UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI BARI ALDO MORO ANNO ACCADEMICO 2016/2017

DIPARTIMENTO INTERATENEO DI FISICA

Programma dell'insegnamento di: Metodi Matematici della Fisica

Docente: Prof. Paolo Facchi

Corso di Laurea Magistrale in Fisica

SSD insegnamento FIS/02, CFU 6, ore lezione 40 ore eserc. 15

Finalità del corso:
Il corso ha un duplice obiettivo: da un lato quello formativo, con riferimento a strutture matematiche moderne tipiche dell'analisi funzionale, in particolare agli spazi di Hilbert, dall'altro di fornire strumenti matematici necessari per affrontare problemi più avanzati della Fisica Moderna. I risultati di apprendimento attesi riguardano, in particolare, una comprensione più approfondita della struttura della Meccanica Quantistica e la padronanza di tecniche di calcolo approssimato più avanzate e generali.

Contenuti del corso:

1. Spazi metrici

Definizione di metrica. Esempi. Insiemi aperti, insiemi chiusi, intorni. Spazi topologici. Applicazioni continue. Insiemi densi, spazi separabili. Successioni convergenti e di Cauchy. Completezza. Esempi. Completamento di uno spazio metrico.

2. Spazi di Banach

Richiami sugli spazi vettoriali. Spazi normati. Completezza e spazi di Banach. Esempi: spazi finito-dimensionali, spazi di successioni, spazi di funzioni. Operatori lineari limitati. Continuità e limitatezza. Teorema dell'estensione lineare limitata. Funzionali lineari continui e spazio duale. Spazio di Banach degli operatori limitati. Teorema di Hanh-Banach. Esempi.

3. Introduzione alla teoria della misura

Integrale di Lebesgue. Sigma algebre e misure di Borel. Funzioni misurabili. Convergenza monotona e dominata. Teorema di Fubini. Esempi: misura assolutamente continua, misura di Dirac, misura di Cantor. Teorema di decomposizione di Lebesgue. Completezza degli spazi Lp.

4. Spazi di Hilbert

Prodotto scalare. Spazi euclidei e spazi di Hilbert. Ortogonalità, teorema di Pitagora. Disuguaglianza di Bessel e di Cauchy-Schwarz. Disuguaglianza triangolare. Legge del parallelogramma e identità di polarizzazione. Esempi. Somma diretta. Teorema della proiezione ortogonale. Lemma di Riesz-Fréchet. Teorema di struttura delle forme sesquilineari limitate. Sistemi ortonormali e coefficienti di Fourier. Basi ortonormali e uguaglianza di Parseval. Metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Isomorfismo con l2. Prodotto tensoriale e basi prodotto. Isomorfismi naturali di spazi prodotto.

5. Operatori lineari negli spazi di Hilbert

C*-algebra degli operatori limitati. Operatori normali, autoaggiunti, unitari e di proiezione ortogonale. Teorema della categoria di Baire. Principio della limitatezza uniforme di Banach-Steinhaus. Convergenza uniforme, forte e debole. Richiami dei postulati della meccanica quantistica. Operatori non limitati. Aggiunto di un operatore. Operatori simmetrici e autoaggiunti. Forme quadratiche. Esempi: operatori di moltiplicazione e di derivazione. Operatori essenzialmente autoaggiunti. Criterio fondamentale di autoaggiunzione e di essenziale autoaggiunzione. Grafico e chiusura di un operatore e del suo inverso. Estensione autoaggiunta degli operatori positivi. Esempio: energia cinetica nell'intervallo. Teorema di autoaggiunzione degli operatori osservabili.

