Metodi geometrici della Fisica

Elementi di Topologia

Spazi topologici: aperti, chiusi, intorni, sistemi fondamentali di intorni; basi di topologia, la topologia determinata dalla distanza in uno spazio metrico. Distanze in $\mathbb{R}^n$ che determinano la stessa topologia. Metodi per generare topologie. Applicazioni continue ed omeomorfismi. Topologia indotta, topologia prodotto e topologia quoziente.
Assiomi di separazione: spazi di Hausdorff, spazi regolari, completamente regolari e normali.
Invarianti topologici: compattezza, locale compattezza, connessione, locale connessione. Esempi. Connessione per archi e spazi semplicemente connessi. Paracompattezza e partizione dell'unità.

Elementi di Algebra

Algebra lineare: forme lineari, forme bilineari simmetriche e forme quadratiche su uno spazio vettoriale. Il teorema fondamentale sulle forme bilineari simmetriche. Spazi vettoriali di Lorentz. Forme simplettiche.
Azione di un gruppo su un insieme: azione effettiva, libera, transitiva, semplicemente transitiva, orbite e gruppi di isotropia, esempi.
Algebre di Lie reali e complesse: esempi, algebre lineari speciali, algebre ortogonali ed algebre unitarie. Rappresentazioni, la rappresentazione aggiunta.
Algebra tensoriale: prodotto tensoriale di due spazi vettoriali e, più in generale, di una famiglia finita di spazi vettoriali. Proprietà di dualità. Basi del prodotto tensoriale di spazi di dimensione finita. Spazi tensoriali su uno spazio vettoriale. Componenti dei tensori. Operazioni sui tensori: contrazione, alternazione e simmetrizzazione. L'algebra tensoriale $T(V)$ su uno spazio vettoriale V e sue derivazioni. Tensori come applicazioni multilineari. L'algebra esterna di Grassmann $\Lambda(V)$.

Varietà differenziabili

Varietà topologiche e differenziabili: esempi. Orientabilità. Funzioni differenziabili, applicazioni differenziabili tra varietà. Spazio tangente e cotangente. Teoremi di prolungamento. Il fibrato tangente, il fibrato cotangente ed i fibrati tensoriali di una varietà. Differenziale di applicazioni tra varietà. Immersioni e sommersioni. Varietà prodotto.

Campi tensoriali su una varietà M: l'algebra tensoriale $\mathfrak{T}(M)$. Caratterizzazione di campi tensoriali. Derivazioni di $\mathfrak{T}(M)$. L'algebra di Grassmann $\Lambda(M)$, derivazioni ed antiderivazioni di $\Lambda(M)$. Esempi: la differenziazione esterna, la differenziazione di Lie, il prodotto interno.
Connessioni lineari su M: la derivazione covariante lungo una curva, la differenziazione covariante, campi paralleli, il trasporto parallelo, il campo di torsione, il campo di curvatura e le identità del Bianchi.

Metriche e varietà pseudo-Riemanniane

Metriche su una varietà: metriche non degeneri, conseguenze della non degenerazione, la lunghezza di una curva. Esistenza di metriche semi-Riemanniane. La connessione di Levi-Civita e i simboli di Christoffel. Il trasporto parallelo come isometria. Geodetiche. Campi vettoriali di Killing.
Operatori differenziali su varietà (semi)-Riemanniane: il gradiente di una funzione, la divergenza di un campo vettoriale, la codifferenziazione, il Laplaciano.
Curvature: il campo di curvatura e le proprietà fondamentali. La curvatura sezionale e la classificazione degli spazi a curvatura costante nel caso Riemanniano e nel caso semi-Riemanniano. La curvatura del Ricci e la curvatura scalare. Varietà di Einstein. Il prodotto (semi)-Riemanniano ed il prodotto warped. Esempi: lo spazio esterno ed il buco nero di Schwarzschild.

Testi consultabili

Bo-Yu Hou, Bo-Yuan Hou: Differential Geometry for Physicists, World Scientific, 1999.
S. Kobayashi, K. Nomizu: Foundations of Differential Geometry, Vol I, Interscience Publishers, 1963.
B. O'Neill: Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, 1983.
Dispense a cura del docente.