell'intervallo. Teorema di autoaggiunzione degli operatori osservabili.

6. Proprietà spettrali e dinamica

Risolvente, insieme risolvente e spettro. Esempi: operatore posizione e impulso. Prima formula del risolvente e proprietà analitiche del risolvente. Serie di Neumann. Spettro e criterio di Weyl. Spettro e autovalori dell'inverso. Caratterizzazione dello spettro degli operatori autoaggiunti, unitari e di proiezione ortogonale. Operatori simmetrici con una base di autovettori.

Misure a valori di proiezione e loro proprietà. Risoluzione dell'identità. Integrale sui proiettori delle funzioni limitate e teorema di omomorfismo. Estensione alle funzioni non limitate. Valore di aspettazione del risolvente, trasformata di Borel e formula di inversione di Stieltjes. Famiglia spettrale di un operatore autoaggiunto e teorema spettrale. Calcolo funzionale. Proiettori spettrali e caratterizzazione dello spettro. Tipi e sottospazi spettrali.

Dinamica quantistica e gruppi unitari di evoluzione. Conservazione dell'energia. Teorema di Stone. Sottospazi invarianti e essenziale autoaggiunzione. Probabilità di ritorno e di transizione. Lemma di Riemann-Lebesgue e di Wiener. Tipi spettrali e probabilità di ritorno. Spettro puntuale e orbite quasiperiodiche. Teorema RAGE.

Riferimenti bibliografici

- [1] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Dover, New York, 1999
- [2] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Volume 1, Academic Press, New York, 1980
- [3] G. Teschl, *Mathematical Methods in Quantum Mechanics*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 99, American Mathematical Society, Providence, 2009.
- [4] Dispense del corso, disponibili alla pagina web
<http://www.ba.infn.it/~facchi/Sito/Lectures.html>