6. Proprietà spettrali e dinamica

Risolvente, insieme risolvente e spettro. Esempi: operatore posizione e impulso. Prima formula del risolvente e proprietà analitiche del risolvente. Serie di Neumann. Spettro e criterio di Weyl. Spettro e autovalori dell'inverso. Caratterizzazione dello spettro degli operatori autoaggiunti, unitari e di proiezione ortogonale.
Misure a valori di proiezione e risoluzione dell'identità. Integrale sui proiettori delle funzioni limitate e teorema di omomorfismo. Valore di aspettazione del risolvente, trasformata di Borel e formula di inversione di Stieltjes. Famiglia spettrale di un operatore autoaggiunto e teorema spettrale. Calcolo funzionale. Proiettori spettrali e caratterizzazione dello spettro. Tipologie spettrali.
Dinamica quantistica e gruppi unitari di evoluzione. Conservazione dell'energia. Teorema di Stone. Sottospazi invarianti e essenziale autoaggiunzione. Probabilità di ritorno e di transizione. Lemma di Riemann-Lebesgue e di Wiener. Tipologie spettrali e probabilità di ritorno. Spettro puntuale e orbite quasi periodiche. Teorema RAGE.

Contenuti del corso (in lingua inglese):

1. Metric spaces

Definition. Examples. Open sets, closed sets, neighborhoods. Topological spaces. Continuous mappings. Dense sets, separable spaces. Convergent and Cauchy sequences. Completeness. Examples. Completion of a metric space.

2. Banach spaces

Vector spaces. Normed spaces. Completeness and Banach spaces. Examples: finite dimensional spaces, sequence spaces, function spaces. Bounded linear operators. Continuity and boundedness. BLT theorem. Continuous linear functionals and dual spaces. Banach space of bounded linear operators. Hanh-Banach theorem. Examples.

3. Introduction to measure theory

Lebesgue integral. Sigma algebras and Borel measures. Measurable functions. Dominated and monotone convergence. Fubini theorem. Examples: absolutely continuous measure, Dirac measure, Cantor measure. Lebesgue decomposition theorem. Completeness of Lp spaces.

4. Hilbert spaces

Inner product. Euclidean and Hilbert spaces. Orthogonality, Pythagorean theorem. Bessel and Cauchy-Schwarz inequalities. Triangular inequality. Parallelogram law and polarization identity. Examples. Direct sum. Projection theorem. Riesz-Fréchet lemma. Representation theorem for sesquilinear forms.
Orthonormal systems and Fourier coefficients. Orthonormal bases and Parseval's relation. Gram-Schmidt orthogonalization procedure. Isomorphism with l2. Tensor product and product bases. Natural isomorphisms between tensor product spaces.

5. Linear operators on Hilbert spaces

C*-algebra of bounded operators. Normal, self-adjoint, unitary and projection operators. Baire's category theorem. Uniform boundedness principle. Uniform, strong and weak convergence.
Some quantum mechanics. Unbounded operators. Adjoint. Symmetric and self-adjoint operators. Quadratic forms. Examples: multiplication and derivation operators. Essentially self-adjoint operators. Fundamental criteria of self-adjointness and essentially self-adjointness. Graph, closure and inverse of an operator. Self-adjoint extensions of positive operators. Example: kinetic energy in a segment. Self-adjointness of observables.

6. Spectrum and dynamics

Resolvent operator, resolvent set and spectrum. Examples: position and momentum operators. First resolvent formula and analytic properties. Neumann series. Spectrum and Weyl sequences. Spectrum and eigenvalues of the inverse. Spectrum of self-adjoint, unitary and projection operators.

Projection valued measures and resolution of the identity. Integration on PVM of bounded functions. Expectation value of the resolvent, Borel transform and Stieltjes inversion formula. Spectral family of a self-adjoint operator and spectral theorem. Functional calculus. Spectral projections and spectral types.
Quantum dynamics and unitary evolution groups. Energy conservation. Stone's theorem. Invariant subspaces and essentially self-adjointness. Return and transition probability. Riemann-Lebesgue lemma and Wiener theorem. Spectral types and return probability. Pure point spectrum and quasi-periodic orbits. RAGE theorem.

Bibliografia:

1. A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, Dover, New York, 1999
2. M. Reed, B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, Volume 1, Academic Press, New York, 1980
3. G. Teschl, Mathematical Methods in Quantum Mechanics, Graduate Studies in Mathematics, Volume 99, American Mathematical Society, Providence, 2009.
4. Dispense del corso.

Modalità espletamento prova di esame: orale

E-mail del docente: paolo.facchi@uniba.it

ricevimento studenti: nei giorni lunedì e giovedì dalle 15:00 alle 16:00, presso lo studio del docente, al Dipartimento di Fisica.